
تقدیم به
همسر و فرزندان عزیزمان

مقدمه ناشر

بعضی وقت‌ها با خودم فکر می‌کنم که اگر می‌شد به چند سال قبل برگردم، چه کارهایی انجام می‌دادم و چه کارهایی انجام نمی‌دادم. معمولاً هم نتیجهٔ این فکرها می‌شود یک سری حسرت و ناراحتی و گاهی هم لبخند و خوشحالی!
چند وقت پیش‌ها یک فیلمی دیدم به اسم About time!؛ داستان کلی این فیلم، در مورد پسری بود که می‌توانست در زندگی گذشتهٔ خودش سفر کند. این‌جوری که می‌رفت یک جایی که فقط و فقط خودش باشد و به یک لحظه در گذشتهٔ خودش فکر می‌کرد، دقیقاً همون لحظه‌ای که دلش می‌خواست تغییرش بده! بعد وقتی که از اون‌جا می‌اومد بیرون، دقیقاً به همون لحظه برمی‌گشت و اون کاری که احساس می‌کرد باید انجام می‌داده و نداده رو انجام می‌داد!! مثلاً همین الان فرض کنید اگر برمی‌گشتید به گذشتهٔ خودتون، چه‌جوری زندگی می‌کردید و چه چیزی را تغییر می‌دادید؟
قسمت جالب فیلم این بود که نتیجهٔ این تغییرات بعضی موقع‌ها خوب می‌شد، بعضی موقع‌ها هم بد و بعضی موقع‌ها هم چیزی رو تغییر نمی‌داد! مثلاً این‌که سفر در زمان، نمی‌تواند کسی را وادار به عشق کند! آخر فیلم هم یه دیالوگ خوب داره که می‌گه:

«هر روزی رو دو بار تکرار می‌کردم. بار اول به خاطر استرسی که مشکلات زندگی باعثش می‌شه، مانع لذت‌بردن من از زندگی می‌شد. اما بار دوم همون روز رو بدون استرس و نگرانی می‌گذروندم و این باعث می‌شد از کوچیک‌ترین چیزا هم لذت ببرم!»

حالا تصور کنید که ۱ سال از امروز گذشته! حسرت چه چیزهایی را می‌خورید؟ به خاطر چه کارهایی لبخند می‌زنید؟
همین الان یک جدولی شبیه جدول زیر درست کنید، این چیزها را بنویسید و یک جایی بگذارید که جلوی چشمتون باشد. هر روز به این جدول نگاه کنید و مرتب به‌روزش کنید. حتماً به دردتون خواهد خورد!

کارهایی که به خاطرشون خوشحال می‌شم.	چیزهایی که حسرتشو می‌خورم.
■ چه‌قدر خوب شد که ریاضی نردبام رو خوب خوندم. ■ ورزش خیلی به روحیه‌ام کمک کرد. خوشحالم که با این‌همه درس نذاشتمش کنار! . . .	■ کاش بهتر برنامه‌ریزی می‌کردم ... ■ کاش کم‌تر می‌رفتم تو اینستا! . . .

نوشتن کتاب‌های سری نردبام اصلاً کار آسونی نیست؛ چرا که با توجه به محدودیت‌های کتاب درسی، باید کتابی بنویسی که هم از چارچوب کتاب درسی خارج نشود، هم در مسیر کنکور باشد و مهم‌تر از همه تست‌های جون‌دار و خفن داشته باشد! مؤلفان کتاب به خوبی از پس این کار براومدند! به این دوستان تبریک می‌گم به خاطر محصولی که تولید کردند! دست واحد تولید هم درد نکند که مثل همیشه پابه‌پای تألیف، کارها را جلو بردند! یک تشکر ویژه هم از لولاو مرادی که دلسوزانه برای تولید این کتاب جنگید.

زندگی یه بار بیشتر نیست! قدرشو بدون ...

مقدمه مؤلف

دوستان خوب رشتهٔ تجربی سلام

خب شما عزیزانی که این کتاب را انتخاب کرده‌اید، لازم است چند مطلب که در تألیف این کتاب مورد توجه مؤلفین بوده است را بدانید:

۱ به جای درس‌نامه، مرورنامه داشته‌ایم به این معنا که تمامی مطالب درسی به طور کامل گفته نشده است اما تمام مواردی که ضروری بوده است یا در قالب تست آموزشی یا در قالب نکتهٔ درسی در قسمت مرورنامه آورده شده است.

۲ در تست‌هایی که به عنوان قسمت آخر بخش آورده شده است به هیچ عنوان از تست کنکور استفاده نشده است تا هم تست بیشتری تألیف کنیم و هم آن‌که خود بتوانید تست‌های کنکور را بعداً پس از تکمیل فرآیند آموزش بررسی کنید.

۳ تست‌های هر بخش با یک چیدمان راحت به سخت آورده شده است. تا آموزش رفته‌رفته تکمیل شود. به همین جهت انتخاب برخی تست‌ها در قالب زوج، فرد و یا تست مضربی در استفاده از این کتاب به هیچ عنوان پیشنهاد نمی‌شود.

۴ تجربهٔ تیم مؤلف در کتاب نردبام دهم، یازدهم و دوازدهم در رشتهٔ ریاضی پشتوانهٔ بسیار قوی در تألیف تست‌های این کتاب بوده است به طوری که تست‌ها با کم‌ترین تکرار و بیشترین تنوع ارائه شده است.

۵ پاسخ تشریحی کافی که مفاهیم اصلی جواب را شامل شود و زیاده‌گویی نکرده باشد نقطهٔ قوت کتاب محسوب می‌شود.

۶ تست‌های کنکور سراسری در انتهای کتاب به صورت تفکیکی آورده شده است که می‌توانید از آن‌ها بهرهٔ کافی را ببرید.

تألیف این کتاب تجربهٔ سال‌ها تدریس درس ریاضی تجربی و حسابان در مدارس برتر تهران بوده است.

نتیجهٔ تلاش تیم مؤلف کسب چند رتبهٔ یک‌رقمی و چندین رتبهٔ خاص «۱» در سال‌های اخیر کنکور بوده است.

به همین جهت از تمام دانش‌آموزان عزیزمان که در این سال‌ها در کنار ما در کلاس درسی همراه و همیار بوده‌اند کمال تشکر را داریم و به آن‌ها افتخار می‌کنیم. اگر مساعدت و همفکری مسئولین محترم انتشارات نبود این کتاب در این مدت حتماً به ثمر نمی‌نشست. از جناب کمیل نصری و جناب ایمان سلیمان‌زادهٔ عزیز که خیلی دوست‌داشتنی است تشکر می‌کنیم. از سرکار خانم مرادی که خستگی را خسته کرده خیلی ممنونیم. از تیم ویراستار به‌خصوص جناب امیرحسین شریفیان و ... که خیلی صبورانه و دقیق بازنگری کردند، اصلاح کردند و ... تشکر می‌کنیم.

در پایان باید بگوییم که این اثر ناقابل نمی‌تواند بی‌خطا باشد. کمک کنید تا بتوانیم در اولین فرصت خطاهای کتاب را اصلاح کنیم تا دانش‌آموزان با آرامش خاطر بیشتر از این کتاب استفاده کنند.

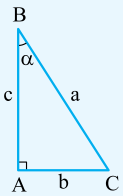
پاییز ۱۴۰۱ تیم تألیف

فهرست

فصل هشت

مثلثات

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث



در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ نسبت‌های مثلثاتی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$\sin\alpha = \frac{b}{a} =$ مقابل به وتر

$\cos\alpha = \frac{c}{a} =$ مجاور به وتر

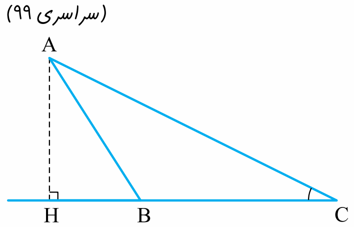
$\tan\alpha = \frac{b}{c} =$ مقابل به مجاور

$\cot\alpha = \frac{c}{b} =$ مجاور به مقابل

نکته نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف در جدول زیر آورده شده است:

α	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
$\sin\alpha$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۰	۱	۰	-۱	۰
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۰	-۱	۰	۱
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	۰	×	۰	×	۰
$\cot\alpha$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	×	۰	×	۰	×

تست در شکل زیر، فرض کنید $\sin C = \frac{۵}{۱۳}$ و $CH = ۹$، اندازهٔ ارتفاع AH کدام است؟ (سراسری ۹۹)



۱) ۳/۲۵

۲) ۳/۵

۳) ۳/۶

۴) ۳/۷۵

پاسخ گزینهٔ «۴»

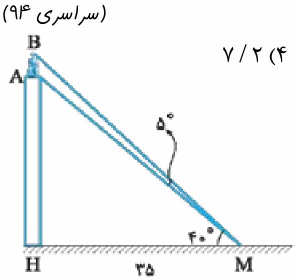
$$\sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{۵}{۱۳} \Rightarrow \begin{cases} AH = ۵a \\ AC = ۱۳a \end{cases} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} HC = ۱۲a \xrightarrow{HC = ۹} ۱۲a = ۹ \Rightarrow a = \frac{۳}{۴}$$

پس: $AH = ۵a = \frac{۱۵}{۴} = ۳/۷۵$.

تست ناظری به فاصلهٔ ۳۵ متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است، زاویهٔ رؤیت انتها و ابتدای مجسمه با سطح افقی ۴۵ و ۴۰ درجه است. ارتفاع مجسمه کدام است؟ $(\tan ۴۰^\circ = ۰/۸)$ (سراسری ۹۴)

۱) ۶ ۲) ۶/۴ ۳) ۷ ۴) ۷/۲

پاسخ گزینهٔ «۳» ابتدا یک شکل فرضی رسم می‌کنیم:

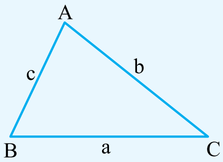


$$\tan ۴۵^\circ = \frac{BH}{MH} = ۱ \Rightarrow BH = MH = ۳۵$$

$$\tan ۴۰^\circ = \frac{AH}{MH} \Rightarrow ۰/۸ = \frac{۳۵ - AB}{۳۵} \Rightarrow AB = ۷$$

روابط طولی در مثلث

در مثلث ABC ، مطابق شکل روبه‌رو، می‌توان روابط زیر را بیان نمود:



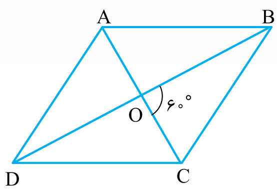
۱ $S=\frac{1}{2}bc\sin\hat{A}=\frac{1}{2}ba\sin\hat{C}=\frac{1}{2}ac\sin\hat{B}$ **۲** $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$ (قضیهٔ کسینوس‌ها)

۳ $\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}$ (قضیهٔ سینوس‌ها)

تست **اندازهٔ دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و $8\sqrt{3}$ واحد است. این دو قطر با زاویهٔ ۶۰ درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟** *(سراسری ۹۶)*

۱) ۴۸ ۲) ۵۴ ۳) ۶۴ ۴) ۷۲

پاسخ **گزینهٔ «۴»**

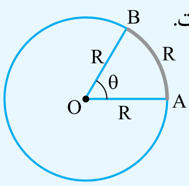


مساحت هر چهارضلعی که توسط رسم قطرها داخل متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید با هم برابر است.

$$S=4S_{OBC}=4\times\frac{1}{2}\times OB\times OC\times\sin60^\circ=2\times6\times4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=72$$

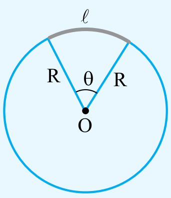
واحدهای اندازه‌گیری زاویه و طول کمان

درجه: اگر محیط دایره‌ای را به ۳۶۰ کمان مساوی تقسیم کنیم، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌روی هر کدام از این کمان‌ها، **۱ درجه** است.



رادیان: اگر در دایره‌ای به شعاع R، کمانی به طول R جدا کنیم، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به آن، **۱ رادیان** است.

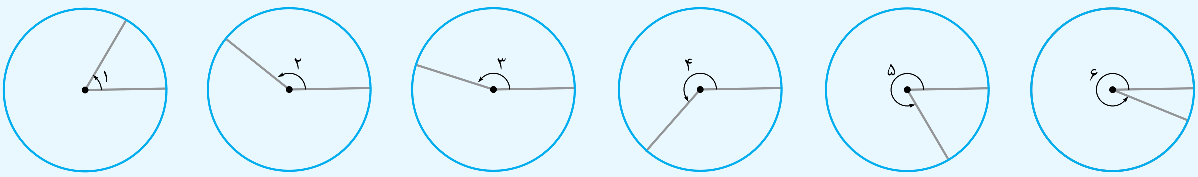
$\theta=1\text{rad}\quad,\quad 1\text{rad}\simeq57^\circ$



طول کمان: طول کمان مقابل به زاویهٔ θ (برحسب رادیان) در دایره‌ای به شعاع R برابر است با: Rθ . $\ell=R\theta$

مثلاً اگر $\theta=1$ رادیان باشد، آن‌گاه $\ell=R$ است.

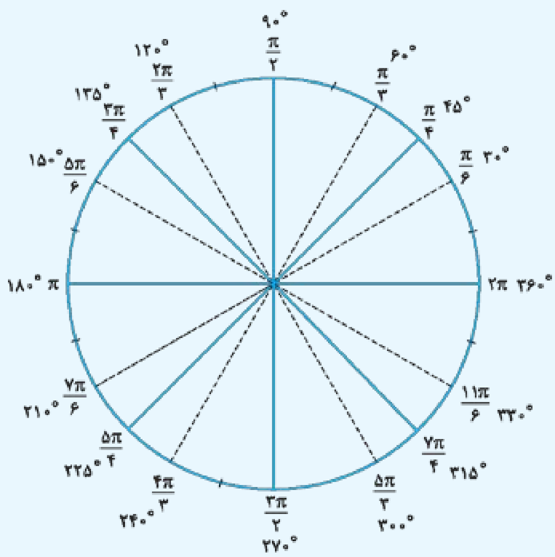
تذکر با توجه به این‌که یک رادیان، تقریباً 57° است، پس می‌توان زوایای ۱، ۲، ... و ۶ رادیان را به صورت زیر در یک دایره، نمایش داد:



$\theta=1\,\text{rad}$ $\theta=2\,\text{rad}$ $\theta=3\,\text{rad}$ $\theta=4\,\text{rad}$ $\theta=5\,\text{rad}$ $\theta=6\,\text{rad}$

◂ **تبدیل درجه به رادیان** اگر زاویه‌ای D درجه و R رادیان باشد، آن‌گاه $\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}$.

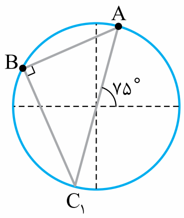
در شکل داده‌شده، زوایای معروف، برحسب درجه و رادیان بیان شده‌اند:

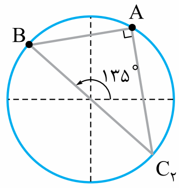


تست انتهای کمان‌های مقابل به زوایای $\frac{۵\pi}{۱۲}+۲k\pi$ ، $\frac{۳\pi}{۴}+۲k\pi$ و $\alpha+۲k\pi$ بر روی دایرهٔ مثلثاتی، سه رأس یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند. α کدام می‌تواند باشد؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\frac{۵\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۱۷\pi}{۱۲}$ ۳) $\frac{۴\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۱۱\pi}{۶}$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** به شرطی مثلث قائم‌الزاویه است که دو رأس آن، دو سر قطر دایره باشد. دقت کنید که $\frac{۵\pi}{۱۲}$ و $\frac{۳\pi}{۴}$ معادل ۷۵° و ۱۳۵° هستند. دو حالت می‌توان در نظر گرفت:

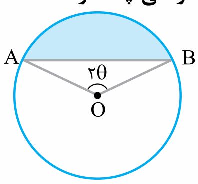




$$C_۱:\alpha=۱۸۰^\circ+۷۵^\circ=۲۵۵^\circ \Rightarrow \alpha=\frac{۱۷\pi}{۱۲}$$

$$C_۲:\alpha=۱۳۵^\circ+۱۸۰^\circ=۳۱۵^\circ \Rightarrow \alpha=\frac{۷\pi}{۴}$$

تست فرض کنید θ برحسب رادیان و $۴\sin\theta=۳\theta$ باشد. اگر در شکل زیر شعاع دایره برابر ۶ باشد، محیط ناحیهٔ رنگی چه‌قدر است؟



۱) ۱۵θ
۲) ۱۸θ
۳) ۲۱θ
۴) ۲۴θ

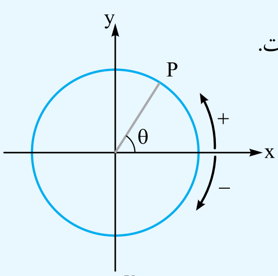
پاسخ **گزینهٔ «۳»** در مثلث متساوی‌الساقینی به زاویهٔ رأس α و ساق‌های برابر a طول قاعدهٔ مثلث برابر است با: $۲a\sin\frac{\alpha}{۲}$

وتر: $AB=۲R\sin\frac{۲\theta}{۲}=۱۲\sin\theta=۱۲\times\frac{۳}{۴}\theta=۹\theta$ کمان: $\overset{\frown}{AB}=R\times۲\theta=۱۲\theta$

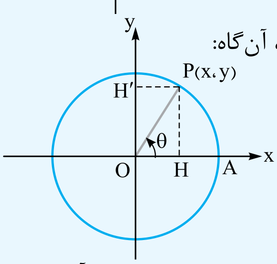
پس محیط شکل رنگی برابر $۹\theta+۱۲\theta=۲۱\theta$ است.

دایرهٔ مثلثاتی

دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱، به طوری که جهت مثبت آن خلاف جهت عقربه‌های ساعت است.



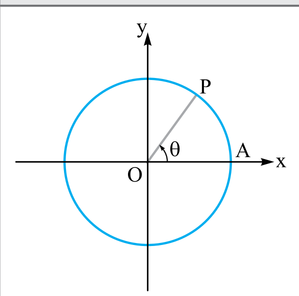
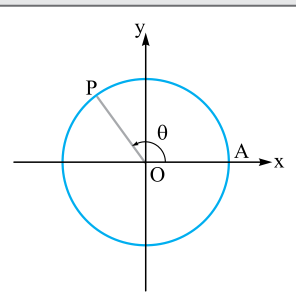
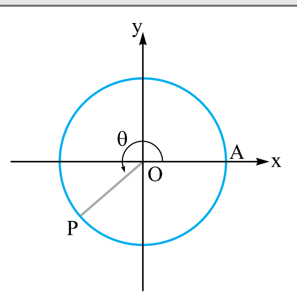
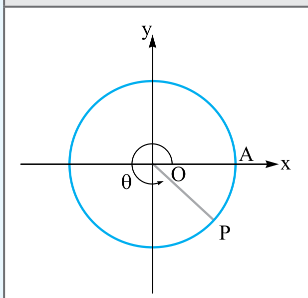
نسبت‌های مثلثاتی در دایره اگر نقطهٔ $P(x,y)$ روی دایرهٔ مثلثاتی مطابق شکل مقابل قرار داشته باشد، آن‌گاه:



$$\left.\begin{array}{l} x=OH=\cos\theta \\ y=OH'=\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow P(\cos\theta,\sin\theta)$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}$$

توجه کنید که زاویهٔ θ در جهت مثبت مثلثاتی و از OA شروع به حرکت می‌کند. بنابراین در هر ناحیه، با توجه به علامت x و y در آن ناحیه، علامت نسبت‌های مثلثاتی مشخص می‌شود.

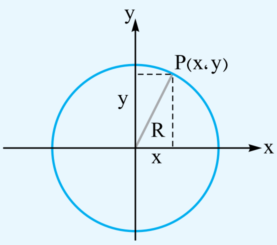
ناحیهٔ اول	ناحیهٔ دوم	ناحیهٔ سوم	ناحیهٔ چهارم
			

ناحیهٔ اول	ناحیهٔ دوم	ناحیهٔ سوم	ناحیهٔ چهارم
$x > ۰ \quad , \quad y > ۰$	$x < ۰ \quad , \quad y > ۰$	$x < ۰ \quad , \quad y < ۰$	$x > ۰ \quad , \quad y < ۰$
$\sin\theta \quad +$	$\sin\theta \quad +$	$\sin\theta \quad -$	$\sin\theta \quad -$
$\cos\theta \quad +$	$\cos\theta \quad -$	$\cos\theta \quad -$	$\cos\theta \quad +$
$\tan\theta \quad +$	$\tan\theta \quad -$	$\tan\theta \quad +$	$\tan\theta \quad -$
$\cot\theta \quad +$	$\cot\theta \quad -$	$\cot\theta \quad +$	$\cot\theta \quad -$

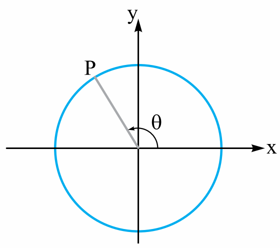
نکته اگر نقطهٔ $P(x,y)$ روی دایرهٔ مثلثاتی واقع باشد، آن‌گاه $x^۲ + y^۲ = ۱$ است.

در حالت کلی اگر نقطهٔ $P(x,y)$ روی دایره‌ای به شعاع R و مرکز مبدأ مختصات واقع باشد، آن‌گاه:

$$x^۲ + y^۲ = R^۲$$



تست نقطهٔ $P(۱-۲a,a)$ مطابق شکل روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد. مقدار $\tan\theta$ کدام است؟



۱) $-\frac{۳}{۴}$
۲) $-\frac{۴}{۳}$
۳) $-\frac{۳}{۵}$
۴) $-\frac{۴}{۵}$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** مختصات نقطهٔ P به صورت $(\cos\theta,\sin\theta)$ است.

$$(۱-۲a)^۲ + a^۲ = ۱ \Rightarrow ۵a^۲ - ۴a = ۰ \Rightarrow a = \frac{۴}{۵} \Rightarrow P(-\frac{۳}{۵},\frac{۴}{۵})$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{۴}{۵}}{-\frac{۳}{۵}} = -\frac{۴}{۳}$$

تست اگر $\frac{\pi}{۱۲} \le \alpha \le \frac{۵\pi}{۱۲}$ و $\sin ۲\alpha = \frac{۲}{۱-۲m}$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲} \le m < \frac{۱}{۲}$
۲) $m \le -\frac{۳}{۲}$
۳) فقط $m = -\frac{۳}{۲}$
۴) $-\frac{۳}{۲} \le m \le -\frac{۱}{۲}$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** دقت کنید که $\frac{\pi}{۶} \le ۲\alpha \le \frac{۵\pi}{۶}$ است پس مقدار $\sin ۲\alpha$ حداقل برابر $\frac{۱}{۲}$ و حداکثر برابر ۱ است.

$$\frac{۱}{۲} \le \sin ۲\alpha \le ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \le \frac{۲}{۱-۲m} \le ۱ \xrightarrow{۱-۲m>۰} ۲ \le ۱-۲m \le ۴ \Rightarrow -\frac{۳}{۲} \le m \le -\frac{۱}{۲}$$

جواب به دست آمده در شرط $۱-۲m > ۰$ هم صدق می‌کند.

نسبت‌های مثلثاتی کمان‌های $\frac{k\pi}{۲} \pm \alpha \ (k \in \mathbb{Z})$

ابتدا به حالت‌های خاص زیر توجه کنید:

$\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha) = \sin\alpha$

$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha) = \cot\alpha \qquad \cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha) = \tan\alpha$

$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha) = -\sin\alpha$

$\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha) = -\cot\alpha \qquad \cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha) = -\tan\alpha$

$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha \qquad \cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$

$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha \qquad \cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$

$\sin(۲\pi-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(۲\pi-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(۲\pi-\alpha) = -\tan\alpha \qquad \cot(۲\pi-\alpha) = -\cot\alpha$

$\sin(۲\pi+\alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(۲\pi+\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(۲\pi+\alpha) = \tan\alpha \qquad \cot(۲\pi+\alpha) = \cot\alpha$

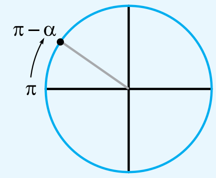
$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha \qquad \cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

نکته برای محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی $\frac{k\pi}{۲}\pm\alpha$ دو مرحله لازم است:

۱ اگر k صحیح و زوج باشد، نسبت مثلثاتی عوض نمی‌شود ولی اگر k صحیح و فرد باشد، نسبت مثلثاتی عوض می‌شود.

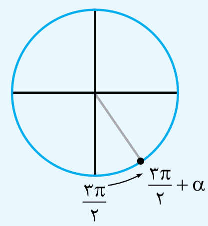
۲ با فرض کوچک‌بودن α (حتی اگر کوچک نباشد) و یافتن ناحیه‌ای که $\frac{k\pi}{۲}\pm\alpha$ در آن ناحیه قرار می‌گیرد، علامت نسبت مثلثاتی داده‌شده را به عنوان علامت جواب در نظر می‌گیریم.

به طور مثال:



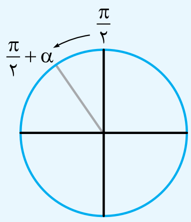
$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$

ناحیهٔ دوم، تانژانت منفی



$\sin(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=-\cos\alpha$

ناحیهٔ چهارم، سینوس منفی



$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$

ناحیهٔ دوم، سینوس مثبت

تست حاصل عبارت $\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})\cos(-\frac{۱۷\pi}{۶})+\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶})$ کدام است؟ *(سراسری ۹۸)*

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ گزینهٔ «۳»

$$\cos(-\frac{۱۷\pi}{۶})=\cos(-۳\pi+\frac{\pi}{۶})=-\cos\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲} \qquad \sin\frac{۱۷\pi}{۳}=\sin(۶\pi-\frac{\pi}{۳})=-\sin\frac{\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\sin(-\frac{۱۱\pi}{۶})=\sin(-۲\pi+\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲} \qquad \tan(\frac{۱۹\pi}{۴})=\tan(۵\pi-\frac{\pi}{۴})=-\tan\frac{\pi}{۴}=-۱$$
$$\Rightarrow P=(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})+(-۱)(\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

تست اگر $\tan\theta=۰/۲$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(۳\pi+\theta)}$ کدام است؟ *(سراسری ۹۱)*

۱) -۳ ۲) $۱/۲$ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ گزینهٔ «۴»

$$P=\frac{\sin\theta-(-\cos\theta)}{\sin\theta-(-\sin\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\sin\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{۲\sin\theta}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cot\theta=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۰/۲})=\frac{۱}{۲}+\frac{۵}{۲}=۳$$

نکته اگر α و β دو زاویهٔ متمم باشند، آن‌گاه: $\sin\alpha=\cos\beta \ ,\ \cos\alpha=\sin\beta \ ,\ \tan\alpha=\cot\beta \ ,\ \cot\alpha=\tan\beta$

و اگر α و β مکمل هم باشند، آن‌گاه: $\sin\alpha=\sin\beta \ ,\ \cos\alpha=-\cos\beta \ ,\ \tan\alpha=-\tan\beta \ ,\ \cot\alpha=-\cot\beta$

تست اگر $\tan(\alpha+\frac{\pi}{۴})\tan(\beta-\frac{\pi}{۳})=۱$ باشد، حاصل $\alpha+\beta$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۷\pi}{۱۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۱۱\pi}{۱۲}$

پاسخ گزینهٔ «۱» اگر $x+y=\frac{\pi}{۲}$ باشد، آن‌گاه $\tan x=\cot y$ است.

$$\tan(\alpha+\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{\tan(\beta-\frac{\pi}{۳})}=\cot(\beta-\frac{\pi}{۳})$$

یکی از حالت‌های ممکن آن است که $(\alpha+\frac{\pi}{۴})+(\beta-\frac{\pi}{۳})=\frac{\pi}{۲}$ باشد، بنابراین $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۴}=\frac{۷\pi}{۱۲}$ یکی از جواب‌ها می‌تواند باشد.

تست حاصل عبارت $P=\cos\frac{\pi}{۹}+\cos\frac{۲\pi}{۹}+\cos\frac{۳\pi}{۹}+\cdots+\cos\frac{۹\pi}{۹}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) صفر

پاسخ **گزینهٔ «۳»** اگر $\alpha+\beta=\pi$ باشد، آن‌گاه $\cos\alpha=-\cos\beta$ است.

زوایای $\frac{\pi}{۹}$، $\frac{۲\pi}{۹}$، $\frac{۳\pi}{۹}$ و $\frac{۴\pi}{۹}$ به ترتیب با زوایای $\frac{۸\pi}{۹}$، $\frac{۷\pi}{۹}$، $\frac{۶\pi}{۹}$ و $\frac{۵\pi}{۹}$ مکمل‌اند، پس مجموع کسینوس‌های آن‌ها برابر صفر است.

$$\cos\frac{۴\pi}{۹}+\cos\frac{۵\pi}{۹}=۰\quad,\quad\cos\frac{۳\pi}{۹}+\cos\frac{۶\pi}{۹}=۰\qquad\cos\frac{۲\pi}{۹}+\cos\frac{۷\pi}{۹}=۰\quad,\quad\cos\frac{\pi}{۹}+\cos\frac{۸\pi}{۹}=۰$$

از طرفی $\cos\frac{۹\pi}{۹}=-۱$ پس حاصل عبارت P برابر -۱ است.

اتحادهای مثلثاتی

اتحادهای مقدماتی اتحادهای ابتدایی و اصلی در مبحث مثلثات به صورت زیر می‌باشند:

۱) $\sin^۲x+\cos^۲x=۱$

۲) $۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}$

۳) $۱+\cot^۲x=\frac{۱}{\sin^۲x}$

۴) $\tan x.\cot x=۱$

۵) $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

۶) $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$

تست اگر $\tan\alpha=\frac{۴}{۳}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟ *(سراسری ۹۸)*

$$\sin(\frac{۹\pi}{۲}+\alpha)\cos(\frac{۷\pi}{۲}-\alpha)-\tan(\alpha-\frac{۳\pi}{۲})$$

۱) $-۱/۲۳$ ۲) $-۰/۵۲$ ۳) $۰/۲۷$ ۴) $۰/۴۸$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** ابتدا سایر نسبت‌های مثلثاتی را پیدا می‌کنیم:

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow ۱+\frac{۱۶}{۹}=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{۹}{۲۵}\xrightarrow{\text{ناحیهٔ سوم}}\cos\alpha=-\frac{۳}{۵}$$

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱\Rightarrow\sin^۲\alpha=۱-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵}\xrightarrow{\text{ناحیهٔ سوم}}\sin\alpha=-\frac{۴}{۵}$$

$$P=\sin(۴\pi+\frac{\pi}{۲}+\alpha).\cos(۴\pi-\frac{\pi}{۲}-\alpha)-\tan(\alpha-\frac{\pi}{۲}-\pi)=\cos\alpha(-\sin\alpha)+\cot\alpha=-\frac{۳}{۵}(+\frac{۴}{۵})+\frac{۳}{۴}=۰/۲۷$$

تست اگر $\frac{\pi}{۲}<x<\pi$ باشد، حاصل عبارت $(\frac{۱}{\sin x}-\sin x)\frac{\tan x}{\sqrt{۱+\tan^۲x}}$ کدام است؟ *(سراسری ۹۸)*

۱) $-\cos^۲x$ ۲) $-\cos x$ ۳) $\cos^۲x$ ۴) $\cos x$

پاسخ **گزینهٔ «۱»** دقت کنید که x در ناحیهٔ دوم است و $\cos x$ در این ناحیه منفی است.

$$P=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲x}}}(\frac{۱-\sin^۲x}{\sin x})=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{۱}{|\cos x|}}.\frac{\cos^۲x}{\sin x}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{-۱}{\cos x}}.\frac{\cos^۲x}{\sin x}=-\sin x\times\frac{\cos^۲x}{\sin x}=-\cos^۲x$$

نکته به کمک اتحادهای اصلی، می‌توان اتحادهای زیر را نتیجه گرفت:

$$\sin^۶x+\cos^۶x=۱-۳\sin^۲x\cos^۲x\qquad\sin^۴x+\cos^۴x=۱-۲\sin^۲x\cos^۲x$$

تست اگر $\tan x+\cot x=\frac{۵}{۲}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin^۴x+\cos^۴x}{\sin^۶x+\cos^۶x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۷}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱۴}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۷}{۱۳}$

پاسخ **گزینهٔ «۴»**

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow\frac{\overbrace{\sin^۲x+\cos^۲x}^{۱}}{\sin x\cos x}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{۲}{۵}$$

حال، هر یک از عبارت‌های صورت و مخرج را محاسبه می‌کنیم. دقت کنید که صرف نظر از نکتهٔ صفحهٔ قبل، سعی می‌کنیم، فرمول‌های داده‌شده را اثبات کنیم:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x=1 \Rightarrow \sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \xrightarrow{\text{به توان ۳}} \sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^4 x\cos^2 x+3\cos^4 x\sin^2 x=1$$

$$\Rightarrow \sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{1}=1 \Rightarrow \sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$P=\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^6 x+\cos^6 x}=\frac{1-2\sin^2 x\cos^2 x}{1-3\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1-2(\frac{4}{25})}{1-3(\frac{4}{25})}=\frac{17}{13}$$

نسبت‌های مثلثاتی 2α اتحادهای مثلثاتی زوایای دو برابر کمان عبارت‌اند از:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha \qquad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

نکته فرمول‌های زیر که به فرمول‌های طلایی معروف‌اند، در حل سؤالات کاربرد زیادی دارند:

$$2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha \qquad 2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$$

تست اگر $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{3\pi}{2}-2\alpha)$ کدام است؟ *(سراسری ۹۵)*

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ **گزینهٔ «۱»** دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم و $\sin 2\alpha$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4} \Rightarrow 1-\sin 2\alpha=\frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha=\frac{3}{4}$$

$$\cos(\frac{3\pi}{2}-2\alpha)=-\sin 2\alpha=-\frac{3}{4}$$

تست اگر $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2})$ کدام است؟ *(سراسری ۹۵)*

۱) -2 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 2

پاسخ **گزینهٔ «۱»** از اتحادهای زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\\ 1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}\end{cases} \Rightarrow \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \tan(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2})=-\cot\frac{\alpha}{2}=-2$$

تست اگر زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی و $\tan\alpha=\frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2})+\cos(\alpha+\pi)}{\cot 2\alpha}$ کدام است؟ *(سراسری ۱۴۰۰)*

۱) $-\frac{96}{175}$ ۲) $\frac{1056}{175}$ ۳) $\frac{96}{175}$ ۴) $-\frac{1056}{175}$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** ابتدا دقت کنید که چون α ناحیهٔ سوم است پس $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ و $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ است.

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{16}{25}-\frac{9}{25}=\frac{7}{25} \qquad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2(-\frac{3}{5})(-\frac{4}{5})=\frac{24}{25}$$

$$\cot 2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{7}{24}$$

حال، حاصل عبارت را پیدا می‌کنیم:

$$P=\frac{\sin 2\alpha-\cos\alpha}{\cot 2\alpha}=\frac{\frac{24}{25}+\frac{4}{5}}{\frac{7}{24}}=\frac{24\times 44}{7\times 25}=\frac{1056}{175}$$

تست حاصل $\frac{1}{\cos 15^\circ}-\frac{1}{\sin 15^\circ}$ کدام است؟ *(سراسری ۹۶)*

۱) 2 ۲) $\sqrt{6}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{3}$

پاسخ گزینهٔ «۳»

$$P=\frac{\cos ۱۵^\circ-\sin ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ \cos ۱۵^\circ}=\frac{\cos ۱۵^\circ-\sin ۱۵^\circ}{\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ}=۴(\cos ۱۵^\circ-\sin ۱۵^\circ)$$

به توان ۲ : $P^۲=۱۶(\cos^۲ ۱۵^\circ+\sin^۲ ۱۵^\circ-۲\sin ۱۵^\circ \cos ۱۵^\circ)=۱۶(۱-\sin ۳۰^\circ)=۱۶(۱-\frac{۱}{۲})=۸ \Rightarrow P=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$

نکته به دو اتحاد فرعی مقابل توجه کنید:

$$\tan\alpha-\cot\alpha=-۲\cot ۲\alpha \qquad \tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۲}{\sin ۲\alpha}$$

تست اگر $\tan x=\frac{۴}{۳}$ باشد، مقدار $\tan\frac{x}{۲}-\cot\frac{x}{۲}$ کدام است؟ (سراسری ۹۶)

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ گزینهٔ «۲» صرف نظر از نکتهٔ بالا، سعی می‌کنیم فرمول‌های داده‌شده را اثبات کنیم:

$$\tan\frac{x}{۲}-\cot\frac{x}{۲}=\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}}-\frac{\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}=\frac{\sin^۲\frac{x}{۲}-\cos^۲\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}=\frac{-\cos(۲\times\frac{x}{۲})}{\frac{۱}{۲}\sin(۲\times\frac{x}{۲})}=\frac{-۲\cos x}{\sin x}=-۲\cot x=-۲\times\frac{۳}{۴}=-\frac{۳}{۲}$$

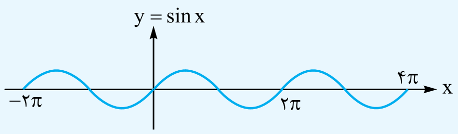
نمودار توابع مثلثاتی

دورهٔ تناوب تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم:

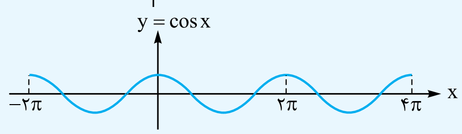
$$x\pm T\in D_f \quad , \quad f(x+T)=f(x)$$

کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را، دورهٔ تناوب f می‌نامیم.

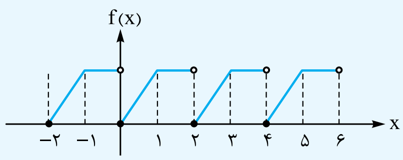
به نمودارهای زیر توجه کنید:



$$\sin(x\pm ۲\pi)=\sin x$$



$$\cos(x\pm ۲\pi)=\cos x$$



$$f(x\pm ۲)=f(x)$$

نکته دورهٔ تناوب برخی توابع خاص به صورت زیر است:

تابع	دورهٔ تناوب
$\sin(ax+b)$, $\cos(ax+b)$	$\frac{۲\pi}{\lvert a\rvert}$
$\sin^۲(ax+b)$, $\cos^۲(ax+b)$ $\lvert\sin(ax+b)\rvert$, $\lvert\cos(ax+b)\rvert$ $\tan(ax+b)$, $\cot(ax+b)$	$\frac{\pi}{\lvert a\rvert}$

تست دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=\tan(\pi x)-\cot(\pi x)$ کدام است؟ (سراسری ۹۸)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) π

پاسخ گزینهٔ «۱» با توجه به فرمول $\tan\theta-\cot\theta=-۲\cot ۲\theta$ حل می‌کنیم:

$$f(x)=-۲\cot(۲\pi x) \qquad T=\frac{\pi}{۲\pi}=\frac{۱}{۲}$$

نکته اگر دورهٔ تناوب تابع $y=f(x)$ برابر T باشد، دورهٔ تناوب تابع $y=c+kf(ax+b)$ برابر $\frac{T}{|a|}$ است.

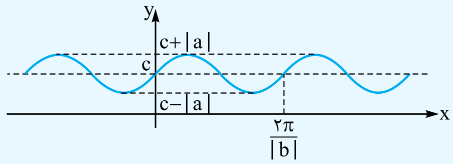
مثال دورهٔ تناوب تابع $y=f(x)$ برابر ۶ است. مقدار مثبت a را به گونه‌ای بیابید که دورهٔ تناوب تابع $y=۱+f(\frac{۳}{۲}ax)$ از دورهٔ تناوب تابع $y=۱-f(\frac{x}{a})$، ده واحد کم‌تر باشد.

پاسخ دورهٔ تناوب $۱+f(\frac{۳}{۲}ax)$ برابر $\frac{۶}{\frac{۳}{۲}a}=\frac{۴}{a}$ و دورهٔ تناوب $۱-f(\frac{x}{a})$ برابر $\frac{۶}{\frac{۱}{a}}=۶a$ است.

$$\frac{۴}{a}=۶a-۱۰ \Rightarrow ۳a^{۲}-۵a-۲=۰ \Rightarrow a=۲$$

نمودار تابع y=c+a sin bx

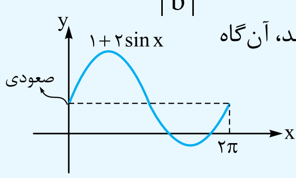
نمودار این تابع به صورت زیر است:

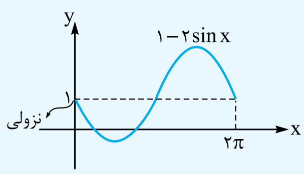


ویژگی‌های نمودار:

۱ ماکزیمم تابع برابر $c+|a|$، مینیمم تابع برابر $c-|a|$ و دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

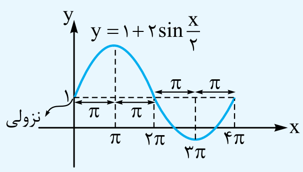
۲ در مجاورت محور yها (خط $x=۰$) اگر نمودار تابع، اکیداً صعودی باشد، آن‌گاه $ab>۰$ و اگر اکیداً نزولی باشد، $ab<۰$ است.





۳ خط $y=c$ نمودار تابع را در یک دورهٔ تناوب، به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کند که طول هر قسمت $\frac{T}{۴}$ است.

$$T=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi \quad , \quad \frac{T}{۴}=\pi$$



۴ فاصلهٔ بین دو نقطهٔ ماکزیمم متوالی یا مینیمم متوالی، یک دورهٔ تناوب است.

مثال مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دورهٔ تناوب تابع $y=۳-۷\sin(۲\pi x)$ را بیابید.

پاسخ

$$\max=c+|a|=۳+|-۷|=۱۰ \qquad \min=c-|a|=۳-|-۷|=-۴$$

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۲\pi}=۱$$

مثال تابع مثلثاتی به فرم $y=c+a\sin bx$ مثال بزنید که مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دورهٔ تناوب آن به ترتیب ۷، ۱− و ۴π باشد.

پاسخ

$$\begin{cases}\max=c+|a|=۷\\ \min=c-|a|=-۱\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c=۳\\ |a|=۴\end{cases}$$

$$T=\frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|}=۴\pi \Rightarrow |b|=\frac{۱}{۲} \Rightarrow y=۳\pm۴\sin(\frac{۱}{۲}x)$$

تست در تابع مثلثاتی $y=a-(۲a+۲)\sin(\frac{\pi}{a}x)$، مقدار ماکزیمم از سه برابر دورهٔ تناوب آن چهار واحد کم‌تر است. مقدار مینیمم این تابع چه‌قدر است؟ $(a>۰)$

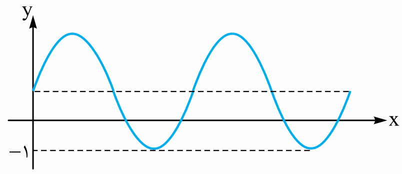
۱) ۲−
۲) ۳−
۳) ۴−
۴) ۶−

پاسخ گزینهٔ «۳»

$$\begin{cases}\max=a+|۲a+۲|\\ T=\frac{۲\pi}{|\frac{\pi}{a}|}=۲|a|\end{cases} \Rightarrow a+|۲a+۲|=۶|a|-۴ \xrightarrow{a>۰} ۳a+۲=۶a-۴ \Rightarrow a=۲$$

پس مینیمم برابر $a-|۲a+۲|=۲-۶=-۴$ است.

تست شکل زیر، نمودار تابع $y=۱+a\sin(b\pi x)$ در بازهٔ $(۰,\frac{۴}{۳})$ است. $a+b$ کدام است؟ (سراسری ۹۷)



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

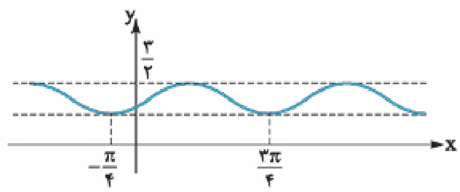
پاسخ **گزینهٔ «۳»** در اطراف $x=۰$ تابع صعودی است، پس $ab>۰$ است. حال هر دو را مثبت فرض کنید:

نمودار تابع در دو دورهٔ تناوب رسم شده است پس $T=\frac{۲}{۳}$ است.

$$T=\frac{۲}{۳}=\frac{۲\pi}{|b\pi|}\Rightarrow b=۳$$

$$\min=-۱\Rightarrow ۱-|a|=-۱\Rightarrow ۱-a=-۱\Rightarrow a=۲\Rightarrow a+b=۵$$

تست شکل زیر نمودار تابع $y=۱+a\sin bx\cos bx$ است. $a+b$ کدام است؟ (سراسری ۹۸)



۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) ۳

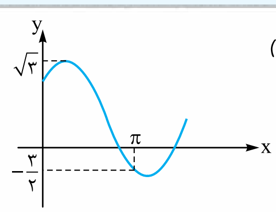
پاسخ **گزینهٔ «۳»** ضابطهٔ تابع را به صورت $y=۱+\frac{a}{۲}\sin ۲bx$ می‌نویسیم. چون نمودار تابع در اطراف $x=۰$، صعودی است، پس $ab>۰$ است. با توجه به گزینه‌ها، هر دو را مثبت فرض می‌کنیم:

$$\max=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۱+|\frac{a}{۲}|=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=۱\Rightarrow a+b=۲$$

$$T=\frac{۳\pi}{۴}-(-\frac{\pi}{۴})=\pi\Rightarrow \pi=\frac{۲\pi}{|۲b|}\Rightarrow b=۱$$

نکته اگر $|\theta|<\frac{\pi}{۲}$ باشد، آن‌گاه ویژگی‌های تابع $f(x)=c+a\sin(bx+\theta)$ همانند همان ویژگی‌هایی است که در مورد $y=c+a\sin bx$ بیان کرده بودیم.

تست شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=a+b\sin(x+\frac{\pi}{۳})$ است. b کدام است؟ (سراسری ۹۸)



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\sqrt{۳}$
۴) ۲

پاسخ **گزینهٔ «۳»** در اطراف $x=۰$ تابع صعودی است پس $b>۰$ است.

۱) $\max=a+|b|=a+b=\sqrt{۳}$

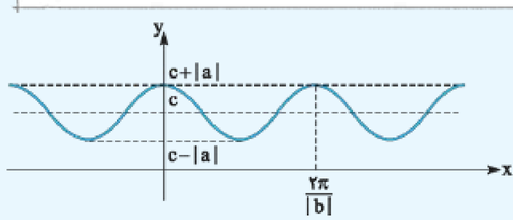
۲) $f(\pi)=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow a+b\sin(\pi+\frac{\pi}{۳})=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow a-\frac{b\sqrt{۳}}{۲}=-\frac{۳}{۲}$

پس به یک دستگاه می‌رسیم:

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=\sqrt{۳}\\ ۲a-b\sqrt{۳}=-۳\end{cases}\Rightarrow -۲b-b\sqrt{۳}=-۲\sqrt{۳}-۳\Rightarrow b=\frac{۲\sqrt{۳}+۳}{۲+\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}$$

نمودار تابع $y=c+a\cos bx$

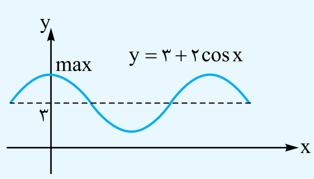
نمودار این تابع به صورت مقابل است:

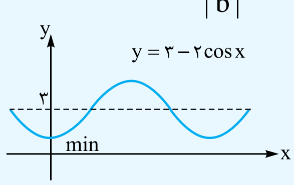


ویژگی‌های نمودار:

۱ ماکزیمم، مینیمم و دورهٔ تناوب تابع به ترتیب برابر $c+|a|$، $c-|a|$ و $\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

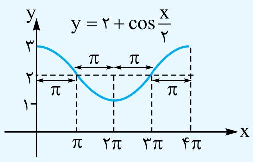
۲ بر روی محور yها، اگر ماکزیمم داشته باشیم، علامت a مثبت و اگر مینیمم داشته باشیم، علامت a منفی است. (علامت b تأثیری در نمودار ندارد.)





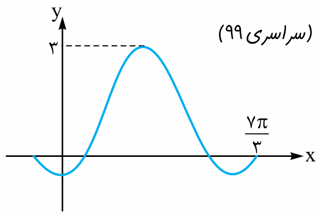
۳ خط $y=c$ نمودار تابع را در یک دورهٔ تناوب، به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کند:

$$T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$$



۴ فاصلهٔ بین دو نقطهٔ ماکزیمم متوالی یا مینیمم متوالی، یک دورهٔ تناوب است.

تست **شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=a+b\sin(\frac{\pi}{2}+x)$ است. مقدار b کدام است؟** *(سراسری ۹۹)*



۱) ۲

۲) ۱

۳) -1

۴) -2

پاسخ **گزینهٔ «۴»** ضابطهٔ تابع را به صورت $y=a+b\cos x$ می‌نویسیم. چون روی محور yها، مینیمم وجود دارد پس $b<0$ است.

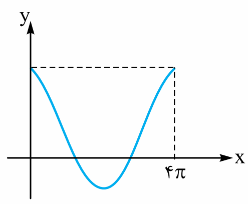
$$\max=a+|b|=a-b=3$$

از طرفی نمودار تابع از نقطهٔ $(\frac{7\pi}{3},0)$ عبور کرده است، پس:

$$0=a+b\cos\frac{7\pi}{3}=a+\frac{b}{2}$$

از حل دستگاه $\begin{cases}a-b=3\\ a+\frac{b}{2}=0\end{cases}$ داریم $b=-2$ و $a=1$.

تست **شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y=\frac{1}{2}+2\cos mx$ است. مقدار تابع در نقطه‌ای به طول $x=\frac{16\pi}{3}$ کدام است؟** *(سراسری ۹۶)*



۱) $-\frac{1}{2}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱

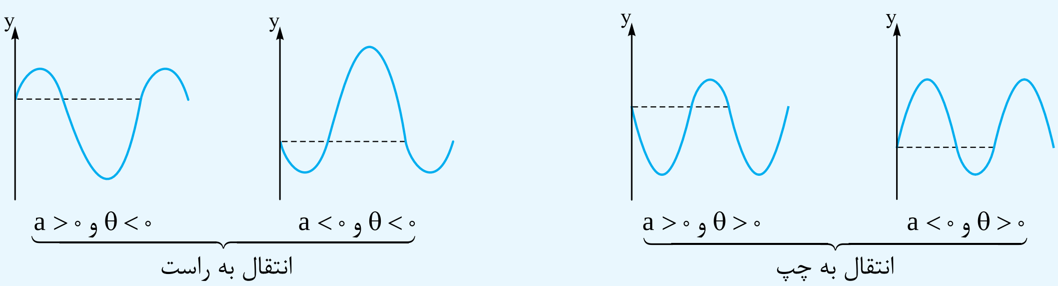
۴) صفر

پاسخ **گزینهٔ «۱»** دورهٔ تناوب تابع برابر 4π است.

$$T=4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|m|}=4\pi \Rightarrow |m|=\frac{1}{2} \qquad y=\frac{1}{2}+2\cos(\frac{1}{2}x)$$

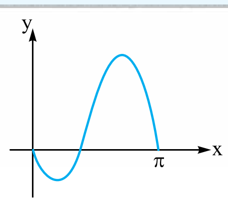
$$y(\frac{16\pi}{3})=\frac{1}{2}+2\cos\frac{8\pi}{3}=\frac{1}{2}+2(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$$

نکته فرض کنید $b>0$ و $|\theta|<\frac{\pi}{2}$ باشد، در این صورت نمودار $y=c+a\cos(bx+\theta)$ به یکی از صورت‌های زیر است:



به بیان دیگر: اگر در سمت راست محور yها اول مینیمم داشته باشد، آن‌گاه $a\theta>0$ و اگر اول ماکزیمم داشته باشد، آن‌گاه $a\theta<0$ است. $(b>0)$

تست **قسمتی از نمودار تابع $y=1+a\cos(bx-\frac{\pi}{3})$ به صورت مقابل است. حاصل $a-b$ کدام است؟**



۱) -1

۲) ۴

۳) -4

۴) صفر

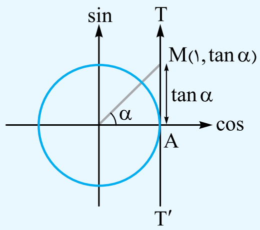
پاسخ **گزینهٔ «۳»** نمودار تابع از مبدأ عبور کرده است.

$$y(0)=0 \Rightarrow 1+a\cos(-\frac{\pi}{3})=0 \Rightarrow 1+\frac{a}{2}=0 \Rightarrow a=-2$$

چون $a<0$ و در سمت راست محور yها، ابتدا min داریم پس $b>0$ است.

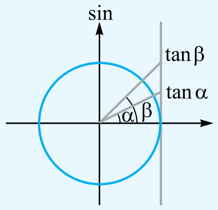
$$T=\pi \Rightarrow \pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow b=2 \Rightarrow a-b=-4$$

تابع تانژانت



در دایرهٔ مثلثاتی شکل مقابل، خط $x=۱$ (TAT') را محور تانژانت می‌نامیم. نقطهٔ A، مبدأ این محور و جهت مثبت محور، از پایین به بالا است.

در این صورت، اگر انتهای کمان روبه‌رو به α، در ناحیهٔ اول و سوم باشد، $\tan\alpha$ مثبت و اگر در ناحیهٔ دوم و چهارم باشد، $\tan\alpha$ منفی است.



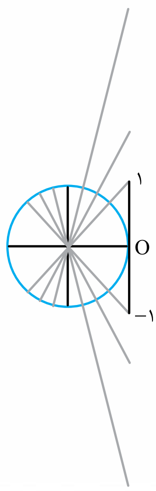
نکته در هر یک از چهار ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی مقدار $\tan\alpha$ اکیداً صعودی است.

$$۰<\alpha<\beta<\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \tan\alpha<\tan\beta$$

تست اگر $\frac{\pi}{۴}<x<\frac{۳\pi}{۴}$ و $\tan x=\frac{۳}{۲m-۳}$ باشد، حدود m کدام است؟

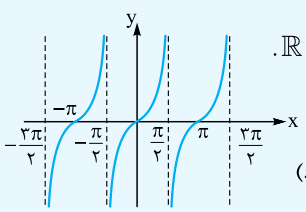
۱) $m>۳$ ۲) $۰<m<\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۲}<m<۳$ ۴) $۰<m<۳, m\neq\frac{۳}{۲}$



پاسخ **گزینهٔ «۴»** با توجه به دایرهٔ مثلثاتی و محور تانژانت‌ها، معلوم می‌شود $\tan x>۱$ و یا $\tan x<-۱$ است، پس $|\tan x|>۱$ است.

$$\left|\frac{۳}{۲m-۳}\right|>۱ \Rightarrow |۲m-۳|<۳ \Rightarrow -۳<۲m-۳<۳ \Rightarrow ۰<m<۳, m\neq\frac{۳}{۲}$$



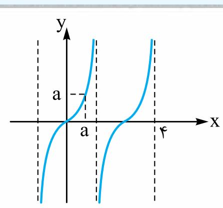
نمودار تابع tan x تابع $y=\tan x$، تابعی است با دامنهٔ $D=\{x\in\mathbb{R}, x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}, k\in\mathbb{Z}\}$ و برد $\mathbb{R}$.

این تابع متناوب و دورهٔ تناوب آن برابر π است و نمودار آن به صورت مقابل است:

این تابع در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ اکیداً صعودی است (ولی در اجتماع دو بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ و $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ غیریکنواست.)

تذکر در حالت کلی دورهٔ تناوب تابع $y=a\tan(bx+\alpha)$ برابر $\frac{\pi}{|b|}$ است.

تست قسمتی از نمودار تابع $y=-a\tan(b\pi x)$ به صورت مقابل است. مقدار a کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** با توجه به شکل، $a>۰$ است و چون تابع در اطراف مبدأ صعودی است پس $-ab>۰$ و در نتیجه $b<۰$ است.

$y=a\tan(-b\pi x)$

در $x=۴$ تابع تانژانت برای دومین بار در سمت راست، تعریف نشده است، پس:

$$-b\pi x=\frac{۳\pi}{۲} \xrightarrow{x=۴} -۴b\pi=\frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow b=-\frac{۳}{۸}$$

$$y(a)=a \Rightarrow a=-a\tan(-\frac{۳\pi}{۸}a) \Rightarrow \tan\frac{۳\pi a}{۸}=۱$$

اولین جواب: $\frac{۳\pi a}{۸}=\frac{\pi}{۴} \Rightarrow a=\frac{۲}{۳}$

تست تابع $f(x)=۲\tan(\frac{۳}{۲}\pi x)$ در بازهٔ $(-a,a)$ اکیداً صعودی است. حداکثر a کدام است؟

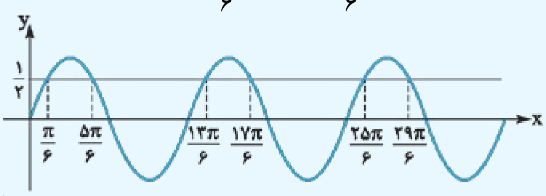
۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

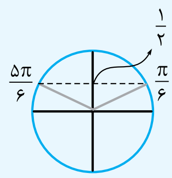
پاسخ **گزینهٔ «۱»** تابع تانژانت در بازهٔ $(-\frac{T}{۲},\frac{T}{۲})$ اکیداً یکنواست. پس a حداکثر برابر نصف دورهٔ تناوب است. $a=\frac{۱}{۲}T=\frac{۱}{۲}\frac{\pi}{|\frac{۳}{۲}\pi|}=\frac{۱}{۳}$

معادلات مثلثاتی

۱ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، دو زاویه یافت می‌شود که سینوس آن‌ها برابر $\frac{۱}{۲}$ است. پس معادلهٔ $\sin x=\frac{۱}{۲}$ در این بازه دو جواب $x=\frac{\pi}{۶}$ و $x=\frac{۵\pi}{۶}$ دارد.

اما به دلیل متناوب‌بودن سینوس، می‌توانیم تمام جواب‌های معادلهٔ $\sin x=\frac{۱}{۲}$ را به صورت $\frac{\pi}{۶}+۲k\pi$ و $\frac{۵\pi}{۶}+۲k\pi$ نمایش دهیم.

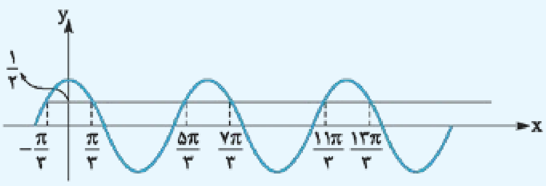


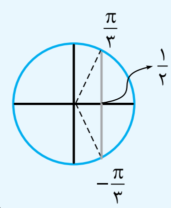


نتیجه جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin x=\sin\alpha$ به صورت روبه‌رو است:

$$\begin{cases} x=\alpha+۲k\pi \\ x=\pi-\alpha+۲k\pi \end{cases}$$

۲ جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos x=\frac{۱}{۲}$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۳}$ و $-\frac{\pi}{۳}$ و تمام جواب‌های این معادله به صورت $x=\pm\frac{\pi}{۳}+۲k\pi$ است.





نتیجه جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos x=\cos\alpha$ به صورت مقابل است: $x=\pm\alpha+۲k\pi$

تست مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۴\sin x\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=۱$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟ *(سراسری ۹۸)*

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۲) ۳π ۳) ۴π ۴) ۵π

پاسخ **گزینهٔ «۴»**

$$۴\sin x(-\cos x)=۱ \Rightarrow -۲\sin ۲x=۱ \Rightarrow \sin ۲x=-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x=-\frac{\pi}{۶}+۲k\pi \Rightarrow x=-\frac{\pi}{۱۲}+k\pi \xrightarrow{k=۱,۲} x=\frac{۱۱\pi}{۱۲},\frac{۲۳\pi}{۱۲} \\ ۲x=\pi+\frac{\pi}{۶}+۲k\pi \Rightarrow x=\frac{۷\pi}{۱۲}+k\pi \xrightarrow{k=۰,۱} x=\frac{۷\pi}{۱۲},\frac{۱۹\pi}{۱۲} \end{cases}$$

جمع جواب‌ها : $S=\frac{۱۱\pi}{۱۲}+\frac{۲۳\pi}{۱۲}+\frac{۷\pi}{۱۲}+\frac{۱۹\pi}{۱۲}=\frac{۶۰\pi}{۱۲}=۵\pi$

تست تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos^۲ x-\sin^۲ x\cos ۳x=۱$ در فاصلهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟ *(سراسری ۱۴۰۰)*

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ **گزینهٔ «۴»** توجه کنید در حل معادلات، اگر خواستید دو طرف تساوی را به عبارتی مانند A ساده کنید باید $A=۰$ را هم در نظر بگیرید.

$$-\sin^۲ x\cos ۳x=۱-\cos^۲ x \Rightarrow -\sin^۲ x\cos ۳x=\sin^۲ x$$

$$\begin{cases} \sin^۲ x=۰ \Rightarrow x=۰,\pi,۲\pi \\ -\cos ۳x=۱ \Rightarrow ۳x=\pi,۳\pi,۵\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{۳},\pi,\frac{۵\pi}{۳} \end{cases}$$

پس ۶ جواب دارد.

نکته در معادلات زیر کافی است نسبت مثلثاتی عوض شود یا این‌که زاویهٔ آن قرینه شود؛ مثلاً:

۱ $\sin\alpha = -\sin\beta \Rightarrow \sin\alpha = \sin(-\beta) \Rightarrow \begin{cases}\alpha = ۲k\pi - \beta \\ \alpha = ۲k\pi + \pi + \beta\end{cases}$

۲ $\cos\alpha = -\cos\beta \Rightarrow \cos\alpha = \cos(\pi - \beta) \Rightarrow \begin{cases}\alpha = ۲k\pi + \pi - \beta \\ \alpha = ۲k\pi - \pi + \beta\end{cases}$

۳ $\sin\alpha = \cos\beta \Rightarrow \sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{۲} - \beta) \Rightarrow \begin{cases}\alpha = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - \beta \\ \alpha = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۲} + \beta\end{cases}$

۴ $\sin\alpha = -\cos\beta \Rightarrow \sin\alpha = \sin(\frac{۳\pi}{۲} - \beta) \Rightarrow \begin{cases}\alpha = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲} - \beta \\ \alpha = ۲k\pi + \pi - \frac{۳\pi}{۲} + \beta\end{cases}$

تست **جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(۲x - \frac{\pi}{۴}) = \cos(x + \frac{\pi}{۴})$ با شرط $x \neq k\pi$ که در آن k عدد صحیح است، کدام است؟** *(سراسری ۹۹)*

۱) $x = \frac{k\pi}{۳}$ ۲) $x = \frac{۲k\pi}{۳}$ ۳) $x = \frac{۲k\pi}{۳} - \frac{\pi}{۶}$ ۴) $x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** از ویژگی‌های $\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$ استفاده می‌کنیم.

$$\sin(۲x - \frac{\pi}{۴}) = \sin(\frac{\pi}{۲} - x - \frac{\pi}{۴}) = \sin(\frac{\pi}{۴} - x) \Rightarrow \begin{cases}۲x - \frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{۴} - x + ۲k\pi \\ ۲x - \frac{\pi}{۴} = \pi - (\frac{\pi}{۴} - x) + ۲k\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = \frac{\pi}{۶} + \frac{۲k\pi}{۳} \\ x = \pi + ۲k\pi\end{cases}$$

طبق فرض، جواب $x = \pi + ۲k\pi$ قابل قبول نیست.

تست **جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۳x + \cos x = ۰$ باشد، $\cos x \neq ۰$ کدام است؟** *(سراسری ۹۸)*

۱) $x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۳}$ ۲) $x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ ۳) $x = k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ۴) $x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$

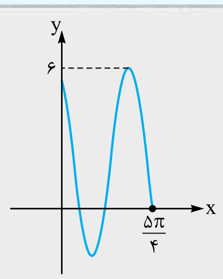
پاسخ **گزینهٔ «۲»** از ویژگی $-\cos x = \cos(\pi - x)$ استفاده می‌کنیم:

$$\cos ۳x = -\cos x = \cos(\pi - x) \Rightarrow \begin{cases}۳x = \pi - x + ۲k\pi \\ ۳x = -(\pi - x) + ۲k\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = \frac{\pi}{۴} + \frac{k\pi}{۲} \\ x = -\frac{\pi}{۲} + k\pi\end{cases}$$

چون $\cos x \neq ۰$ است، پس $x \neq -\frac{\pi}{۲} + k\pi$ است.

نکته تحلیل و حل برخی از سؤالات نمودارهای مثلثاتی، نیاز به حل معادلهٔ مثلثاتی دارد.

مثال **نمودار تابع $f(x) = a - ۴\sin(bx - \frac{\pi}{۳})$ در بازهٔ $[۰, \frac{۵\pi}{۴}]$ به صورت مقابل است. مقدار b را بیابید.**



پاسخ ماکزیمم تابع برابر $a + ۴$ است، پس $a = ۲$ است. چون در $x = ۰$ تابع نزولی است پس $-۴b < ۰$ و $b > ۰$ است. $x = \frac{۵\pi}{۴}$ سومین نقطهٔ برخورد تابع با محور xها است.

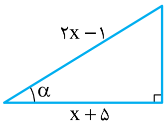
$$y = ۰ \Rightarrow ۰ = ۲ - ۴\sin(b\frac{۵\pi}{۴} - \frac{\pi}{۳}) \Rightarrow \sin(\frac{۵b\pi}{۴} - \frac{\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲}$$

سومین جواب : $۲\pi + \frac{\pi}{۶} = \frac{۵\pi b}{۴} - \frac{\pi}{۳} \Rightarrow b = ۲$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه

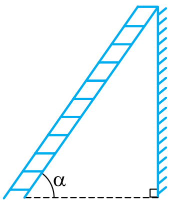
۷۳۴- در شکل مقابل، مقدار $\cos\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۱۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱۳}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱۲}{۱۳}$

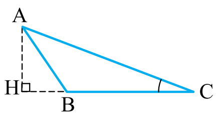
۷۳۵- نردبامی مطابق شکل در کنار یک دیوار قرار گرفته است. اگر طول نردبام ۱/۲۵ برابر ارتفاع دیوار باشد، مقدار تانژانت زاویه‌ای که نردبام با زمین می‌سازد، چه‌قدر است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۷۳۶- در مثلث ABC شکل مقابل $\cos C = ۰/۸$ است. اگر $AH = ۱۸$ باشد، طول پاره‌خط CH چه‌قدر است؟



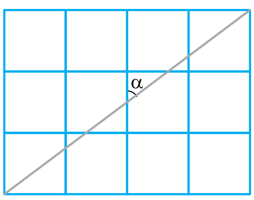
۱) ۲۴ ۲) ۲۸

۳) ۳۲ ۴) ۳۶

۷۳۷- یک موشک در ارتفاع ۲۰متری از سطح زمین با زاویهٔ ۳۰° پرتاب می‌شود. پس از طی ۸۰۰ متر در همین راستا در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار می‌گیرد؟

۱) ۴۰۰ ۲) $۴۰۰\sqrt{۳}$ ۳) ۴۲۰ ۴) $۴۰۰\sqrt{۳} + ۲۰$

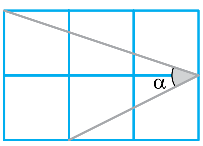
۷۳۸- اگر اندازهٔ هر ضلع مربع کوچک یک واحد باشد، مقدار $\sin\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

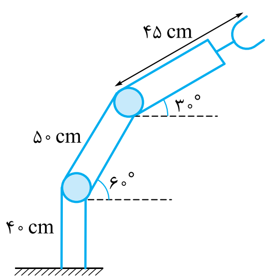
۷۳۹- هر ضلع مربع کوچک ۱ واحد است. مقدار $\sin\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۷۴۰- در روبات شکل مقابل فاصلهٔ نوک گیره از سطح زمین چند سانتی‌متر است؟ $(\sqrt{۳} \sim ۱/۷)$



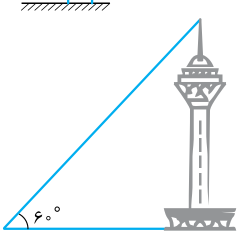
۱) ۱۰۳

۲) ۱۰۳/۲۵

۳) ۱۰۵

۴) ۱۰۵/۲۵

۷۴۱- طاها به نوک برج میلاد با زاویهٔ ۶۰° نگاه می‌کند. اگر ارتفاع برج میلاد را ۴۳۵ متر فرض کنیم، طاها چند متر از برج دور شود تا نوک برج را با زاویهٔ ۳۰° نگاه کند؟



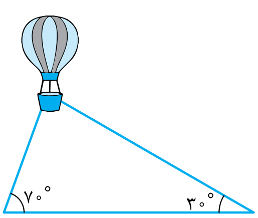
۱) $۲۹۰\sqrt{۳}$

۲) $۲۷۰\sqrt{۳}$

۳) ۴۳۵

۴) ۳۶۰

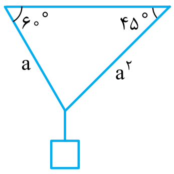
۷۴۲- یک بالن مطابق شکل به وسیلهٔ دو طناب به زمین بسته شده است. اگر طول یکی از طناب‌ها ۱۸ باشد، طول طناب دوم کدام است؟ $(\sin ۷۰^\circ = ۰/۹)$



۱) ۹ ۲) ۱۰

۳) ۱۱ ۴) ۱۲

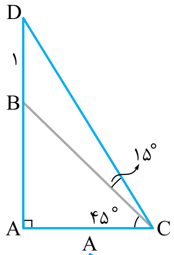
۷۴۳- جسمی با دو طناب مطابق شکل آویزان است. a کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

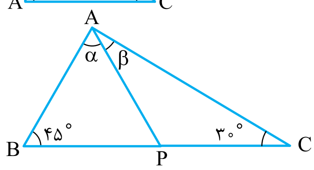
۷۴۴- در شکل مقابل اندازهٔ AB کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱$ ۴) $\sqrt{۳}+\frac{۱}{۲}$

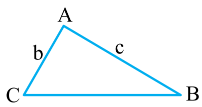
۷۴۵- در شکل مقابل $BP = ۲PC$ است. حاصل $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

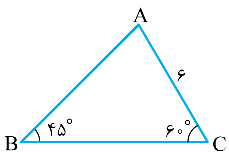
۷۴۶- در شکل مقابل، $b\cos\hat{C}+c\cos\hat{B}=۴$ و مساحت مثلث برابر ۱۶ است. اندازهٔ ارتفاع وارد بر ضلع BC چه‌قدر است؟



۱) ۴ ۲) ۸

۳) ۱۲ ۴) ۱۶

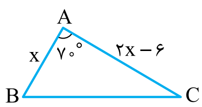
۷۴۷- مساحت شکل مقابل کدام است؟



۱) $\frac{۹\sqrt{۳}+۲۷}{۲}$ ۲) $\frac{۹\sqrt{۳}+۱۸}{۲}$

۳) $\frac{۱۸\sqrt{۳}+۹}{۲}$ ۴) $\frac{۱۸\sqrt{۳}+۲۷}{۲}$

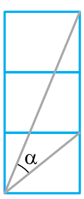
۷۴۸- مساحت مثلث ABC در شکل مقابل برابر ۳۶ است. x کدام است؟ $(\sin ۷۰^\circ = ۰/۹)$



۱) ۵ ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۸

۷۴۹- اندازهٔ ضلع هر مربع برابر ۱ واحد است. $\sin\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$

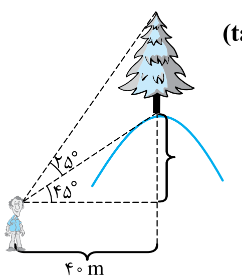
۷۵۰- در متوازی‌الاضلاعی اندازهٔ دو قطر ۱۰ و ۱۸ و زاویهٔ بین دو قطر ۱۵۰° است. مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۹۰ ۳) $۴۵\sqrt{۳}$ ۴) $۹۰\sqrt{۳}$

۷۵۱- اگر مساحت یک شش‌ضلعی منتظم برابر $۶\sqrt{۳}$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک آن کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۷۵۲- ناظری مطابق شکل به درختی که بر روی تپه‌ای قرار دارد نگاه می‌کند. ارتفاع درخت کدام است؟ $(\tan ۷۰^\circ = ۲/۷۵)$



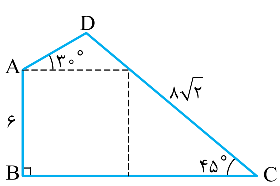
۱) ۴۰

۲) ۶۰

۳) ۷۰

۴) ۸۰

۷۵۳- در شکل مقابل، $CD = ۸\sqrt{۲}$ و $AB = ۶$ می‌باشد. طول AD کدام است؟



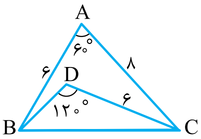
۱) ۳

۲) ۴

۳) $۳\sqrt{۲}$

۴) $۴\sqrt{۲}$

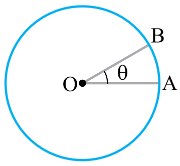
۷۵۴- در شکل مقابل، مساحت مثلث **BDC** چه‌قدر است؟



۱) $۶\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$
۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

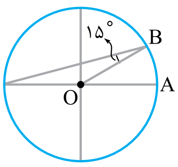
طول کمان و روابط قطاع

۷۵۵- در دایرهٔ شکل مقابل طول کمان **AB**، $\frac{۱}{۳}$ شعاع دایره است. زاویهٔ θ چند درجه است؟



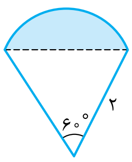
۱) $\frac{۶۰}{\pi}$ ۲) $\frac{۳۰}{\pi}$
۳) ۳۰ ۴) ۶۰

۷۵۶- شعاع دایرهٔ مقابل برابر ۱۲ است. اندازهٔ کمان **AB** کدام است؟



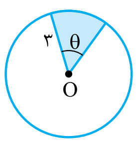
۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$
۳) π ۴) ۲π

۷۵۷- در شکل مقابل، مساحت قسمت رنگی کدام است؟



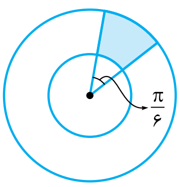
۱) $\frac{۴\pi}{۳}-۲\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{۲\pi}{۳}-\sqrt{۳}$
۳) $\frac{۲\pi}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۷۵۸- در شکل مقابل، محیط و مساحت قسمت رنگی از لحاظ عددی با هم برابر است. θ برحسب رادیان کدام است؟



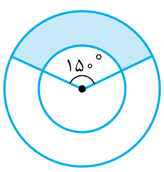
۱) ۳ ۲) ۴
۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

۷۵۹- در شکل مقابل، دو دایره هم‌مرکز و شعاع آن‌ها ۴ و ۸ است. مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟



۱) ۲π
۲) ۳π
۳) ۴π
۴) ۶π

۷۶۰- در شکل مقابل دو دایره هم‌مرکز و شعاع آن‌ها ۳ و ۸ است. محیط ناحیهٔ رنگی کدام است؟



۱) $۱۰+۲۵\frac{\pi}{۲}$ ۲) $۵+۲۵\frac{\pi}{۲}$
۳) $۵+\frac{۵۵\pi}{۶}$ ۴) $۱۰+\frac{۵۵\pi}{۶}$

دایرهٔ مثلثاتی

۷۶۱- انتهای کمان مربوط به زاویهٔ -۲۱۵° با انتهای کمان مربوط به کدام زاویهٔ زیر در یک ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی قرار ندارد؟

۱) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۲) $-\frac{۷\pi}{۶}$ ۳) $\frac{۱۳\pi}{۵}$ ۴) $-\frac{۱۱\pi}{۷}$

۷۶۲- دو زاویهٔ θ و -۴۹۰° در یک ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی قرار دارند. θ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۵\pi}{۶}$ ۲) $\frac{۴\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۱۷\pi}{۸}$ ۴) $\frac{۸\pi}{۵}$

۷۶۳- انتهای کمان مربوط به -۵۳۰° و α° در دایرهٔ مثلثاتی دو سر قطر دایره قرار گرفته‌اند. α کدام زاویه می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{\pi}{۱۸}$ ۲) $\frac{۱۷\pi}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱۹\pi}{۱۸}$ ۴) $\frac{۳۵\pi}{۱۸}$

۷۶۴- اگر سینوس ۱، ۲ و ۳ رادیان به ترتیب برابر **a**، **b** و **c** باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $a<b<c$ ۲) $c<b<a$ ۳) $a<c<b$ ۴) $c<a<b$

۷۶۵- کدام عدد مثبت است؟

۱) $\tan ۳$ ۲) $\cos ۴$ ۳) $\sin ۵$ ۴) $\cos ۶$

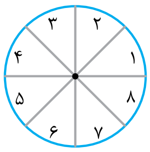
۷۶۶- انتهای کمان زوایای $\frac{\pi}{۳}+\frac{k\pi}{۴}$ رئوس کدام چندضلعی است؟ $(k\in\mathbb{N})$

۱) مربع ۲) شش‌ضلعی منتظم ۳) هشت‌ضلعی منتظم ۴) ۱۲ضلعی منتظم

۷۶۷- انتهای کمان‌های زاویهٔ $\theta=\frac{k\pi}{۶}+\frac{\pi}{۸}$ چند نقطه را روی دایرهٔ مثلثاتی نشان می‌دهد؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۷۶۸- در دایرهٔ مثلثاتی نیمسازهای نواحی اول و سوم و هم‌چنین دوم و چهارم را رسم کرده‌ایم. اگر $\sin\alpha\cos\alpha<۰$ و $\tan\alpha<\cot\alpha$ باشد، α در کدام‌یک از نواحی هشت‌گانهٔ شکل زیر قرار می‌گیرد؟



۱) ۳ یا ۷ ۲) ۲ یا ۶

۳) ۱ یا ۵ ۴) ۴ یا ۸

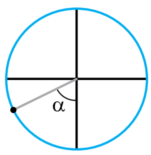
۷۶۹- اگر $\sin x<\cos x$ و $\tan x>\cot x$، زاویهٔ x برحسب رادیان کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۹\pi}{۸}$ ۲) $\frac{۱۳\pi}{۹}$ ۳) $\frac{۱۷\pi}{۱۰}$ ۴) $\frac{۲۳\pi}{۱۱}$

۷۷۰- نقطهٔ $P(\frac{۲}{۳},-\frac{\sqrt{۵}}{۳})$ روی دایرهٔ مثلثاتی انتهای کمان مربوط به زاویهٔ α می‌باشد. مقدار $\frac{\sin\alpha}{\cot\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۶}{۵}$ ۳) $-\frac{۵}{۶}$ ۴) $-\frac{۶}{۵}$

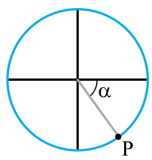
۷۷۱- مطابق شکل نقطهٔ $P(-\frac{۴}{۵},y)$ بر روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد. مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $-\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

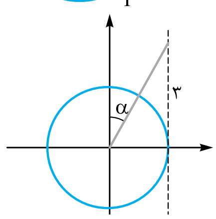
۷۷۲- مطابق شکل نقطهٔ $P(۳a,a-۱)$ روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد. $\sin\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$

۳) $-\frac{۳}{۵}$ ۴) $-\frac{۴}{۵}$

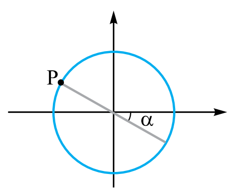
۷۷۳- در دایرهٔ مثلثاتی شکل مقابل مقدار $\cos\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۵}$

۳) $\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$

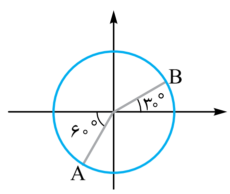
۷۷۴- اگر P روی دایرهٔ مثلثاتی بوده و $\tan\alpha=\frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل‌ضرب مختصات نقطهٔ P کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{۵}$ ۲) $-\frac{۲}{۵}$

۳) $-\frac{۳}{۵}$ ۴) $-\frac{۴}{۵}$

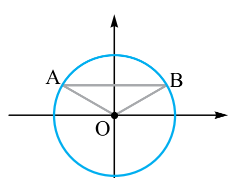
۷۷۵- در دایرهٔ مثلثاتی شکل مقابل، فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B از یکدیگر چه‌قدر است؟



۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$

۳) $\sqrt{۳+\sqrt{۲}}$ ۴) $\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$

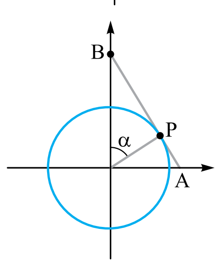
۷۷۶- در دایرهٔ مثلثاتی شکل زیر، AB موازی محور کسینوس‌ها و مساحت مثلث OAB برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ است. طول پاره‌خط AB کدام می‌تواند باشد؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۷۷۷- پاره‌خط AB در نقطهٔ P بر دایرهٔ مثلثاتی مماس شده است. اگر $BP=۳AP$ باشد، α کدام است؟

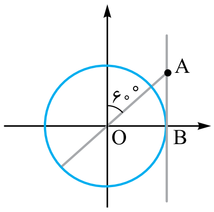


۱) ۶۰°

۲) ۶۵°

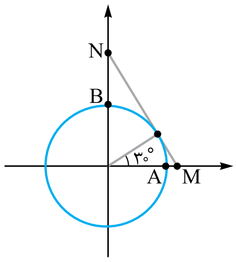
۳) ۷۰°

۴) ۷۵°



۷۷۸- در دایرهٔ مثلثاتی شکل مقابل، طول OA چه‌قدر است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۳) ۱
۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$



۷۷۹- در دایرهٔ مثلثاتی شکل مقابل MN بر دایره مماس است. حاصل $AM + BN$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱$
۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}+۱$

۷۸۰- در کدام ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی با افزایش زاویه، مقدار سینوس و کسینوس آن کاهش می‌یابد؟

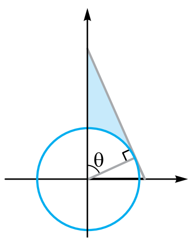
۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

۷۸۱- اگر $۰ < \alpha < ۱۲۰^\circ$ و $\sin\alpha = \frac{۲-m}{۳}$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $۲-\frac{۳\sqrt{۳}}{۲} < m < ۲$
۲) $\frac{۱}{۲} < m < ۲$
۳) $-۱ \le m < ۲$
۴) $-\frac{۱}{۲} \le m < ۲$

۷۸۲- اگر $\frac{\pi}{۶} < \theta < \frac{۲\pi}{۳}$ و $\cos ۲\theta = \frac{۳m+۱}{۲}$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳} < m < ۰$
۲) $-۱ \le m < ۰$
۳) $-\frac{۲}{۳} < m < \frac{\sqrt{۳}-۱}{۳}$
۴) $-۱ \le m < -\frac{۱}{۳}$



۷۸۳- در دایرهٔ مثلثاتی شکل مقابل مساحت قسمت رنگی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}(\tan\theta - \theta)$
۲) $\frac{۱}{۲}\tan\theta - \theta$
۳) $\frac{۱}{۲}(\tan\theta - \sin\theta)$
۴) $\frac{۱}{۲}\tan\theta - \sin\theta$

نسبت‌های مثلثاتی کمان‌های $\frac{k\pi}{۲} \pm \alpha$

۷۸۴- حاصل $\cos(\frac{\pi}{۲}+x)+\sin(\frac{\pi}{۲}+x)$ کدام است؟

۱) $\sin x + \cos x$
۲) $\sin x - \cos x$
۳) $\cos x - \sin x$
۴) $-\sin x - \cos x$

۷۸۵- اگر $۳\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x) = ۴\sin(x-\frac{\pi}{۲})$ باشد، $\cot x$ کدام است؟

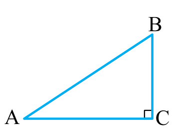
۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $-\frac{۴}{۳}$
۴) $-\frac{۳}{۴}$

۷۸۶- اگر $\cot(\theta+x)\tan(x-\frac{\pi}{۲}) = ۱$ باشد، θ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$
۲) π
۳) $\frac{\pi}{۴}$
۴) ۲π

۷۸۷- اگر α و β مکمل یکدیگر باشند، حاصل $\cos(\alpha - \frac{۳\pi}{۲})$ کدام است؟

۱) $\sin\beta$
۲) $-\sin\beta$
۳) $\cos\beta$
۴) $-\cos\beta$



۷۸۸- در شکل مقابل حاصل $\frac{\cot A - \cot B}{\tan A - \tan B}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) $\tan^۲ A$
۴) $\tan^۲ B$

۷۸۹- اگر برای هر x روابط $\sin(\alpha - x) = -\cos x$ و $\cos(\alpha + x) = \sin x$ برقرار باشد، α کدام زاویه می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$
۲) π
۳) $\frac{۳\pi}{۲}$
۴) $-\frac{۳\pi}{۲}$

۷۹۰- مثلث ABC در رأس A قائمه است. حاصل $\frac{\sin B\cos C}{\sin^2 C}$ کدام است؟

۱) $\tan^2 B$　　۲) $\tan^2 C$　　۳) $\cot^2 B$　　۴) $\tan C\cot B$

۷۹۱- اگر $\frac{\cos(x-\frac{\pi}{4})}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}=4$ باشد، حاصل $\tan(x-\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

۱) 4　　۲) $\frac{1}{4}$　　۳) -4　　۴) $-\frac{1}{4}$

۷۹۲- با فرض $\sin(x+\frac{5\pi}{12})+\cos(x-\frac{\pi}{12})=\frac{1}{3}$، حاصل $\cos(x+\frac{11\pi}{12})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$　　۲) $\frac{1}{6}$　　۳) $-\frac{1}{3}$　　۴) $-\frac{1}{6}$

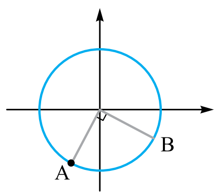
۷۹۳- اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}$ باشد، حاصل $\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+2\beta)}$ کدام است؟

۱) 1　　۲) -1　　۳) $\sqrt{3}$　　۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۷۹۴- اگر $\alpha=\frac{\pi}{16}$ باشد، حاصل $\frac{\sin 3\alpha\cot 6\alpha}{\tan 2\alpha\cos 5\alpha}$ کدام است؟

۱) 1　　۲) -1　　۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　۴) $\frac{1}{3}$

۷۹۵- اگر A انتهای کمان مربوط به زاویهٔ 240° و B انتهای کمان زاویهٔ θ در دایرهٔ مثلثاتی شکل مقابل باشد، $\tan\theta$ کدام است؟



۱) -1　　۲) $-\frac{1}{2}$　　۳) $-\sqrt{3}$　　۴) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

۷۹۶- مقدار $\cos 570^\circ$ با کدام عدد برابر است؟

۱) $\frac{1}{2}$　　۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　۳) $-\frac{1}{2}$　　۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۷۹۷- حاصل عبارت $\cos\frac{16\pi}{3}\sin(-\frac{19\pi}{6})+\tan\frac{17\pi}{4}\sin\frac{11\pi}{6}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$　　۲) $-\frac{1}{4}$　　۳) $\frac{3}{4}$　　۴) $-\frac{3}{4}$

۷۹۸- حاصل $\cos(k\pi-\alpha)$ با فرض $k\in\mathbb{Z}$ کدام است؟

۱) $(-1)^k\cos\alpha$　　۲) $(-1)^{k+1}\cos\alpha$　　۳) $(-1)^k\sin\alpha$　　۴) $(-1)^{k+1}\sin\alpha$

۷۹۹- حاصل $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\dots+\cos\frac{6\pi}{7}$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) 1　　۳) -1　　۴) $-\frac{1}{2}$

۸۰۰- مقدار عددی عبارت $A=\sin\frac{10\pi}{3}\cos\frac{11\pi}{6}+\tan\frac{7\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$　　۲) $-\frac{1}{4}$　　۳) $\frac{7}{4}$　　۴) $-\frac{7}{4}$

۸۰۱- با فرض $\tan 20^\circ=0/36$ حاصل $\frac{\cos 20^\circ}{\sin 70^\circ+\cos 70^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{16}{25}$　　۲) $\frac{25}{34}$　　۳) $\frac{25}{16}$　　۴) $\frac{34}{25}$

۸۰۲- اگر $\tan 25^\circ=0/46$ باشد، حاصل $\frac{2\sin 205^\circ-\cos 155^\circ}{\cos 295^\circ+\sin 115^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{27}$　　۲) $\frac{4}{73}$　　۳) $-\frac{4}{27}$　　۴) $-\frac{4}{73}$

۸۰۳- هرگاه $\tan\alpha=2$ و $\frac{\sin(270^\circ-\alpha)+k\cos(\alpha+180^\circ)}{2\cos(\alpha+90^\circ)-\cos(\alpha-180^\circ)}=3$ مقدار k کدام است؟

۱) 5　　۲) 8　　۳) 10　　۴) 14

اتحادهای مثلثاتی مقدماتی

۸۰۴- اگر $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$ و انتهای کمان θ در ناحیهٔ چهارم باشد، حاصل $\cot\theta-\tan\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) $\frac{10}{3}$ ۳) $-\frac{8}{3}$ ۴) $-\frac{10}{3}$

۸۰۵- با فرض $\frac{2}{\cos\alpha}+\frac{3}{\sin\alpha}=0$ حاصل $6\tan\alpha-12\cot\alpha$ کدام است؟

۱) صفر ۲) 1 ۳) -1 ۴) $-\frac{3}{2}$

۸۰۶- اگر θ منفرجه و $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=2$ باشد، حاصل $\cot(\theta+\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۲) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $-2\sqrt{2}$

۸۰۷- اگر $3\sin x+\cos(x+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}$ و انتهای کمان x در ناحیهٔ دوم باشد، مقدار $\cos x$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{63}}{8}$ ۳) $-\frac{\sqrt{15}}{4}$ ۴) $-\frac{\sqrt{63}}{8}$

۸۰۸- اگر $\cot(\frac{\pi}{2}-x)=3$ و انتهای کمان x در ناحیهٔ دوم مثلثاتی باشد، مقدار $\cos(x-\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ۲) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ۳) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ ۴) $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

۸۰۹- اگر $3\cos(\pi-x)-2\sin(x+\frac{\pi}{2})=1$ باشد، مقدار $2\sin(\pi+x)+\cos(\frac{\pi}{2}-x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ۳) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ ۴) $\frac{3\sqrt{5}}{7}$

۸۱۰- اگر $\tan\alpha=\frac{5}{12}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت $\sin(\frac{7\pi}{2}-\alpha)\cos(\frac{11\pi}{2}+\alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{65}{144}$ ۲) $\frac{60}{169}$ ۳) $-\frac{65}{144}$ ۴) $-\frac{60}{169}$

۸۱۱- با فرض $\frac{2\tan\alpha+\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}{\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)-2\cot(\pi-\alpha)}=\frac{3}{2}$ مقدار $\sin\alpha$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۲) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ۳) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۸۱۲- حاصل عبارت $\frac{1}{1+\cot 60^\circ}+\frac{1}{1+\tan 60^\circ}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) 2

۸۱۳- اگر $\tan\alpha=\frac{1}{3k-1}$ و $\cot\alpha=4k+2$ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) 3 ۳) -3 ۴) $-\frac{2}{3}$

۸۱۴- اگر $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$ باشد، حاصل عبارت $\cot^2 x(\cos x-\frac{1}{\cos x})\sqrt{1+\tan^2 x}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۸۱۵- با فرض $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$، حاصل $\frac{2\sin^2\frac{\pi}{4}-\cos^2 x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$ کدام است؟

۱) $\sin x$ ۲) $-\sin x$ ۳) $\sin^3 x$ ۴) $-\sin^3 x$

۸۱۶- اگر $\frac{\sin\theta+2\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=2$ باشد، حاصل $\cot(\frac{3\pi}{2}+\theta)$ کدام است؟

۱) 4 ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) -4 ۴) $-\frac{1}{4}$

۸۱۷- اگر $7\sin^2 x+3\cos^2 x=5$ باشد، حاصل $\tan^2 x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 2 ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) 1

۸۱۸- اگر $\sin^{۲}(\alpha-\frac{\pi}{۳})+\sin^{۲}(\beta+\frac{\pi}{۴})=۱$ باشد، حاصل $\alpha+\beta$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۵\pi}{۱۲}$ ۲) $\frac{۷\pi}{۱۲}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۲\pi}{۳}$

۸۱۹- با فرض $\tan\alpha=۳$، حاصل $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos^{۳}\alpha}$ کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۲ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

۸۲۰- با فرض $\frac{۲}{۱-\sin x}=\frac{۱}{\cos x}$، مقدار $\tan x$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

۸۲۱- اگر $\tan x=۲$ باشد، حاصل $\sin^{۴}x+\cos^{۴}x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۶}{۲۵}$ ۲) $\frac{۱۷}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱۸}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱۹}{۲۵}$

۸۲۲- با فرض $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha}=۲$ حاصل $\sin^{۴}\alpha-\cos^{۴}\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۸۲۳- با فرض $\frac{۱}{\cos x}=۲\sin x$ حاصل $\sin^{۶}x+\cos^{۶}x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۸۲۴- اگر $\sin\theta-\cos\theta=\frac{۱}{۳}$ باشد، مقدار $\sqrt{\sin^{۴}\theta+\cos^{۴}\theta}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۹}$ ۲) $\frac{۷}{۹}$ ۳) $\frac{\sqrt{۹۷}}{۹}$ ۴) $\frac{۸}{۹}$

۸۲۵- با فرض $\sin\theta+\cos\theta=\frac{۱}{۴}$ حاصل $\sin^{۳}\theta+\cos^{۳}\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{۴۷}{۱۲۸}$ ۲) $\frac{۴۹}{۱۲۸}$ ۳) $-\frac{۴۳}{۱۲۸}$ ۴) $-\frac{۴۵}{۱۲۸}$

۸۲۶- با فرض $\sin x\cos x=\frac{۱}{۴}$ حاصل $\tan^{۲}x+\cot^{۲}x$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۸۲۷- با فرض $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۲۵}{۸}$ حاصل $|\sin\alpha-\cos\alpha|$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۸۲۸- تساوی $\frac{۱}{\cos^{۴}x}-\frac{۱}{\cos^{۲}x}=a\tan^{۲}x+b\tan^{۴}x$ برای $x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}$ برقرار است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲-

اتحادهای مثلثاتی کمان ۲α

۸۲۹- اگر $\cos(\pi+\theta)+\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)=\frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل $\sin ۲\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۸}{۹}$ ۳) $-\frac{۴}{۹}$ ۴) $-\frac{۸}{۹}$

۸۳۰- اگر $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{۷}}{۳}$ و انتهای کمان α در ناحیهٔ چهارم باشد، مقدار $\cos ۲\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $-\frac{۵}{۹}$ ۴) $-\frac{۴}{۹}$

۸۳۱- اگر $\cos\alpha=-\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ و انتهای کمان α در ناحیهٔ سوم باشد، حاصل $\sin ۲\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۹}$ ۲) $-\frac{۲\sqrt{۲}}{۹}$ ۳) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۹}$ ۴) $-\frac{۴\sqrt{۲}}{۹}$

۸۳۲- اگر $\tan\alpha=\frac{۱}{۲}$ و انتهای کمان α در ناحیهٔ سوم باشد، $\cos ۲\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $-\frac{۳}{۵}$ ۴) $-\frac{۴}{۵}$

۸۳۳- با فرض $\sin\theta+\cos\theta=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$، مقدار $\sin ۲\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۹}{۱۰}$ ۳) $-\frac{۹}{۱۰}$ ۴) $-\frac{۱}{۱۰}$

۸۳۴- اگر θ حاده و $\sin ۲\theta = ۰/۶۹$ باشد، مقدار $\sin\theta + \cos\theta$ چه‌قدر است؟

۱) $۱/۱$ ۲) $۱/۲$ ۳) $۱/۳$ ۴) $۱/۴$

۸۳۵- با فرض $P = \frac{\sin^۲\alpha}{۱-\cos\alpha} - \frac{\cos^۲\alpha}{۱+\sin\alpha}$، حاصل $P^۲ - ۱$ کدام است؟

۱) $\cos ۲\alpha$ ۲) $-\cos ۲\alpha$ ۳) $\sin ۲\alpha$ ۴) $-\sin ۲\alpha$

۸۳۶- با فرض $\frac{۱}{۳} = \frac{۳-\tan\alpha}{۴+۲\tan\alpha}$ مقدار $\sin^۲\alpha - \cos ۲\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

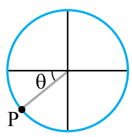
۸۳۷- با فرض $\sin\theta = \frac{\sqrt{۷}}{۴}$ مقدار $\cos ۴\theta$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۳۱}{۳۲}$ ۲) $-\frac{۳۱}{۳۲}$ ۳) $\frac{۶۳}{۶۴}$ ۴) $-\frac{۶۳}{۶۴}$

۸۳۸- اگر $\sin^۲\theta < \sin\theta$ و $\sin ۲\theta < ۰$ باشد، انتهای کمان θ در کدام ناحیهٔ مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۸۳۹- نقطهٔ $P(x, x+\frac{۱}{۵})$ مطابق شکل زیر روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد. حاصل $\sin ۲\theta$ کدام است؟



۱) $\frac{۱۲}{۲۵}$ ۲) $\frac{۲۴}{۲۵}$

۳) $-\frac{۱۲}{۲۵}$ ۴) $-\frac{۲۴}{۲۵}$

۸۴۰- اگر α در ناحیهٔ دوم مثلثاتی واقع باشد به طوری که $\sin\alpha = ۰/۸$، حاصل $\frac{۱-\cos(\pi+۲\alpha)}{۱+\cos(\frac{\pi}{۲}-۲\alpha)}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۸ ۳) $\frac{۹}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۸}{۱۳}$

۸۴۱- با فرض $\sin(\alpha - \frac{\pi}{۶}) = \frac{۱}{\sqrt{۵}}$ حاصل $\sin(۲\alpha + \frac{\pi}{۶})$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $-\frac{۴}{۵}$ ۴) $-\frac{۳}{۵}$

۸۴۲- اگر $۴\cos^۲ x - \sin^۲ x = \frac{۱}{۴}$ باشد، مقدار $\cos ۲x$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

۸۴۳- با فرض $۲\cos(x - \frac{\pi}{۵}) + \sin(x + \frac{۳\pi}{۱۰}) = ۱$ حاصل $\cos(\frac{۲\pi}{۵} - ۲x)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۹}$ ۲) $\frac{۷}{۹}$ ۳) $-\frac{۳}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

۸۴۴- اگر $\sqrt{۲}\sin x - ۲\cos x = \sqrt{۳}$ باشد، حاصل $\tan ۲x$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

۸۴۵- اگر $\cos ۷۵^\circ = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{۴}$ و $a, b \in \mathbb{N}$ باشد، $a - b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۸۴۶- مقدار عددی $\sin\frac{۳\pi}{۸}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}$ ۳) $\sqrt{\sqrt{۳}-۱}$ ۴) $\frac{\sqrt{\sqrt{۳}+۱}}{۲}$

۸۴۷- اگر $\theta = ۱۱/۲۵^\circ$ باشد، حاصل $A = \sin^۳\theta\cos\theta - \cos^۳\theta\sin\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۸}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۸}$

۸۴۸- با فرض $\frac{۱+\cos\theta}{\sin\theta} = ۳$ حاصل $\tan(\frac{\theta}{۲} - \frac{\pi}{۲})$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۸۴۹- اگر زاویهٔ θ منفرجه و $۱+\cos\theta = \cos\frac{\theta}{۲}$ باشد، مقدار $\tan ۲\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $-\sqrt{۳}$

۸۵۰- با فرض $\tan ۲x = \frac{۱}{۳}$، حاصل $\tan x - \cot x$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) -۶ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

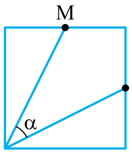
۸۵۱- حاصل عبارت $\sin^4\frac{\pi}{12}+\sin^4\frac{5\pi}{12}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{7}{8}$

۸۵۲- در تابع $f(x)=\sin^6x+\cos^6x$، حاصل $f(\frac{\pi}{8})$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{5}{8}$ ۳) $\frac{3}{16}$ ۴) $\frac{13}{16}$

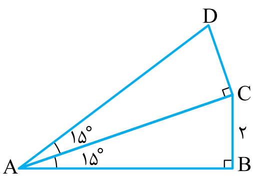
۸۵۳- در شکل مقابل M و N وسط اضلاع مربع هستند. مقدار $\sin2\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{21}{25}$ ۲) $\frac{2\sqrt{6}}{25}$

۳) $\frac{24}{25}$ ۴) $\frac{4\sqrt{21}}{25}$

۸۵۴- در شکل مقابل طول AD کدام است؟



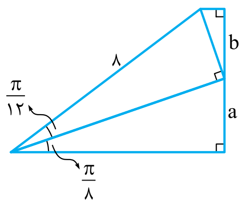
۱) ۴

۲) $2\sqrt{3}$

۳) ۸

۴) $4\sqrt{3}$

۸۵۵- در شکل مقابل حاصل ab کدام است؟



۱) $2\sqrt{2}$

۲) $4\sqrt{2}$

۳) $\sqrt{3}$

۴) $2\sqrt{3}$

دورهٔ تناوب

۸۵۶- دورهٔ تناوب تابع $y=1+2\cos(2\pi x)$ چند برابر دورهٔ تناوب تابع $y=2-3\sin\frac{\pi}{3}x$ است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۶ ۴) $\frac{1}{6}$

۸۵۷- اگر دورهٔ تناوب تابع $y=3\sin\frac{\pi}{a}x$ برابر ۴ باشد، دورهٔ تناوب تابع $y=1+\tan(a\pi x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $\frac{1}{4}$

۸۵۸- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\sin x\sin(x+\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) 2π

۸۵۹- دورهٔ تناوب تابع $y=\tan3x-\cot3x$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) π

۸۶۰- اگر $f(x)=\cos2x$ باشد، دورهٔ تناوب تابع $y=f(x+\frac{\pi}{2})f(x-\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) 2π

۸۶۱- دورهٔ تناوب $f(x)=4\sin^2ax$ نصف دورهٔ تناوب تابع $g(x)=\tan\frac{3}{4}x$ است. مقدار مثبت a کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۸۶۲- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=5\sin^2\frac{\pi}{6}x$ برابر دورهٔ تناوب $g(x)=\tan\frac{2\pi}{3a}x$ است. مقدار مثبت a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۸۶۳- اگر $T=3$ دورهٔ تناوب تابع $y=f(6ax)$ باشد، دورهٔ تناوب تابع $y=6f(\frac{a}{3}x)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) ۱۸ ۴) ۵۴

تابع سینوس و کسینوس

۸۶۴- در تابع $f(x)=5-3\sin\pi x$ مجموع ماکزیمم و مینیمم تابع چند برابر دورهٔ تناوب است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۸۶۵- دورهٔ تناوب، ماکزیمم و مینیمم تابع مثلثاتی f، به ترتیب $\frac{\pi}{۶}$، ۴ و ۲- است. ضابطهٔ f کدام می‌تواند باشد؟

۱) $f(x)=۳\sin۶x+۱$ ۲) $f(x)=۳\cos۱۲x-۱$ ۳) $f(x)=۱-۳\cos۱۲x$ ۴) $f(x)=۱-۳\sin۶x$

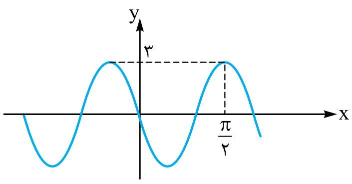
۸۶۶- دورهٔ تناوب تابع $y=۱+a\sin(\frac{a\pi}{۳}x)$ برابر ۴ است. اختلاف مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع چه‌قدر است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۴ ۴) ۲

۸۶۷- در تابع $y=\frac{a}{۲}\cos(۳ax)$، حاصل‌ضرب دورهٔ تناوب در اختلاف مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن چه‌قدر است؟

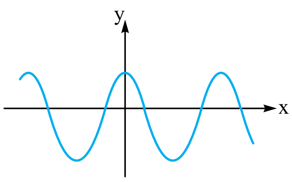
۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۴\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۸\pi}{۳}$

۸۶۸- قسمتی از نمودار تابع f به صورت مقابل است. ضابطهٔ f کدام می‌تواند باشد؟



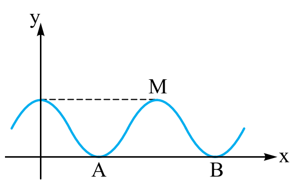
۱) $y=۳\sin۳x$
۲) $y=-۳\sin۵x+۶$
۳) $y=۳\sin۵x$
۴) $y=-۳\sin۳x$

۸۶۹- نمودار کدام تابع به صورت مقابل است؟



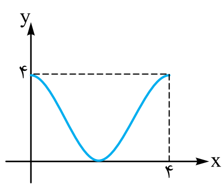
۱) $y=۲\cos\frac{\pi}{۲}x-۱$ ۲) $y=-۲\cos\frac{\pi}{۲}x+۱$
۳) $y=۲\cos\frac{\pi}{۲}x+۱$ ۴) $y=-۲\cos\frac{\pi}{۲}x-۱$

۸۷۰- قسمتی از نمودار تابع $y=۳-۳\sin\frac{\pi}{۴}x$ شکل روبه‌رو است. مساحت مثلث با رئوس M، A و B کدام است؟



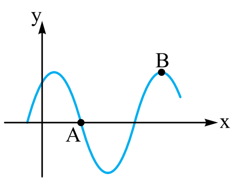
۱) ۲۱
۲) ۱۸
۳) ۲۴
۴) ۱۵

۸۷۱- نمودار تابع مثلثاتی f در بازهٔ $[۰,۴]$ به صورت مقابل است. ضابطهٔ f کدام می‌تواند باشد؟



۱) $۲+۲\cos\frac{\pi}{۲}x$ ۲) $۲+۲\cos\pi x$
۳) $۲-۲\cos\frac{\pi}{۲}x$ ۴) $۲-۲\cos\pi x$

۸۷۲- قسمتی از نمودار تابع $y=۳\cos(۲x-\frac{\pi}{۴})$ به صورت مقابل است. اختلاف طول نقاط A و B چه‌قدر است؟



۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$
۳) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۴\pi}{۳}$

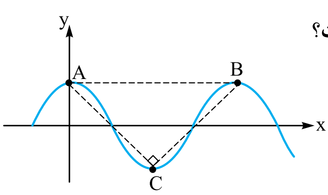
۸۷۳- در نمودار تابع $f(x)=۳\sin\frac{\pi}{۴}x$ خطی که یکی از نقاط ماکزیمم را به یکی از نقاط مینیمم وصل می‌کند، دارای بیشترین شیب است. شیب این خط کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۸۷۴- تابع $f(x)=۳-\cos(۴x+\frac{\pi}{۶})$ در بازهٔ $(۰,k)$ صعودی است. حداکثر k کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۱۲}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۲۴}$ ۴) $\frac{۷\pi}{۲۴}$

۸۷۵- قسمتی از نمودار $y=a\cos\frac{\pi}{۲}x$ رسم شده است. اگر مثلث ABC در رأس C قائمه باشد، a کدام است؟

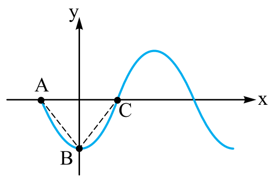


۱) ۱ ۲) ۲
۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۸۷۶- نقاط A و B بر نقاط ماکزیمم و نقطهٔ C بر نقطهٔ مینیمم تابع $f(x)=a\cos ax$ واقع شده‌اند. حداقل مساحت مثلث ABC چه‌قدر است؟

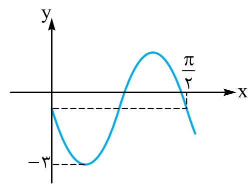
۱) $\frac{۴\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) ۴π ۴) ۲π

۸۷۷- شکل مقابل نمودار تابع $y = a\cos a\pi x$ است. اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، a کدام است؟



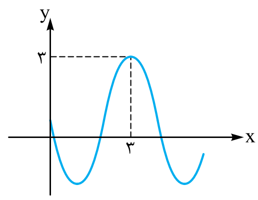
۱) $\sqrt[۴]{\frac{۳}{۲}}$
۲) $\sqrt[۴]{\frac{۳}{۴}}$
۳) $-\sqrt[۴]{\frac{۳}{۲}}$
۴) $-\sqrt[۴]{\frac{۳}{۴}}$

۸۷۸- نمودار تابع $y = a\sin bx - ۱$ به صورت مقابل است. $\frac{a}{b}$ کدام است؟



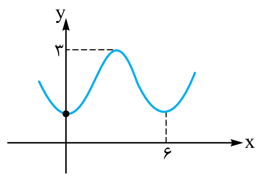
۱) ۱
۲) -۱
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $-\frac{۱}{۲}$

۸۷۹- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a\sin(b\pi x) + ۱$ به صورت مقابل است. ab کدام است؟



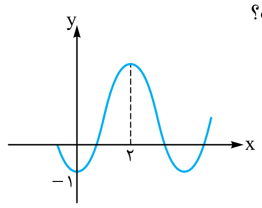
۱) ۱
۲) -۱
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $-\frac{۱}{۳}$

۸۸۰- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a - \cos b\pi x$ است. مقدار y در نقطهٔ $x = ۸/۵$ کدام است؟



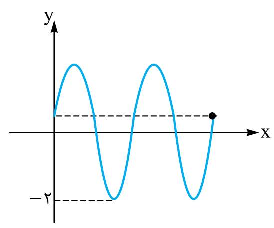
۱) $۲ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $۲ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{۵}{۲}$

۸۸۱- قسمتی از نمودار تابع $y = ۲ + a\cos b\pi x$ به صورت زیر است. مقدار ماکزیمم چند برابر دورهٔ تناوب تابع است؟



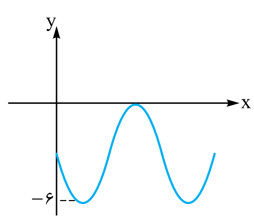
۱) ۰/۸
۲) ۱
۳) ۱/۲۵
۴) ۲/۵

۸۸۲- شکل مقابل نمودار تابع $y = ۱ + a\sin(b\pi x)$ در بازهٔ $(۰, \frac{۴}{۵})$ است. بیشترین مقدار $a + b$ کدام است؟



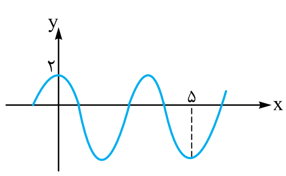
۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۲
۳) $\frac{۱۱}{۲}$
۴) ۸

۸۸۳- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b\sin\frac{\pi}{۳}x$ به صورت مقابل است. مقدار $f(\frac{۹}{۲})$ کدام است؟



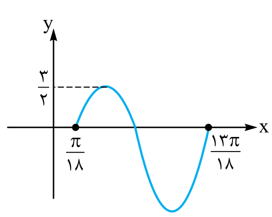
۱) صفر
۲) -۲
۳) -۳
۴) -۴

۸۸۴- بخشی از نمودار تابع $f(x) = a\cos b\pi x - ۲$ به صورت مقابل است. $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟



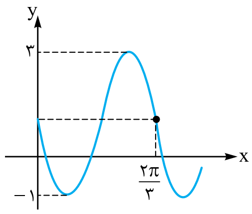
۱) ۳/۴
۲) ۳/۵
۳) ۴/۵
۴) ۴/۴

۸۸۵- قسمتی از نمودار تابع $y = a - ۳\sin bx$ به صورت مقابل است. حاصل ۲ab کدام است؟



۱) ۹
۲) ۱۸
۳) -۹
۴) -۱۸

۸۸۶- نمودار تابع $y = a\sin bx + c$ به صورت مقابل است. حاصل $ab - c$ کدام است؟



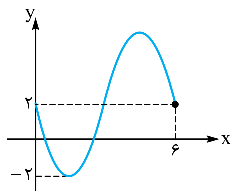
۱) ۵

۲) -۵

۳) -۷

۴) ۷

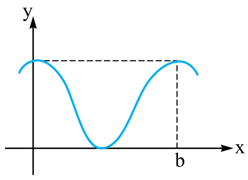
۸۸۷- نمودار تابع $f(x) = a\cos\pi(bx + \frac{۳}{۲}) + c$ در یک دورهٔ تناوب آن به صورت مقابل است. حاصل abc کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$

۳) $-\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۸}{۳}$

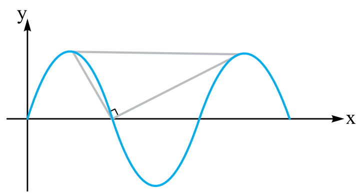
۸۸۸- قسمتی از نمودار $f(x) = a + b\cos\frac{۲\pi a}{۹}x$ به شکل روبه‌رو است. حاصل $f(a)$ کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۶

۳) ۹ ۴) ۱۲

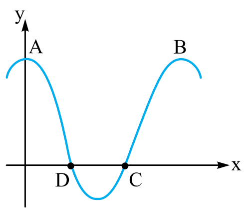
۸۸۹- در شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin(۲\pi x)$ رسم شده است. به ازای کدام مقدار a، مثلث رنگی، قائم‌الزاویه است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۸۹۰- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = ۱ + ۲\cos(\pi x)$ به صورت مقابل است. مساحت چهارضلعی ABCD کدام است؟



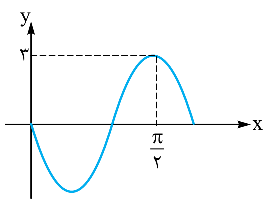
۱) ۲

۲) $\frac{۸}{۳}$

۳) ۸

۴) ۴

۸۹۱- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a\sin bx\cos bx$ به صورت مقابل است. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟



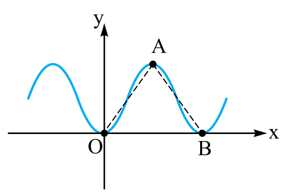
۱) ۲

۲) ۴

۳) -۴

۴) -۲

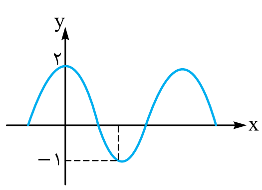
۸۹۲- نمودار تابع $y = ۲\sin^۲ x$ به صورت مقابل است. مساحت مثلث OAB کدام است؟



۱) π ۲) $\frac{\pi}{۲}$

۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) ۲π

۸۹۳- قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\sin^۲ x$ به صورت مقابل است. حاصل $a - b$ کدام است؟



۱) صفر ۲) -۴

۳) ۵ ۴) ۱

۸۹۴- نمودار تابع $y = |\sin x|$ در بازهٔ $[\pi, ۲\pi]$ بر نمودار کدام تابع زیر منطبق است؟

۱) $y = \cos(\frac{\pi}{۲} + x)$ ۲) $y = \sin(\pi - x)$ ۳) $y = \sin(\frac{۳\pi}{۲} + x)$ ۴) $y = \cos(\frac{۳\pi}{۲} + x)$

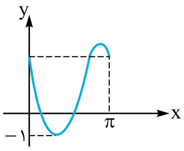
۸۹۵- نمودار تابع $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{۶})$ بر نمودار تابع $g(x) = \sin(x + \theta)$ منطبق است. θ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۴\pi}{۳}$

۸۹۶- نمودار تابع $f(x)=\sin(۳x-\pi)$ بر نمودار $g(x)=\cos(ax+b)$ منطبق است. زوج مرتب (a,b) کدام می‌تواند باشد؟

۱) $(۳,\frac{۳\pi}{۲})$ ۲) $(۱,\frac{\pi}{۲})$ ۳) $(۱,-\frac{۳\pi}{۲})$ ۴) $(۳,-\frac{۳\pi}{۲})$

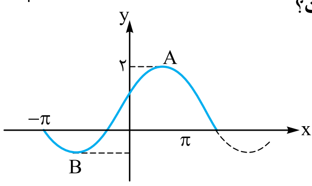
۸۹۷- قسمتی از نمودار تابع $y=a+۲\sin(bx-\frac{\pi}{۳})$ به صورت مقابل است. مقدار $a-b$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) -۱

۳) ۳ ۴) -۳

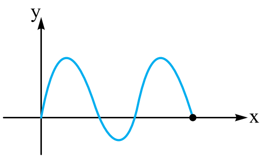
۸۹۸- نمودار تابع $f(x)=a-b\sin(x+\frac{\pi}{۶})$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ به صورت زیر است. شیب پاره‌خط AB کدام است؟



۱) $\frac{۳}{\pi}$ ۲) $\frac{۱}{\pi}$

۳) $\frac{۲}{۳\pi}$ ۴) $\frac{۸}{۳\pi}$

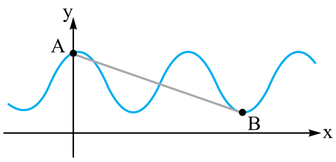
۸۹۹- نمودار تابع $f(x)=۱+a\cos(bx-\frac{\pi}{۳})$ در بازهٔ $[۰,\frac{۵\pi}{۳}]$ به صورت مقابل است. مقدار b کدام است؟



۱) $\frac{۱۲}{۵}$ ۲) $\frac{۸}{۵}$

۳) $-\frac{۷}{۵}$ ۴) -۲

۹۰۰- قسمتی از نمودار تابع $y=\sin^۶ x+\cos^۶ x$ به صورت مقابل است. شیب پاره‌خط AB کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{\pi}$ ۲) $-\frac{۲}{\pi}$

۳) $-\frac{۳}{\pi}$ ۴) $-\frac{۴}{\pi}$

تابع تانژانت

۹۰۱- انتهای کمان α در کدام ناحیه از دایرهٔ مثلثاتی قرار داشته باشد تا با افزایش α مقدار $\cos\alpha$ و $\tan\alpha$، افزایش یابد، ولی مقدار $|\tan\alpha|$ کاهش یابد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۹۰۲- اگر $\frac{\pi}{۸}<\theta<\frac{۳\pi}{۸}$ و $\theta\neq\frac{\pi}{۴}$ و $\tan ۲\theta=\frac{۱}{۳m-۱}$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $(۰,\frac{۲}{۳})-\{\frac{۱}{۳}\}$ ۲) $(-\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})-\{\frac{۱}{۳}\}$ ۳) $\mathbb{R}-[۰,\frac{۲}{۳}]$ ۴) $\mathbb{R}-[-\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳}]$

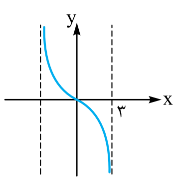
۹۰۳- به ازای چند عدد حقیقی در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ تابع $f(x)=\tan\frac{۳x}{۴}$ تعریف نشده است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹۰۴- تابع $f(x)=۲-\tan(\pi-\frac{۲}{۳}x)$ در بازهٔ $(k,۰)$ اکیداً یکنوا است. کم‌ترین مقدار k کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{۲}$ ۲) $-\frac{\pi}{۳}$ ۳) $-\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) $-\frac{۳\pi}{۴}$

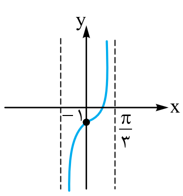
۹۰۵- بخشی از نمودار تابع $f(x)=\cot\pi(\frac{۳}{۲}+ax)$ به صورت مقابل است. a کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۶}$

۹۰۶- قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a+\tan(\frac{\pi}{۴}+bx)$ به شکل روبه‌رو است. مقدار $a-b$ کدام است؟



۱) $-\frac{۱۱}{۶}$ ۲) $-\frac{۱۱}{۴}$

۳) $-\frac{۷}{۴}$ ۴) $-\frac{۵}{۶}$

۹۰۷- تابع $y=۳\tan(\frac{\pi}{۳}-۲x)$ در بازهٔ $(-a,a)$ اکیداً نزولی است. حداکثر a کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) π

معادلات مثلثاتی

۹۰۸- اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جواب معادلهٔ $۲\sin ۲x=-۱$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ چه‌قدر است؟

۱) π ۲) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۴\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۹۰۹- مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $4\cos^2 x = 1$ در بازهٔ $(0, 2\pi)$ کدام است؟

۱) 2π ۲) 3π ۳) 4π ۴) 5π

۹۱۰- یکی از جواب‌های معادلهٔ $k\cos 2x + \sqrt{3} = 0$ برابر $\frac{5\pi}{12}$ است.بزرگ‌ترین جواب این معادله در بازهٔ $(0, 2\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{7\pi}{12}$ ۲) $\frac{13\pi}{12}$ ۳) $\frac{17\pi}{12}$ ۴) $\frac{19\pi}{12}$

۹۱۱- جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{3})\cos(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) $k\pi - \frac{\pi}{12}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{12}$ ۳) $2k\pi - \frac{\pi}{6}$ ۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{12}$

۹۱۲- مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{6}) + \cos(x - \frac{\pi}{3}) = 1$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{2\pi}{3}$ ۲) $\frac{8\pi}{3}$ ۳) 2π ۴) $\frac{3\pi}{2}$

۹۱۳- جواب کلی معادلهٔ $\cos(x - \frac{\pi}{4})\cos(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{4}$ کدام است؟

۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۲) $k\pi + \frac{2\pi}{3}$ ۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{12}$ ۴) $k\pi + \frac{5\pi}{12}$

۹۱۴- جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin 3x + \sin x = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{2}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ۳) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ۴) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$

۹۱۵- معادلهٔ $\cos 2x + \cos x = 0$ در بازهٔ $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹۱۶- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin 3x + \cos x = 0$ در بازهٔ $[0, \pi]$ کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{5\pi}{2}$

۹۱۷- مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2(x - \frac{\pi}{4}) + \sin(x + \pi) = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۱) 2π ۲) 3π ۳) 4π ۴) 5π

۹۱۸- جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 1 = 0$ به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ ۲) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

۹۱۹- جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin 4x + \sin 3x}{1 + \cos x} = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{2k\pi}{7}$ ۲) $k\pi + \frac{2k\pi}{7}$ ۳) $\frac{5k\pi}{7}$ ۴) $k\pi - \frac{2k\pi}{7}$

۹۲۰- اختلاف جواب‌های معادلهٔ $\sin x(2\sin x - 9) = 5$ در بازهٔ $(0, 2\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) π ۴) $\frac{4\pi}{3}$

۹۲۱- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin^2 x + \cos x = \frac{1}{4}$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چه‌قدر است؟

۱) π ۲) 2π ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{5\pi}{2}$

۹۲۲- جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$ کدام است؟

۱) $\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{5\pi}{6} \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{7\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{11\pi}{6} \end{cases}$

۹۲۳- جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x - 2\sin^2 x = 0$ کدام است؟

۱) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ ۴) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$

۹۲۴- جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin(\frac{\pi}{2} + x)\cos(\pi + x) + 2\cos(x - \pi) = 1$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $k\pi$ ۲) $2k\pi$ ۳) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ۴) $2k\pi - \pi$

۹۲۵- جواب کلی معادلهٔ $\frac{\cos x(۲\cos x+۱)-۱}{\sin x}=۰$ کدام است؟

۱) $۲k\pi+\frac{\pi}{۳}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{۳}$ ۳) $k\pi-\frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$

۹۲۶- اگر $x=\frac{۵\pi}{۶}$ یک ریشهٔ معادلهٔ $\cos ۲x+a\sin x=۰$ باشد، مجموع ریشه‌های متمایز آن در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

۱) π ۲) ۲π ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۲}$

۹۲۷- معادلهٔ $\sin x=\frac{۱}{\sin x-\cos x}$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۲۸- جواب‌های معادلهٔ $\frac{\cos x}{\sin ۲x}=\frac{\sin x}{\cos ۲x}$ بر روی دایرهٔ مثلثاتی رئوس کدام چندضلعی هستند؟

۱) مستطیل (غیرمربع) ۲) مربع ۳) ذوزنقه ۴) شش‌ضلعی منتظم

۹۲۹- اگر θ کوچک‌ترین ریشهٔ مثبت معادلهٔ $\cos ۲x=۵\cos x-۳$ باشد، مقدار $\cos(\theta-\frac{\pi}{۳})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۹۳۰- معادلهٔ $\sin ۳x+\cos ۳x=-۱$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹۳۱- جواب کلی معادلهٔ $۱+\cot^۲ x=۸\cos^۲ x$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۲}\pm\frac{\pi}{۸}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{۴}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}$

۹۳۲- نقطهٔ انتهایی کمان‌های جواب‌های معادلهٔ $\frac{\sin ۲x}{۱-\cos x}=۲\cos x+۲$ بر روی دایرهٔ مثلثاتی رئوس کدام چندضلعی است؟

۱) مثلث قائم‌الزاویه ۲) مثلث متساوی‌الساقین ۳) مستطیل ۴) لوزی

۹۳۳- $\frac{\pi}{۶}$ و θ ریشه‌های معادلهٔ $\sin ۲x-\sin x-\cos x=k$ در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ هستند. θ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

۹۳۴- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\tan x+\sin x=۱+\cos x$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

۱) ۲π ۲) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۳) ۳π ۴) $\frac{۷\pi}{۲}$

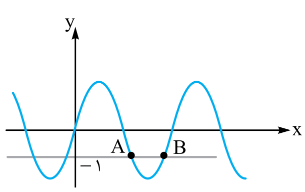
۹۳۵- جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۳x=\cos ax$ بر روی دایرهٔ مثلثاتی رئوس یک ۷ضلعی منتظم هستند. عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۰

۹۳۶- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۴ x+\cos^۴ x=\frac{۳}{۴}$ در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ باشند، مقدار $|\alpha-\beta|$ کدام است؟

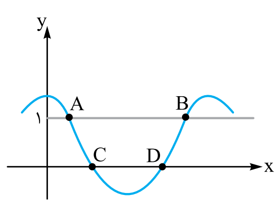
۱) $\frac{\pi}{۸}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۲\pi}{۳}$

۹۳۷- نمودار تابع $y=۲\sin ۵x$ به صورت مقابل است. طول پاره‌خط AB کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{۱۵}$ ۲) $\frac{۲\pi}{۱۵}$ ۳) $\frac{\pi}{۵}$ ۴) $\frac{۴\pi}{۱۵}$

۹۳۸- در شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x)=۱+۲\cos\frac{x}{۲}$ رسم شده است. طول پاره‌خط AB، چند برابر طول پاره‌خط CD است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) ۳

۹۳۹- تابع $f(x)=-۳\sin ax$ در $x=\frac{۱}{۴}$ دارای کم‌ترین مقدار است. در کدام نقطه دارای بیشترین مقدار است؟ $(a\neq ۰)$

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۹۴۰- نمودار تابع $y=-۳\cos(\frac{\pi}{۳}-۴\pi x)$ روی بازهٔ $[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

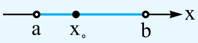
فصل نه

حد و پیوستگی

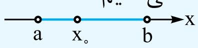
مفهوم حد و فرایندهای حد

همسایگی

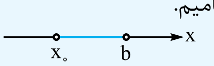
همسایگی: هر بازهٔ باز شامل عدد حقیقی $x_\circ$ را یک همسایگی $x_\circ$ می‌نامیم. در واقع اگر $x_\circ \in (a,b)$، آن‌گاه بازهٔ (a,b) یک همسایگی $x_\circ$ است.

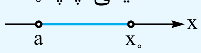


همسایگی محذوف: اگر بازهٔ (a,b) یک همسایگی $x_\circ$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ $(a,b)-\{x_\circ\}$ را یک همسایگی محذوف $x_\circ$ می‌نامیم.



همسایگی چپ و راست: بازهٔ باز $(x_\circ,b)$ را یک همسایگی راست $x_\circ$ و بازهٔ باز $(a,x_\circ)$ را یک همسایگی چپ $x_\circ$ می‌نامیم.





تست **به ازای کدام مجموعه مقادیر x، بازهٔ $(x+1, 2x-1)$ یک همسایگی عدد ۳ می‌باشد؟** *(سراسری ۹۸)*

۱) $\varnothing$ ۲) $\{2\}$ ۳) $2<x<2/5$ ۴) $1/5<x<2$

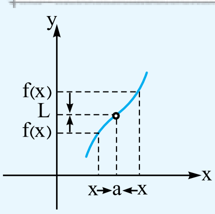
پاسخ **گزینهٔ «۱»** باید بازهٔ داده‌شده، شامل عدد ۳ باشد.

$$x+1<3<2x-1 \Rightarrow \begin{cases} x+1<3 \\ 3<2x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \varnothing$$

مفهوم حد

فرض کنید f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. اگر با نزدیک‌شدن x روی محور xها به a، $f(x)$ روی محور yها به اندازهٔ کافی به L نزدیک شود، گوییم حد f در نقطهٔ a برابر L است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

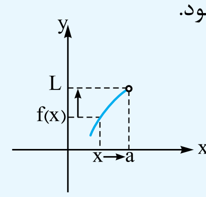


حد راست و چپ

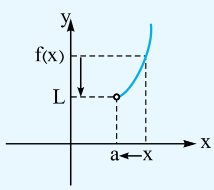
فرض کنید f در یک همسایگی راست a تعریف شده باشد. اگر با نزدیک‌شدن x با مقادیر بیشتر از a به a، $f(x)$ به اندازهٔ کافی به L نزدیک شود، گوییم حد راست f در نقطهٔ a برابر L است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L$$

به طور مشابه حد چپ نیز تعریف می‌شود.



$$\lim_{x\to a^-} f(x)=L$$



$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L$$

نتیجه به شرطی تابع f در a حد دارد که حد چپ و راست f در a موجود و برابر باشند.

تست **تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+3x & x<1 \\ 2[-x]+5 & x>1 \end{cases}$ در $x=1$ حد دارد. مقدار a کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) -2 ۴) صفر

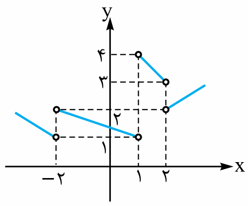
پاسخ **گزینهٔ «۳»** حد چپ و راست تابع f در نقطهٔ $x=1$ را محاسبه کرده و برابر هم قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2[-x]+5)=2(-2)+5=1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(ax^2+3x)=a+3$$

پس $a+3=1$ و در نتیجه $a=-2$ است.

تست نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل $\lim\limits_{x\to 1^-} f(f(-\frac{2}{x}))$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۴»** وقتی $x \to 1^-$ حاصل $\frac{-2}{x}$ به $(-2)^-$ میل می‌کند، زیرا:

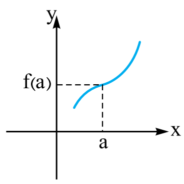
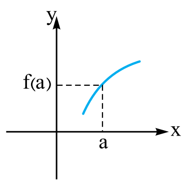
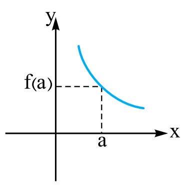
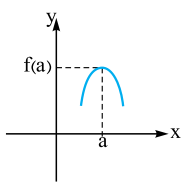
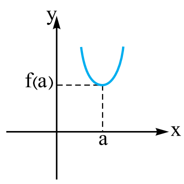
$$x<1 \Rightarrow \frac{1}{x}>1 \Rightarrow -\frac{2}{x}<-2$$

پس به صورت مقابل حد را محاسبه می‌کنیم:

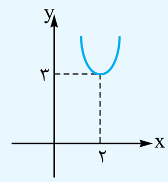
$$\lim_{x\to 1^-} f(f(-\frac{2}{x})) = f(\underbrace{f(-2^-)}_{1^+}) = f(1^+) = 4$$

حد تابع جزء صحیح فرض کنید f یک چندجمله‌ای باشد. اگر $f(a)\notin \mathbb{Z}$، آن‌گاه تابع $y=[f(x)]$ در $x=a$ حد دارد. اگر $f(a)\in\mathbb{Z}$، آن‌گاه تابع $y=[f(x)]$ در $x=a$ حد ندارد به‌جز نقاط max و min نسبی (در مورد این نقاط در مبحث کاربرد مشتق صحبت می‌کنیم).

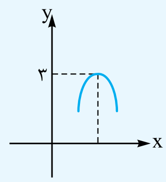
جدول زیر حالت‌های مختلف نکتهٔ بالا را نشان می‌دهد.

حد دارد	$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]=[f(a)]$		$f(a)\notin\mathbb{Z}$
حد ندارد	f اکیداً صعودی $\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}[f(x)]=f(a)\\ \lim\limits_{x\to a^-}[f(x)]=f(a)-1\end{cases}$		$f(a)\in\mathbb{Z}$
حد ندارد	f اکیداً نزولی $\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}[f(x)]=f(a)-1\\ \lim\limits_{x\to a^-}[f(x)]=f(a)\end{cases}$		
حد دارد	a نقطهٔ max $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[f(x)]=f(a)-1$		
حد دارد	a نقطهٔ min $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[f(x)]=f(a)$		

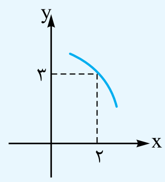
به طور مثال در شکل‌های زیر $\lim\limits_{x\to 2}[f(x)]$ محاسبه شده است.



حد = ۳

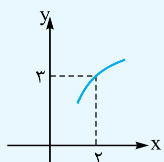


حد = ۳



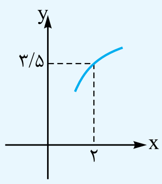
حد راست = ۲

حد چپ = ۳



حد راست = ۳

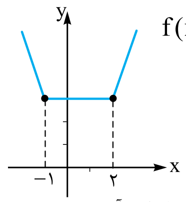
حد چپ = ۲



حد = ۳

نکته توابع $y=|x-\alpha|-|x-\beta|$ در بازهٔ $[\alpha,\beta]$ اکیداً یکنوا می‌باشند $(\alpha<\beta)$.

۷۱۷- [۲] نمودار تابع $f(x)=|x+۱|+|x-۲|$ به صورت مقابل است.



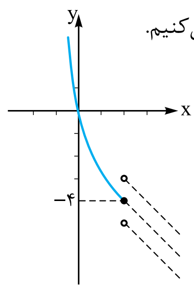
تابع در بازهٔ $(-\infty,-۱]$ اکیداً نزولی است و ضابطهٔ آن به صورت $y=-۲x+۱$ می‌باشد.

بنابراین: $f(x)=g(x) \Rightarrow -۲x+۱=-x^۲+۳x+۷$

$$\Rightarrow x^۲-۵x-۶=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \checkmark \\ x=۶ \text{ غقق } (x\le -۱) \end{cases}$$

تنها یک نقطهٔ مشترک وجود دارد.

۷۱۸- [۱] ضابطهٔ اول نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودار درمی‌یابیم که مقدار تابع $y=a-۲x$ در $x=۲$ باید کوچک‌تر یا مساوی ۴- باشد تا تابع $f(x)$ اکیداً نزولی شود. بنابراین:

$$a-۴\le -۴ \Rightarrow a\le ۰$$

بنابراین بیشترین مقدار a برابر صفر است.

۷۱۹- [۱] تابع $f(x)=ax^۲-۶x+۳$ در بازهٔ $(-\infty,-۳]$ به شرطی صعودی است که اولاً $a<۰$ باشد و ثانیاً x رأس سهمی در بازهٔ $(-\infty,-۳)$ نباشد.

$$x_{\text{راس}}=\frac{۶}{۲a}=\frac{۳}{a}\ge -۳ \Rightarrow \frac{۱}{a}\ge -۱ \Rightarrow \frac{۱}{a}+۱\ge ۰$$

$$\Rightarrow \frac{a+۱}{a}\ge ۰ \Rightarrow \begin{cases} a>۰ \text{ غقق} \\ a\le -۱ \checkmark \end{cases}$$

۷۲۰- [۱] دامنهٔ تابع $f(x)=x^۲-۲x+۲\sqrt{x-۲}$ بازهٔ $[۲,+\infty)$ است. در این بازه، سهمی $y=x^۲-۲x$ اکیداً صعودی و $y=۲\sqrt{x-۲}$ نیز اکیداً صعودی می‌باشد در نتیجه مجموع این دو تابع یعنی $f(x)$ نیز اکیداً صعودی است.

۷۲۱- [۳] تابع f اکیداً صعودی است. بنابراین:

$$f(۳-۲a)<f(۶-a^۲) \Rightarrow ۳-۲a<۶-a^۲$$

$$\Rightarrow a^۲-۲a-۳<۰ \Rightarrow (a+۱)(a-۳)<۰ \Rightarrow -۱<a<۳$$

۷۲۲- [۴] تابع f در $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. بنابراین:

$$f(۳-a)\ge f(۳a-۱) \Rightarrow ۳-a\le ۳a-۱ \Rightarrow a\ge ۱$$

۷۲۳- [۴] تابع $f(x)=۸x^۳+۴x-۱۰$ اکیداً صعودی است.

بنابراین: $fof(x)<f(۲x) \Rightarrow f(f(x))<f(۲x)$

$$\Rightarrow f(x)<۲x \Rightarrow ۸x^۳+۴x-۱۰<۲x$$

$$\Rightarrow ۸x^۳+۲x-۱۰<۰$$

جمع ضرایب عبارت فوق برابر صفر بوده و دارای ریشهٔ $x=۱$ است. چون تابع اکیداً صعودی است $x=۱$ تنها ریشهٔ آن بوده و در نتیجه جواب نامعادله به صورت $x<۱$ می‌باشد.

۷۲۴- [۱] تابع $f(x)$ را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم.

$$f(x)=\begin{cases} ۳x-۱ & x\ge -۱ \\ ۵x+۱ & x<-۱ \end{cases} \Rightarrow \text{ تابع } f(x) \text{ اکیداً صعودی است.}$$

بنابراین:

$$fof(x)>f(۴x-۳) \Rightarrow f(f(x))>f(۴x-۳)$$

$$\Rightarrow f(x)>۴x-۳$$

$$\xrightarrow{x\ge -۱} ۳x-۱>۴x-۳ \Rightarrow x<۲ \Rightarrow -۱\le x<۲ \ (۱)$$

$$\xrightarrow{x<-۱} ۵x+۱>۴x-۳ \Rightarrow x>-۴ \Rightarrow -۴<x<-۱ \ (۲)$$

در نتیجه: $(۱)\cup(۲) \Rightarrow -۴<x<۲ \Rightarrow x\in(-۴,۲)$

۷۲۵- [۲] می‌دانیم تابع $y=۴^x$ اکیداً صعودی است.

$$(\tfrac{۱}{۴})^{x^۲-x}>۱۶^{۱-x} \Rightarrow ۴^{-x^۲+x}>۴^{۲-۲x}$$

$$\Rightarrow -x^۲+x>۲-۲x \Rightarrow x^۲-۳x+۲<۰ \Rightarrow ۱<x<۲$$

۷۲۶- [۴] تابع g نزولی اکید و fog صعودی است. بنابراین تابع f نزولی است. در نتیجه:

$$f(۱)\ge f(۲)\ge f(۶) \Rightarrow ۸\ge k\ge ۴$$

$$\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\in\{۴,۵,۶,۷,۸\}$$

۷۲۷- [۴] تابع $f(x)=x+\sqrt{x-۱}$ اکیداً صعودی است، بنابراین $y=\frac{۱}{f(x)}$ اکیداً نزولی و در نتیجه $y=-\frac{۱}{f(x)}$ اکیداً صعودی می‌باشد.

دقت داشته باشید چون $f(x)$ اکیداً صعودی است، توابع $y=-f(x)$ و $y=f(-x)$ اکیداً نزولی می‌باشند.

۷۲۸- [۱] تابع f اکیداً صعودی و $f(۴)=۰$ است. بنابراین تابع $f(۳-x)$ اکیداً نزولی و در $x=-۱$ برابر صفر است.

$$\frac{x-۱}{f(۳-x)}\ge ۰$$

x		-۱		۱	
x-۱	−		−	۰	+
f(۳-x)	+	۰	−		−
p	−		+	۰	−

$\Rightarrow D=(-۱,۱]$

۷۲۹- [۴] دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(x+۲)-f(۲-x)}$ جواب نامعادلهٔ $f(x+۲)-f(۲-x)\ge ۰$ است. بنابراین:

$$f(x+۲)\ge f(۲-x) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی است}} x+۲\le ۲-x$$

$$\Rightarrow x\le ۰ \Rightarrow D=(-\infty,۰]$$

۷۳۰- [۴] تابع $y=\sqrt{۵-x}$ اکیداً نزولی و $y=-\sqrt{۵-x}$ اکیداً صعودی می‌باشد.

تابع $y=۲\sqrt{x-۱}$ نیز اکیداً صعودی است.

بنابراین تابع $f(x)$ در دامنهٔ خود اکیداً صعودی است.

$$f(x)=۲\sqrt{x-۱}-\sqrt{۵-x} \Rightarrow D_f=[۱,۵]$$

$$\Rightarrow R_f=[f(۱),f(۵)] \Rightarrow R_f=[-۲,۴] \Rightarrow b=۴$$

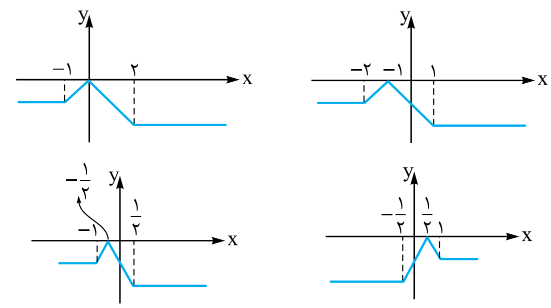
خواهیم داشت: $f(b+۱)=f(۵)=۴$

۷۳۱- [۱] تبدیلات زیر را بر تابع $y=f(x)$ و نمودار آن اعمال می‌کنیم.

$$y=f(x) \xrightarrow[\text{۱ واحد به سمت چپ}]{x\to x+۱} y=f(x+۱)$$

$$\xrightarrow[\text{انقباض افقی با ضریب } \frac{۱}{۲}]{x\to ۲x} y=f(۲x+۱)$$

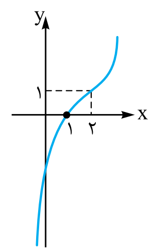
$$\xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور yها}]{x\to -x} y=f(۱-۲x)$$



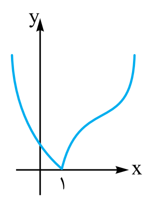
با توجه به نمودار تابع $y=f(۱-۲x)$ در بازهٔ $[\frac{۱}{۲},۱]$ اکیداً نزولی است.

بنابراین حداکثر $b-a$ برابر است با $۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$.

۷۳۲- **۲** تابع $y=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۷$ به صورت $y=(x-۲)^۳+۱$ بوده و نمودار آن مطابق شکل مقابل است.



در نتیجه نمودار $y=|(x-۲)^۳+۱|$ به صورت مقابل خواهد بود که در بازهٔ $(-\infty,۱]$ اکیداً نزولی است.



بنابراین حداکثر مقدار k برابر ۱ است.

۷۳۳- **۳** با توجه به نمودار ضابطهٔ تابع $y=۲x+f(x)$ به صورت مقابل است:

$$y=۲x+f(x)=\begin{cases}-\frac{x}{۲}-\frac{۳}{۲} & x<-۱\\ x & x\geq -۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-\frac{۵}{۲}x-\frac{۳}{۲} & x<-۱\\ -x & x\geq -۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow y=af(x)=\begin{cases}-\frac{۵}{۲}ax-\frac{۳}{۲}a & x<-۱\\ -ax & x\geq -۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow y=x-af(x)=\begin{cases}(۱+\frac{۵}{۲}a)x+\frac{۳}{۲}a & x<-۱\\ (۱+a)x & x\geq -۱\end{cases}$$

برای این‌که تابع فوق اکیداً یکنوا باشد باید ضرایب x در هر دو ضابطه هم‌علامت و مخالف صفر باشند.

بنابراین:

$$(۱+\frac{۵}{۲}a)(۱+a)>۰ \Rightarrow \begin{cases}a<-۱\\ a>-\frac{۲}{۵}\end{cases}$$

۳ قابل قبول است.

۷۳۴- **۴** ابتدا براساس رابطهٔ فیثاغورس x را به دست می‌آوریم:

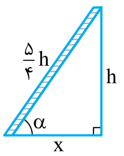
$$(۲x-۱)^۲=(x+۵)^۲+۵^۲ \Rightarrow ۳x^۲-۱۴x-۴۹=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{۷\pm\sqrt{۱۹۶}}{۳} \Rightarrow \begin{cases}x=۷\ ✓\\ x=-\frac{۷}{۳}\ \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

خواهیم داشت:

$$\cos\alpha=\frac{x+۵}{۲x-۱}=\frac{۱۲}{۱۳}$$

۷۳۵- **۳** ارتفاع دیوار را h در نظر می‌گیریم.



براساس رابطهٔ فیثاغورس خواهیم داشت:

$$x^۲=(\frac{۵}{۴}h)^۲-h^۲=(\frac{۵}{۴}h-h)(\frac{۵}{۴}h+h)=(\frac{۱}{۴}h)(\frac{۹}{۴}h)$$

$$=\frac{۹}{۱۶}h^۲ \Rightarrow x=\frac{۳}{۴}h$$

بنابراین:

$$\tan\alpha=\frac{h}{x}=\frac{h}{\frac{۳}{۴}h}=\frac{۴}{۳}$$

۷۳۶- **۱** اگر $CH=x$ باشد، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH خواهیم داشت:

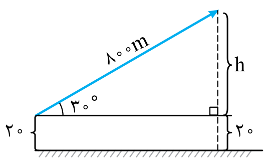
$$\frac{CH}{AC}=\cos\hat{C} \Rightarrow \frac{x}{AC}=۰/۸ \Rightarrow AC=\frac{۵}{۴}x$$

با توجه به رابطهٔ فیثاغورس:

$$AC^۲=AH^۲+CH^۲ \Rightarrow \frac{۲۵}{۱۶}x^۲=۱۸^۲+x^۲$$

$$\Rightarrow \frac{۹}{۱۶}x^۲=۱۸^۲ \Rightarrow x^۲=۳۶\times۱۶ \Rightarrow x=۶\times۴=۲۴$$

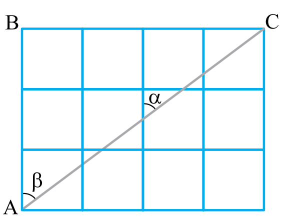
۷۳۷- **۳** با توجه به شکل واضح است $\sin ۳۰^\circ=\frac{h}{۸۰۰}$.



بنابراین:

$$\frac{h}{۸۰۰}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow h=۴۰۰ \Rightarrow h+۲۰=۴۲۰$$

۷۳۸- **۴** طبق قضیهٔ موازی مورب‌ها زاویهٔ α با زاویهٔ β برابر است. بنابراین در مثلث ABC مقدار $\sin\beta$ را محاسبه می‌کنیم.

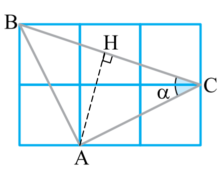


اعداد فیثاغورس:

$$\left.\begin{array}{l}AB=۳\\ BC=۴\end{array}\right\} \Rightarrow AC=۵$$

$$\sin\beta=\frac{BC}{AC}=\frac{۴}{۵}$$

۷۳۹- **۱** **روش اول:** در مثلث ABC بدیهی است $AB=AC$.



بنابراین مثلث ABC متساوی‌الساقین بوده و ارتفاع AH، میانه نیز می‌باشد.

می‌دانیم:

$$AC^۲=۱^۲+۲^۲=۵ \Rightarrow AC=\sqrt{۵}$$

$$BC^۲=۱^۲+۳^۲=۱۰ \Rightarrow BC=\sqrt{۱۰}$$

خواهیم داشت:

$$AH^۲=AC^۲-CH^۲=(\sqrt{۵})^۲-(\frac{\sqrt{۱۰}}{۲})^۲=۵-\frac{۵}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow AH=\sqrt{\frac{۵}{۲}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

بنابراین:

$$\sin\alpha=\frac{AH}{AC}=\frac{\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

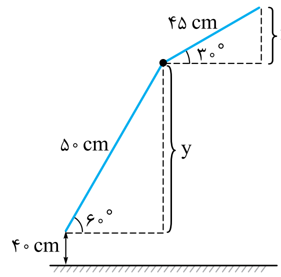
روش دوم: $AB = AC = \sqrt{5}$ و $BC = \sqrt{10}$ می‌باشد. بدیهی است:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

بنابراین هر یک از زوایای B و C برابر 45° می‌باشند.

$$\sin\alpha = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۷۴۰- ۳ با توجه به شکل بدیهی است فاصلهٔ نوک گیره از سطح زمین برابر $x+y+40$ سانتی‌متر است.

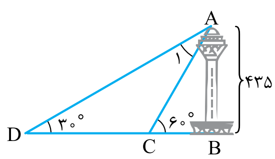


خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{45} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 22/5 \\ \frac{y}{50} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = 25\sqrt{3} \sim 42/5\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x + y + 40 = 105$$

۷۴۱- ۱ با توجه به شکل مشخص است $\hat{A}_1 + \hat{D} = \hat{C}$.



$$\Rightarrow \hat{A}_1 + 30^\circ = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = 30^\circ$$

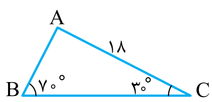
بنابراین مثلث ACD متساوی‌الساقین بوده و $AC = CD$ است.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \sin 60^\circ \Rightarrow \frac{435}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{870}{\sqrt{3}} = \frac{870\sqrt{3}}{3} = 290\sqrt{3} \Rightarrow CD = 290\sqrt{3}$$

۷۴۲- ۲ چون همهٔ گزینه‌ها از ۱۸ کم‌تر است؛ بنابراین ۱۸ طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر است. طبق قضیهٔ سینوس‌ها داریم:



$$\frac{AB}{\sin\hat{C}} = \frac{AC}{\sin\hat{B}}$$

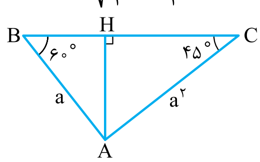
$$\Rightarrow \frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{18}{\sin 70^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{\frac{1}{2}} = \frac{18}{0/9} \Rightarrow AB = 10$$

۷۴۳- ۴ در مثلث ABC ارتفاع AH را رسم می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ABH}: AH = a\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ \overset{\Delta}{ACH}: AH = a^2\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



۷۴۴- ۲ مثلث ABC متساوی‌الساقین بوده و $AB = AC$ می‌باشد.

$$\overset{\Delta}{ACD}: \frac{AD}{AC} = \tan 60^\circ \Rightarrow AD = \sqrt{3}AC$$

از طرفی: $BD = 1 \Rightarrow AD - AB = 1 \Rightarrow \sqrt{3}AC - AC = 1$

$$\Rightarrow (\sqrt{3}-1)AC = 1 \Rightarrow AC = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

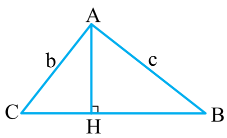
۷۴۵- ۲ نسبت مساحت دو مثلث را می‌نویسیم.

$$\frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{\frac{1}{2}AB \times \overset{2PC}{\overbrace{BP}} \times \sin 45^\circ}{\frac{1}{2}AC \times PC \times \sin 30^\circ} = \frac{2AB \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{AC \times \frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}\frac{AB}{AC}$$

از طرفی: $\frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{\frac{1}{2}AB \times AP \times \sin\alpha}{\frac{1}{2}AC \times AP \times \sin\beta} = 2\sqrt{2}\frac{AB}{AC}$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 2\sqrt{2}$$

۷۴۶- ۲ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. خواهیم داشت:



$$\cos\hat{C} = \frac{CH}{b} \Rightarrow b\cos\hat{C} = CH$$

$$\cos\hat{B} = \frac{BH}{c} \Rightarrow c\cos\hat{B} = BH$$

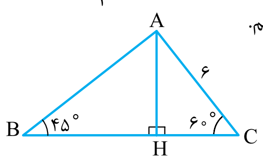
بنابراین:

$$b\cos\hat{C} + c\cos\hat{B} = 4 \Rightarrow CH + BH = 4 \Rightarrow BC = 4$$

در نتیجه:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \times BC = 16 \Rightarrow \frac{1}{2}AH \times 4 = 16 \Rightarrow AH = 8$$

۷۴۷- ۱ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{AHC}: \begin{cases}\frac{AH}{AC} = \sin 60^\circ \Rightarrow \frac{AH}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = 3\sqrt{3} \\ \frac{CH}{AC} = \cos 60^\circ \Rightarrow \frac{CH}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow CH = 3\end{cases} \\ \overset{\Delta}{AHB}: \frac{AH}{BH} = \tan 45^\circ = 1 \Rightarrow BH = AH = 3\sqrt{3}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow BC = 3 + 3\sqrt{3}$$

بنابراین:

$$S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{3\sqrt{3}(3+3\sqrt{3})}{2} = \frac{9\sqrt{3}+27}{2}$$

۷۴۸- ۴ در حالت کلی در مثلث ABC می‌دانیم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin\hat{A}$$

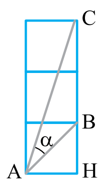
بنابراین:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(x)(2x-6)\sin 70^\circ = 36$$

$$\Rightarrow x(x-3)\left(\frac{9}{10}\right) = 36 \Rightarrow x^2 - 3x = 40$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 40 = 0 \Rightarrow (x+5)(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases}x = -5 & \text{غ ق ق} \\ x = 8 \checkmark\end{cases}$$

۷۴۹- ۴ مساحت مثلث ABC برابر است با:



$$\frac{AH \times BC}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$$

از طرفی می‌دانیم: $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times \sin\alpha$

طول AB و AC را به دست می‌آوریم.

$$AB^{۲}=۱^{۲}+۱^{۲}=۲\Rightarrow AB=\sqrt{۲}$$

$$AC^{۲}=۱^{۲}+۳^{۲}=۱۰\Rightarrow AC=\sqrt{۱۰}$$

در نتیجه:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times\sqrt{۲}\times\sqrt{۱۰}\times\sin\alpha=۱\Rightarrow \sin\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

۷۵۰- ۱ مساحت هر چهارضلعی برابر است با نصف حاصلضرب دو قطر ضرب در سینوس زاویهٔ بین دو قطر.

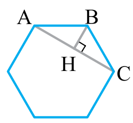
در این مسئله زاویهٔ بین دو قطر ۱۵۰° یا همان ۳۰° است.

$$S=\frac{۱}{۲}\times۱۰\times۱۸\times\sin۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times۱۰\times۱۸\times\frac{۱}{۲}=۴۵$$

۷۵۱- ۲

نکته مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع a برابر $۳\frac{\sqrt{۳}}{۲}a^{۲}$ می‌باشد.

$$S=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^{۲}=۶\sqrt{۳}\Rightarrow a^{۲}=۴\Rightarrow a=۲$$



با توجه به شکل مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

اندازهٔ هر زاویه داخل شش‌ضلعی منتظم ۱۲۰° است.

بنابراین در مثلث ABC داریم: $\hat{A}=\hat{C}=۳۰^\circ$

ارتفاع BH میانه نیز می‌باشد.

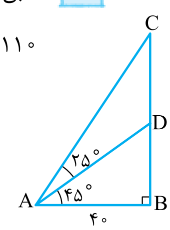
$$AH=AB\cos۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۲=\sqrt{۳}\Rightarrow AC=۲\sqrt{۳}$$

نکته در شش‌ضلعی منتظم به ضلع a، اندازهٔ قطر کوچک $\sqrt{۳}a$ و اندازهٔ قطر بزرگ $۲a$ است.

۷۵۲- ۳ مطابق شکل طول CD برابر ارتفاع درخت است.

$$\overset{\Delta}{ABC}: BC=AB\times\tan۷۰^\circ=۴۰\times۲/۷۵=۱۱۰$$

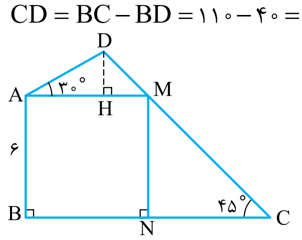
$$\overset{\Delta}{ABD}: BD=AB\times\tan۴۵^\circ=۴۰$$



بنابراین: $CD=BC-BD=۱۱۰-۴۰=۷۰$

۷۵۳- ۲ مستطیل AMNB را رسم می‌کنیم. بدیهی است:

$$MN=AB=۶$$



در مثلث MNC داریم:

$$\frac{MN}{MC}=\sin۴۵^\circ\Rightarrow\frac{۶}{MC}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow MC=۶\sqrt{۲}\Rightarrow MD=۲\sqrt{۲}$$

ارتفاع DH را رسم می‌کنیم. بدیهی است $\hat{M}=\hat{C}=۴۵^\circ$.

در مثلث DMH داریم:

$$\frac{DH}{MD}=\sin۴۵^\circ\Rightarrow\frac{DH}{۲\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow DH=۲$$

در نتیجه در مثلث ADH:

$$\frac{DH}{AD}=\sin۳۰^\circ\Rightarrow\frac{۲}{AD}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow AD=۴$$

۷۵۴- ۲ ابتدا با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ABC، $BC^{۲}$ را به دست می‌آوریم.

$$BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}-۲AB\times AC\cos\hat{A}$$
$$=۳۶+۶۴-۲\times۶\times۸\times\frac{۱}{۲}=۵۲$$

قضیهٔ کسینوس‌ها را در مثلث BDC می‌نویسیم.

$$BC^{۲}=BD^{۲}+CD^{۲}-۲BD\times CD\cos\hat{D}$$
$$\Rightarrow ۵۲=BD^{۲}+۳۶-۲BD\times۶\times(-\frac{۱}{۲})$$
$$\Rightarrow BD^{۲}+۶BD-۱۶=۰\Rightarrow(BD+۸)(BD-۲)=۰$$
$$\Rightarrow BD=۲$$

بنابراین:

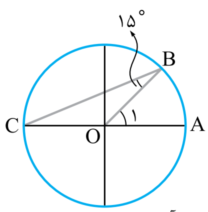
$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BD\times CD\times\sin\hat{D}=\frac{۱}{۲}\times۲\times۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳\sqrt{۳}$$

۷۵۵- ۱ طول کمان AB، $\frac{۱}{۳}$ شعاع دایره است بنابراین زاویهٔ θ برابر $\frac{۱}{۳}$ رادیان است.

زاویهٔ θ، $\frac{۶۰}{\pi}$ درجه است. $\theta=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱۸۰}{\pi}=\frac{۶۰}{\pi}$

۷۵۶- ۴ در مثلث OBC اضلاع OB و OC برابر شعاع می‌باشند.

بنابراین زاویهٔ C برابر ۱۵° و در نتیجه $\hat{O}_{۱}=\hat{B}+\hat{C}=۳۰^\circ$.



$$\Rightarrow\hat{O}_{۱}=\frac{\pi}{۶}$$

$$\text{طول }AB=R\cdot\theta=۱۲\times\frac{\pi}{۶}=۲\pi$$

۷۵۷- ۲ مساحت قطاع و مثلث را به دست می‌آوریم.

$$S_{\text{قطاع}}=\frac{۶۰}{۳۶۰}\times\pi R^{۲}=\frac{۱}{۶}\times\pi\times۲^{۲}=\frac{۲}{۳}\pi$$

$$S_{\text{مثلث}}=\frac{۱}{۲}\times۲\times۲\times\sin۶۰^\circ=\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow S_{\text{رنگی}}=S_{\text{قطاع}}-S_{\text{مثلث}}=\frac{۲\pi}{۳}-\sqrt{۳}$$

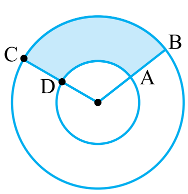
۷۵۸- ۲ مساحت و محیط قطاع را S و P می‌نامیم.

$$\left.\begin{array}{l}S=\frac{\theta}{۲\pi}\times\pi R^{۲}=\frac{\theta R^{۲}}{۲}=\frac{۹}{۲}\theta\\ P=۲R+R\theta=۶+۳\theta\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{۹}{۲}\theta=۶+۳\theta\Rightarrow\theta=۴$$

۷۵۹- ۳ مساحت قطاع بزرگ را $S_{۱}$ و مساحت قطاع کوچک را $S_{۲}$ می‌نامیم.

$$\left.\begin{array}{l}S_{۱}=\frac{\theta R^{۲}}{۲}=\frac{\frac{\pi}{۶}\times۸^{۲}}{۲}=\frac{۱۶\pi}{۳}\\ S_{۲}=\frac{\theta r^{۲}}{۲}=\frac{\frac{\pi}{۶}\times۴^{۲}}{۲}=\frac{۴\pi}{۳}\end{array}\right\}\Rightarrow S=S_{۱}-S_{۲}=\frac{۱۲\pi}{۳}=۴\pi$$

۷۶۰- ۴ محیط قسمت رنگی برابر است با $AB+CD+\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}$ که $AB=CD=۸-۳=۵$.



$$۱۵۰^\circ=\frac{۵\pi}{۶}\text{ رادیان}$$

$$\overset{\frown}{AD}=r.\theta=۳\times\frac{۵\pi}{۶}=\frac{۵\pi}{۲}$$

$$\overset{\frown}{BC}=R\theta=۸\times\frac{۵\pi}{۶}=\frac{۲۰\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow\text{محیط}=۵+۵+\frac{۵\pi}{۲}+\frac{۲۰\pi}{۳}=۱۰+\frac{۵۵\pi}{۶}$$

۷۶۱- [۴] زاویهٔ -۲۱۵° به صورت $-۳۵^\circ - ۱۸۰^\circ$ بوده و انتهای کمان در ناحیهٔ دوم مثلثاتی است.
انتهای کمان زوایای گزینه‌های [۱] و [۲] و [۳] در ناحیهٔ دوم و زاویهٔ [۴] در ناحیهٔ اول مثلثاتی قرار دارند.

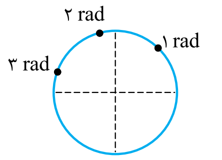
۷۶۲- [۲] زاویهٔ -۴۹۰° به صورت $-۱۳۰^\circ - ۳۶۰^\circ$ بوده و انتهای کمان در ناحیهٔ سوم مثلثاتی است. انتهای کمان زوایای $\frac{۵\pi}{۶}$، $\frac{۴\pi}{۳}$، $\frac{۱۷\pi}{۸}$ و $\frac{۸\pi}{۵}$ به ترتیب در ناحیه‌های دوم، سوم، اول و چهارم مثلثاتی قرار دارند.

۷۶۳- [۱] انتهای کمان زاویهٔ -۵۳۰° بر انتهای کمان زاویهٔ $۱۹۰^\circ = -۵۳۰ + ۲\times ۳۶۰^\circ$ منطبق است. حال ۱۹۰° را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$\theta = ۱۹۰\times\frac{\pi}{۱۸۰} = ۱۹\frac{\pi}{۱۸} = \pi + \frac{\pi}{۱۸}$$

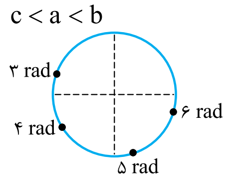
بنابراین اگر $\alpha = \frac{\pi}{۱۸}$ باشد، انتهای کمان α و θ دو سر یک قطر خواهند بود.

۷۶۴- [۴] هر رادیان تقریباً ۵۷° است. انتهای کمان زوایای ۱، ۲ و ۳ رادیان مطابق شکل است. واضح است $\sin ۳ < \sin ۱ < \sin ۲$.

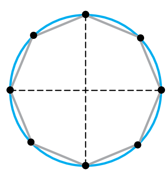


بنابراین:
$c < a < b$

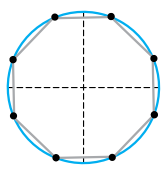
۷۶۵- [۴] با توجه به این‌که هر رادیان تقریباً ۵۷° است، انتهای کمان زوایای ۳، ۴، ۵ و ۶ رادیان مطابق شکل است.
واضح است انتهای کمان ۶ رادیان در ناحیهٔ چهارم بوده و $\cos ۶$ مثبت است.



۷۶۶- [۳] انتهای کمان زوایای $\frac{k\pi}{۴}$ مطابق شکل رئوس یک ۸ضلعی منتظم می‌باشند.



انتهای کمان زوایای $\frac{\pi}{۳}+\frac{k\pi}{۴}$ همانند $\frac{k\pi}{۴}$ بوده و فقط $\frac{\pi}{۳}$ بر روی دایرهٔ مثلثاتی چرخش دارند.



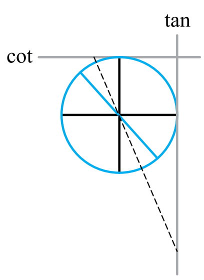
۷۶۷- [۳] مطابق جدول عمل می‌کنیم.

k	۰	۱	۲	...	۱۰	۱۱
θ	$\frac{\pi}{۸}$	$\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۸}$	$\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۸}$	...	$\frac{۵\pi}{۳}+\frac{\pi}{۸}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}+\frac{\pi}{۸}$

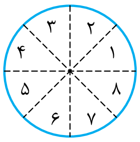
با توجه به جدول ۱۲ نقطهٔ متمایز بر روی دایره به وجود می‌آید. بدیهی است اگر $k = ۱۲$ باشد، $\theta = ۲\pi + \frac{\pi}{۸}$ بوده و بر کمان $\frac{\pi}{۸}$ منطبق می‌شود.

■ می‌دانستیم $\frac{k\pi}{۶}$ ها ۱۲ نقطهٔ متمایز بر دایره به وجود می‌آورند بنابراین $\frac{\pi}{۸}+\frac{k\pi}{۶}$ ها نیز ۱۲ نقطه ایجاد می‌کنند.

۷۶۸- [۱] با توجه به $\sin\alpha\cos\alpha < ۰$ مشخص می‌شود که $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ غیرهم‌علامت بوده و α در یکی از نواحی ۳، ۴، ۷ و یا ۸ است. در نواحی ۴ و ۸ مقدار تانژانت α بیشتر از کتانژانت α است اما در نواحی ۳ و ۷ داریم: $\tan\alpha < \cot\alpha$



۷۶۹- [۲] در نواحی ۱، ۶، ۷ و ۸ رابطهٔ $\sin x < \cos x$ و در نواحی ۲، ۴، ۶ و ۸ رابطهٔ $\tan x > \cot x$ برقرار است.



بنابراین در دو ناحیهٔ ۶ و ۸، هر دو رابطه برقرار است.
زوایای $\frac{۹\pi}{۸}$، $\frac{۱۳\pi}{۹}$، $\frac{۱۷\pi}{۱۰}$ و $\frac{۲۳\pi}{۱۱}$ به ترتیب در نواحی ۵، ۶، ۷ و ۱ قرار دارند.

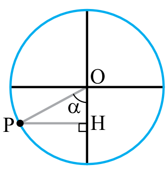
۷۷۰- [۱] اگر نقطهٔ $P(x,y)$ بر دایرهٔ مثلثاتی انتهای کمان مربوط به زاویهٔ θ باشد، آن‌گاه:

$$\sin\theta = y \quad \cos\theta = x \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

بنابراین:

$$P(\frac{۲}{۳},-\frac{\sqrt{۵}}{۳}) \Rightarrow \begin{cases}\sin\alpha = -\frac{\sqrt{۵}}{۳}\\ \cot\alpha = -\frac{۲}{\sqrt{۵}}\end{cases} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cot\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{۵}}{۳}}{-\frac{۲}{\sqrt{۵}}} = \frac{۵}{۶}$$

۷۷۱- [۱] با توجه به شکل و $P(-\frac{۴}{۵},y)$ خواهیم داشت:



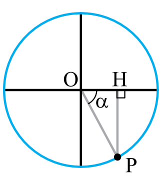
$$OP^۲ = PH^۲ + OH^۲$$
$$\Rightarrow ۱ = (\frac{۴}{۵})^۲ + OH^۲$$
$$\Rightarrow OH^۲ = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow OH = \frac{۳}{۵}$$

در نتیجه:

$$\tan\alpha = \frac{PH}{OH} = \frac{\frac{۴}{۵}}{\frac{۳}{۵}} = \frac{۴}{۳}$$

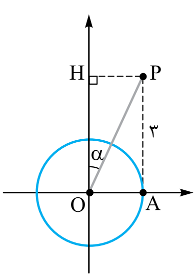
۷۷۲- [۲] با توجه به مثلث OPH در دایرهٔ مثلثاتی و $P(۳a, a-۱)$ خواهیم داشت:

$$OP^۲ = PH^۲ + OH^۲ \Rightarrow ۱ = (a-۱)^۲ + (۳a)^۲$$
$$\Rightarrow ۱۰a^۲ - ۲a = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۰ \text{ غ‌ق‌ق} \\ a = \frac{۱}{۵} \checkmark \end{cases}$$



$$\Rightarrow P(\frac{۳}{۵},-\frac{۴}{۵}) \Rightarrow \begin{cases} PH = \frac{۴}{۵} \\ OH = \frac{۳}{۵}\end{cases}$$
$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{PH}{OP} = \frac{\frac{۴}{۵}}{۱} = \frac{۴}{۵}$$

۷۷۳- [۳] با توجه به شکل خواهیم داشت:



$$\begin{cases} PH = OA = ۱ \\ OH = AP = ۳ \end{cases}$$

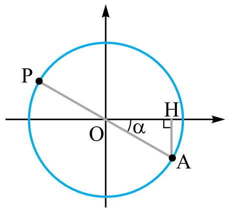
بنابراین:

$$OP^۲ = OH^۲ + PH^۲ \Rightarrow OP^۲ = ۳^۲ + ۱^۲ = ۱۰$$
$$\Rightarrow OP = \sqrt{۱۰}$$

در نتیجه:

$$\cos\alpha = \frac{OH}{OP} = \frac{۳}{\sqrt{۱۰}} = \frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰}$$

۷۷۴- ۲ با توجه به مثلث OAH در دایرهٔ مثلثاتی خواهیم داشت:



$$\tan\alpha=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{AH}{OH}=\frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow OH=۲AH$$

از طرفی: $OA^{۲}=OH^{۲}+AH^{۲}\Rightarrow ۱=۴AH^{۲}+AH^{۲}$

$$\Rightarrow AH^{۲}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

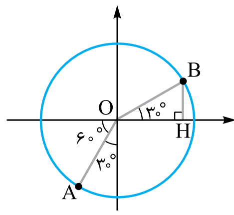
اگر مختصات A را $A(x,y)$ در نظر بگیریم، مختصات P به صورت $P(-x,-y)$ است.

$$\left.\begin{array}{l}x=OH=۲\frac{\sqrt{۵}}{۵}\\ y=-AH=-\frac{\sqrt{۵}}{۵}\end{array}\right\}\Rightarrow P(-۲\frac{\sqrt{۵}}{۵},\frac{\sqrt{۵}}{۵})$$

بنابراین:

$$(-\frac{۲\sqrt{۵}}{۵})(\frac{\sqrt{۵}}{۵})=-\frac{۲}{۵}$$

۷۷۵- ۴ اگر مختصات B را $B(x,y)$ در نظر بگیریم مختصات A به صورت $A(-y,-x)$ خواهد بود.



می‌دانیم:

$$x=\cos ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\ ,\ y=\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}A(-\frac{۱}{۲},-\frac{\sqrt{۳}}{۲})\\ B(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲})\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۱}{۲})^{۲}+(\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۲}}=\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$$

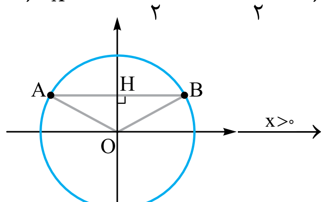
۷۷۶- ۴ اگر مختصات B به صورت $B(x,y)$ باشد، خواهیم داشت:

$$AB=۲x\quad OH=y$$

$$S_{OAB}=\frac{OH\times AB}{۲}=\frac{۲xy}{۲}=xy=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۳}}{۴x}$$

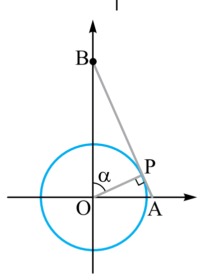
از طرفی: $x^{۲}+y^{۲}=۱\Rightarrow x^{۲}+\frac{۳}{۱۶x^{۲}}=۱\Rightarrow x^{۴}-x^{۲}+\frac{۳}{۱۶}=۰$

$$\Rightarrow x^{۲}=\frac{۱\pm\sqrt{۱-\frac{۳}{۴}}}{۲}=\frac{۱\pm\frac{۱}{۲}}{۲}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x^{۲}=\frac{۳}{۴}\\ x^{۲}=\frac{۱}{۴}\end{array}\right.$$



$$\xrightarrow{x>۰}\left\{\begin{array}{l}x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow AB=\sqrt{۳}\\ x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow AB=۱\end{array}\right.$$

۷۷۷- ۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB، OP ارتفاع وارد بر وتر است.

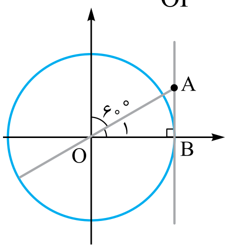


$$OP^{۲}=AP\times BP$$
$$=AP\times ۳AP=۳AP^{۲}$$
$$\Rightarrow OP=\sqrt{۳}AP\Rightarrow OP=\frac{\sqrt{۳}}{۳}BP$$
$$\Rightarrow\frac{BP}{OP}=\sqrt{۳}$$

بنابراین:

$$\overset{\Delta}{OBP}:\tan\alpha=\frac{BP}{OP}=\sqrt{۳}\Rightarrow\alpha=۶۰^\circ$$

۷۷۸- ۴ واضح است در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB، زاویهٔ $\hat{O}_۱$ برابر ۳۰° است.

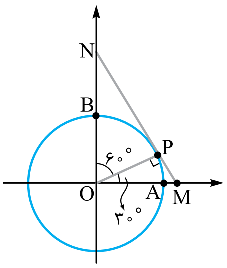


$$\tan\hat{O}_۱=\frac{AB}{OB}\Rightarrow\tan ۳۰^\circ=\frac{AB}{۱}$$
$$\Rightarrow AB=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$OA^{۲}=OB^{۲}+AB^{۲}\Rightarrow OA^{۲}=۱+\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow OA=\frac{۲}{\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

۷۷۹- ۲ در دایرهٔ مثلثاتی $OB=OP=OA=۱$ است.



$$\overset{\Delta}{OPN}:\frac{OP}{ON}=\cos ۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow\frac{۱}{ON}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ON=۲$$
$$\overset{\Delta}{OPM}:\frac{OP}{OM}=\cos ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\Rightarrow\frac{۱}{OM}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow OM=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

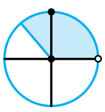
خواهیم داشت:

$$BN=ON-OB=۲-۱=۱$$

$$AM=OM-OA=\frac{۲}{\sqrt{۳}}-۱\Rightarrow AM+BN=\frac{۲}{\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

۷۸۰- ۲

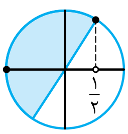
۷۸۱- ۳ با توجه به دایرهٔ مثلثاتی اگر $۰<\alpha<۱۲۰^\circ$ باشد، آن‌گاه $۰<\sin\alpha\le ۱$ است.



بنابراین:

$$۰<\frac{۲-m}{۳}\le ۱\Rightarrow ۰<۲-m\le ۳$$
$$\Rightarrow -۲<-m\le ۱\Rightarrow -۱\le m<۲$$

۷۸۲- ۲ اگر $\frac{\pi}{۶}<\theta<\frac{۲\pi}{۳}$ باشد، آن‌گاه $\frac{\pi}{۳}<۲\theta<\frac{۴\pi}{۳}$ بوده و با توجه به دایرهٔ مثلثاتی $-۱\le\cos ۲\theta<\frac{۱}{۲}$ است.

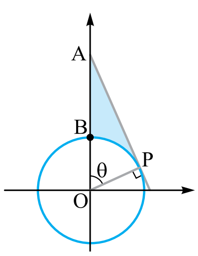


بنابراین:

$$-۱\le\frac{۳m+۱}{۲}<\frac{۱}{۲}\Rightarrow -۲\le ۳m+۱<۱$$
$$\Rightarrow -۳\le ۳m<۰\Rightarrow -۱\le m<۰$$

۷۸۳- ۱ مساحت قسمت رنگی را S می‌نامیم.

$$S=S_{AOP\ \text{مثلث}}-S_{OBP\ \text{قطاع}}$$



خواهیم داشت:

$$\overset{\Delta}{AOP}:\tan\theta=\frac{AP}{OP}=\frac{AP}{۱}=AP$$

$$\left.\begin{array}{l}S_{OAP}=\frac{AP\times OP}{۲}=\frac{۱}{۲}\tan\theta\\ S_{OBP}=\frac{\theta}{۲}R^{۲}=\frac{\theta}{۲}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\tan\theta-\frac{۱}{۲}\theta=\frac{۱}{۲}(\tan\theta-\theta)$$

-۷۸۴ [۳] ساده می‌کنیم:

$$\cos(\frac{\pi}{2}+x)+\sin(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x+\cos x$$

-۷۸۵ [۴] تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم.

$$3\cos(\frac{3\pi}{2}+x)=4\sin(x-\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow\ 3\sin x=-4\cos x\ \Rightarrow\ \cot x=-\frac{3}{4}$$

-۷۸۶ [۱] تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم.

$$\cot(\theta+x)\tan(x-\frac{\pi}{2})=1\ \Rightarrow\ \cot(\theta+x)(-\cot x)=1$$

$$\Rightarrow\ \cot(\theta+x)=-\frac{1}{\cot x}\ \Rightarrow\ \cot(\theta+x)=-\tan x$$

اگر $\theta=\frac{\pi}{2}$ باشد، برابری بالا برقرار است.

-۷۸۷ [۲] می‌دانیم $\alpha+\beta=\pi$ است، بنابراین $\alpha=\pi-\beta$.

$$\cos(\alpha-\frac{3\pi}{2})=\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha=-\sin(\pi-\beta)=-\sin\beta$$

-۷۸۸ [۲] می‌دانیم $\hat{A}+\hat{B}=\frac{\pi}{2}$ است، بنابراین:

$$\tan A=\cot B\ ,\ \cot A=\tan B$$

و در نتیجه:

$$\frac{\cot A-\cot B}{\tan A-\tan B}=\frac{\tan B-\cot B}{\cot B-\tan B}=-1$$

-۷۸۹ [۳]

-۷۹۰ [۱] می‌دانیم $\hat{B}+\hat{C}=\frac{\pi}{2}$ است. بنابراین $\cos C=\sin B$ و $\sin C=\cos B$.

در نتیجه:

$$\frac{\sin B\cos C}{\sin^2 C}=\frac{\sin B\sin B}{\cos^2 B}=\frac{\sin^2 B}{\cos^2 B}=\tan^2 B$$

-۷۹۱ [۴] اگر $x-\frac{\pi}{4}=\alpha$ باشد، آن‌گاه $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\alpha$ است.

$$\frac{\cos(x-\frac{\pi}{4})}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}=\frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\cot\alpha=4$$

$$\Rightarrow\ \tan\alpha=-\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ \tan(x-\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{4}$$

-۷۹۲ [۴] اگر $x-\frac{\pi}{12}=\alpha$ باشد، آن‌گاه $x+5\frac{\pi}{12}=\alpha+\frac{\pi}{2}$ است.

$$\sin(x+\frac{5\pi}{12})+\cos(x-\frac{\pi}{12})=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow\ \sin(\alpha+\frac{\pi}{2})+\cos\alpha=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow\ \cos\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ \cos\alpha=\frac{1}{6}$$

بنابراین:

$$\cos(x+\frac{11\pi}{12})=\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{1}{6}$$

-۷۹۳ [۱] می‌دانیم $\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}$ است، بنابراین $3\alpha+3\beta=\frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

$$3\alpha+3\beta=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ (2\alpha+\beta)+(\alpha+2\beta)=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\ \cos(\alpha+2\beta)=\sin(2\alpha+\beta)$$

در نتیجه:

$$\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+2\beta)}=1$$

-۷۹۴ [۱] می‌دانیم $\alpha=\frac{\pi}{16}$ است، بنابراین $8\alpha=\frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

$$3\alpha+5\alpha=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \sin 3\alpha=\cos 5\alpha$$

$$2\alpha+6\alpha=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \tan 2\alpha=\cot 6\alpha$$

در نتیجه:

$$\frac{\sin 3\alpha\cot 6\alpha}{\tan 2\alpha\cot 5\alpha}=1$$

-۷۹۵ [۴] با توجه به شکل واضح است: $\theta=240^\circ+90^\circ=330^\circ$

بنابراین: $\tan\theta=\tan 330^\circ=\tan(360^\circ-30^\circ)=-\tan 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

-۷۹۶ [۴] عبارت $\cos 570^\circ$ را ساده می‌کنیم.

$$\cos 570^\circ=\cos(360^\circ+210^\circ)=\cos 210^\circ=\cos(180^\circ+30^\circ)$$

$$=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

-۷۹۷ [۴] عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم.

$$\cos\frac{16\pi}{3}\sin(\frac{-19\pi}{6})+\tan\frac{17\pi}{4}\sin\frac{11\pi}{6}$$

$$=\cos(5\pi+\frac{\pi}{3})(-\sin(3\pi+\frac{\pi}{6}))+\tan(4\pi+\frac{\pi}{4})\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})$$

$$=(-\cos\frac{\pi}{3})(\sin\frac{\pi}{6})+\tan\frac{\pi}{4}(-\sin\frac{\pi}{6})$$

$$=(-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})+(1)(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$$

-۷۹۸ [۱] اگر k زوج باشد، $\cos(k\pi-\alpha)=\cos\alpha$ و اگر k فرد باشد، $\cos(k\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ است؛ بنابراین $\cos(k\pi-\alpha)=(-1)^k\cos\alpha$.

-۷۹۹ [۱] می‌دانیم کسینوس دو زاویهٔ مکمل قرینهٔ یکدیگرند، بنابراین مجموع کسینوس آن‌ها برابر صفر است.

$$\underbrace{\cos\frac{\pi}{7}+\overbrace{\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}}^{0}+\cos\frac{6\pi}{7}}_{0}=0$$

-۸۰۰ [۴] عبارت A را ساده می‌کنیم.

$$A=\sin\frac{10\pi}{3}\cos\frac{11\pi}{6}+\tan\frac{7\pi}{4}$$

$$=\sin(3\pi+\frac{\pi}{3})\cos(2\pi-\frac{\pi}{6})+\tan(2\pi-\frac{\pi}{4})$$

$$=(-\sin\frac{\pi}{3})(\cos\frac{\pi}{6})-\tan\frac{\pi}{4}=(-\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})-1=-\frac{3}{4}-1=-\frac{7}{4}$$

-۸۰۱ [۲] کسر را ساده کرده و صورت و مخرج کسر را بر $\cos 20^\circ$ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{\cos 20^\circ}{\sin 70^\circ+\cos 70^\circ}=\frac{\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ+\sin 20^\circ}=\frac{\frac{\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}}{\frac{\cos 20^\circ+\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}}$$

$$=\frac{1}{1+\tan 20^\circ}=\frac{1}{1+0/36}=\frac{1}{1/36}=\frac{100}{136}=\frac{25}{34}$$

-۸۰۲ [۲] کسر را ساده کرده و صورت و مخرج کسر را بر $\cos 25^\circ$ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{2\sin 205^\circ-\cos 155^\circ}{\cos 295^\circ+\sin 115^\circ}=\frac{-2\sin 25^\circ+\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ+\cos 25^\circ}$$

$$=\frac{-2\tan 25^\circ+1}{\tan 25^\circ+1}=\frac{-0/92+1}{0/46+1}=\frac{0/08}{1/46}=\frac{8}{146}=\frac{4}{73}$$

-۸۰۳ [۲] کسر را ساده کرده و صورت و مخرج کسر را بر $\cos\alpha$ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{\sin(270^\circ-\alpha)+k\cos(\alpha+180^\circ)}{2\cos(\alpha+90^\circ)-\cos(\alpha-180^\circ)}=\frac{-\cos\alpha-k\cos\alpha}{-2\sin\alpha+\cos\alpha}=3$$

$$\xrightarrow{\div\cos\alpha}\ \frac{-1-k}{-2\tan\alpha+1}=\frac{-k-1}{-4+1}=\frac{-k-1}{-3}=3$$

$$\Rightarrow\ k+1=9\ \Rightarrow\ k=8$$

۸۰۴- ۱ می‌دانیم: $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

بنابراین:

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\frac{1}{10}}=10 \Rightarrow \tan^2\theta=9$$

$$\xrightarrow{\tan\theta<0} \tan\theta=-3 \Rightarrow \cot\theta=-\frac{1}{3}$$

در نتیجه:

$$\cot\theta-\tan\theta=-\frac{1}{3}+3=\frac{8}{3}$$

۸۰۵- ۳ تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم.

$$\frac{3}{\sin\alpha}+\frac{2}{\cos\alpha}=0 \Rightarrow \frac{3}{\sin\alpha}=-\frac{2}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{2} \Rightarrow \tan\alpha=-\frac{3}{2} \Rightarrow \cot\alpha=-\frac{2}{3}$$

بنابراین: $6\tan\alpha-12\cot\alpha=-9+8=-1$

۸۰۶- ۱ کسر داده‌شده را ساده می‌کنیم.

$$\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=2 \Rightarrow 1+\sin\theta=2-2\sin\theta \Rightarrow \sin\theta=\frac{1}{3}$$

خواهیم داشت:

$$1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}=9 \Rightarrow \cot^2\theta=8$$

$$\xrightarrow{\cot\theta<0} \cot\theta=-2\sqrt{2}$$

بنابراین:

$$\cot(\theta+\frac{\pi}{2})=-\tan\theta=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

۸۰۷- ۳ تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم.

$$3\sin x+\cos(x+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2} \Rightarrow 3\sin x-\sin x=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x=\frac{1}{4}$$

خواهیم داشت:

$$\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16} \xrightarrow{\cos x<0} \cos x=-\frac{\sqrt{15}}{4}$$

۸۰۸- ۲ تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم.

$$\cot(\frac{\pi}{2}-x)=3 \Rightarrow \tan x=3 \Rightarrow \cot x=\frac{1}{3}$$

می‌دانیم:

$$\cos(x-\frac{\pi}{2})=\sin x$$

خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\sin^2 x}=1+\cot^2 x=1+\frac{1}{9}=\frac{10}{9} \Rightarrow \sin^2 x=\frac{9}{10}$$

$$\xrightarrow{\sin x>0} \sin x=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

۸۰۹- ۳ تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم.

$$3\cos(\pi-x)-2\sin(x+\frac{\pi}{2})=1$$

$$\Rightarrow -3\cos x-2\cos x=1 \Rightarrow \cos x=-\frac{1}{5}$$

می‌دانیم:

$$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\frac{1}{25}=\frac{24}{25} \Rightarrow \sin x=\pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

بنابراین:

$$2\sin(\pi+x)+\cos(\frac{\pi}{2}-x)=-2\sin x+\sin x$$

$$=-\sin x=\mp\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

۸۱۰- ۴ می‌دانیم: $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\frac{25}{144}=\frac{169}{144} \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{144}{169}$$

$$\xrightarrow{\cos\alpha<0} \cos\alpha=-\frac{12}{13}$$

$$\sin\alpha=\tan\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{5}{12}\times(-\frac{12}{13})=-\frac{5}{13}$$

خواهیم داشت:

$$\sin(\frac{7\pi}{2}-\alpha)\cos(\frac{11\pi}{2}+\alpha)=(-\cos\alpha)(\sin\alpha)$$

$$=(\frac{12}{13})(-\frac{5}{13})=-\frac{60}{169}$$

■ برای محاسبهٔ $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ می‌توانستیم از فیثاغورسی‌بودن اعداد ۵، ۱۲ و ۱۳ استفاده کنیم.

۸۱۱- ۲ تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم.

$$\frac{2\tan\alpha+\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}{\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)-2\cot(\pi-\alpha)}=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2\tan\alpha+\cot\alpha}{\tan\alpha+2\cot\alpha}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 4\tan\alpha+2\cot\alpha=3\tan\alpha+6\cot\alpha \Rightarrow \tan\alpha=4\cot\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cot\alpha}=4\cot\alpha \Rightarrow \cot^2\alpha=\frac{1}{4}$$

خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}=1+\cot^2\alpha=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4} \Rightarrow \sin^2\alpha=\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

۸۱۲- ۱ **روش اول:** می‌دانیم $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ و $\cot 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ است.

$$\frac{1}{1+\tan 60^\circ}+\frac{1}{1+\cot 60^\circ}=\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}+1+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})(1+\frac{\sqrt{3}}{3})}=\frac{2+\frac{4}{3}\sqrt{3}}{2+\frac{4}{3}\sqrt{3}}=1$$

روش دوم:

$$\frac{1}{1+\tan\alpha}+\frac{1}{1+\cot\alpha}=\frac{1}{1+\tan\alpha}+\frac{1}{1+\frac{1}{\tan\alpha}}$$

$$=\frac{1}{1+\tan\alpha}+\frac{\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=1$$

۸۱۳- ۳ می‌دانیم $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$ است، بنابراین:

$$(\frac{1}{3k-1})(4k+2)=1 \Rightarrow 4k+2=3k-1 \Rightarrow k=-3$$

۸۱۴- ۱ عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم.

$$\cot^2 x(\cos x-\frac{1}{\cos x})\sqrt{1+\tan^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}(\frac{\cos^2 x-1}{\cos x})\times\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$=\frac{\cos x}{\sin^2 x}(-\sin^2 x)\times\frac{1}{|\cos x|}=\frac{-\cos x}{|\cos x|}=\frac{-\cos x}{-\cos x}=1$$

($\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$ است، بنابراین $-1<\cos x<0$.)

۸۱۵- $\boxed{۴}$ می‌دانیم $\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و چون $\frac{۳\pi}{۲}<\alpha<۲\pi$ بنابراین $-۱<\sin x<۰$ است.

$$\frac{۲\sin^۲\frac{\pi}{۴}-\cos^۲x}{\sqrt{۱+\cot^۲x}}=\frac{۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲-\cos^۲x}{\sqrt{\frac{۱}{\sin^۲x}}}=\frac{۱-\cos^۲x}{\frac{۱}{|\sin x|}}$$

$$=\frac{\sin^۲x}{\frac{۱}{-\sin x}}=-\sin^۳x$$

۸۱۶- $\boxed{۳}$ تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sin\theta+۲\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=۲\Rightarrow\sin\theta+۲\cos\theta=۲\sin\theta-۲\cos\theta$$

$$\Rightarrow\sin\theta=۴\cos\theta\Rightarrow\tan\theta=۴$$

در نتیجه:

$$\cot(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)=-\tan\theta=-۴$$

۸۱۷- $\boxed{۴}$ تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم.

$$۷\sin^۲x+۳\cos^۲x=۵\Rightarrow ۷(۱-\cos^۲x)+۳\cos^۲x=۵$$

$$\Rightarrow ۴\cos^۲x=۲\Rightarrow\cos^۲x=\frac{۱}{۲}$$

خواهیم داشت

$$۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=۲\Rightarrow\tan^۲x=۱$$

۸۱۸- $\boxed{۲}$ $\alpha-\frac{\pi}{۳}$ را A و $\beta+\frac{\pi}{۴}$ را B می‌نامیم.

$$\sin^۲A+\sin^۲B=۱\Rightarrow\sin^۲A=۱-\sin^۲B$$

$$\Rightarrow\sin^۲A=\cos^۲B$$

بدیهی است که اگر $A+B=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ باشد، رابطهٔ فوق صحیح است.

بنابراین:

$$A+B=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\alpha-\frac{\pi}{۳}+\beta+\frac{\pi}{۴}=k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow\alpha+\beta=k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}(k\in\mathbb{Z})$$

اگر $k=۰$ باشد، $\alpha+\beta=\frac{۷\pi}{۱۲}$ خواهد شد.

۸۱۹- $\boxed{۴}$ کسر داده‌شده را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos^۳\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\cos^۲\alpha}=\frac{\tan\alpha+۱}{\frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha}}=\frac{۳+۱}{\frac{۱}{۱+۹}}=۴۰$$

۸۲۰- $\boxed{۳}$ دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\frac{۱}{\cos x}=\frac{۲}{۱-\sin x}\Rightarrow\frac{۱}{\cos^۲x}=\frac{۴}{(۱-\sin x)^۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۱-\sin^۲x}=\frac{۴}{(۱-\sin x)^۲}\Rightarrow\frac{۱}{۱+\sin x}=\frac{۴}{۱-\sin x}$$

$$\Rightarrow ۱-\sin x=۴(۱+\sin x)\Rightarrow\sin x=-\frac{۳}{۵}$$

با توجه به این‌که $۱-\sin x$ نامنفی و $\frac{۱}{\cos x}=\frac{۲}{۱-\sin x}$ است، نتیجه می‌گیریم $\cos x>۰$ می‌باشد.

$$\cos^۲x=۱-\sin^۲x=۱-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\cos x=\frac{۴}{۵}$$

بنابراین:

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-\frac{۳}{۵}}{\frac{۴}{۵}}=-\frac{۳}{۴}$$

■ برای محاسبهٔ $\tan x$ می‌توانستیم از اعداد فیثاغورسی ۳، ۴ و ۵ استفاده کنیم.

۸۲۱- $\boxed{۲}$ می‌دانیم:

$$۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{\cos^۲\theta}=۱+۲^۲=۵\Rightarrow\cos^۲\theta=\frac{۱}{۵}\Rightarrow\sin^۲\theta=۱-\frac{۱}{۵}=\frac{۴}{۵}$$

خواهیم داشت:

$$\sin^۴\theta+\cos^۴\theta=(\frac{۴}{۵})^۲+(\frac{۱}{۵})^۲=\frac{۱۷}{۲۵}$$

۸۲۲- $\boxed{۴}$ ابتدا تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\cos\theta}=۲\Rightarrow\sin\theta-\cos\theta=۲\cos\theta$$

$$\Rightarrow\sin\theta=۳\cos\theta\Rightarrow\tan\theta=۳$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{\cos^۲\theta}=۱+\tan^۲\theta=۱+۹=۱۰\Rightarrow\cos^۲\theta=\frac{۱}{۱۰}$$

در نتیجه:

$$\sin^۴\theta-\cos^۴\theta=(\sin^۲\theta-\cos^۲\theta)\underbrace{(\sin^۲\theta+\cos^۲\theta)}_{۱}$$

$$=\sin^۲\theta-\cos^۲\theta=۱-۲\cos^۲\theta=۱-\frac{۱}{۵}=\frac{۴}{۵}$$

۸۲۳- $\boxed{۲}$ می‌دانیم $\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}$ است. خواهیم داشت:

$$\sin^۶x+\cos^۶x=۱-۳\sin^۲x\cos^۲x=۱-۳(\frac{۱}{۲})^۲=۱-\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

۸۲۴- $\boxed{۳}$ دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\sin\theta-\cos\theta=\frac{۱}{۳}\Rightarrow(\sin\theta-\cos\theta)^۲=\frac{۱}{۹}$$

$$\Rightarrow ۱-۲\sin\theta\cos\theta=\frac{۱}{۹}\Rightarrow\sin\theta\cos\theta=\frac{۴}{۹}$$

خواهیم داشت:

$$\sqrt{\sin^۴\theta+\cos^۴\theta}=\sqrt{۱-۲\sin^۲\theta\cos^۲\theta}=\sqrt{۱-۲(\frac{۴}{۹})^۲}$$

$$=\sqrt{۱-\frac{۳۲}{۸۱}}=\sqrt{\frac{۴۹}{۸۱}}=\frac{۷}{۹}$$

۸۲۵- $\boxed{۱}$ ابتدا $\sin\theta\cos\theta$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{۱}{۴}\Rightarrow(\sin\theta+\cos\theta)^۲=\frac{۱}{۱۶}$$

$$\Rightarrow ۱+۲\sin\theta\cos\theta=\frac{۱}{۱۶}\Rightarrow\sin\theta\cos\theta=-\frac{۱۵}{۳۲}$$

خواهیم داشت:

$$\sin^۳\theta+\cos^۳\theta$$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)^۳-۳\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$

$$=(\frac{۱}{۴})^۳-۳(-\frac{۱۵}{۳۲})(\frac{۱}{۴})=\frac{۱}{۶۴}+\frac{۴۵}{۱۲۸}=\frac{۴۷}{۱۲۸}$$

۸۲۶- $\boxed{۳}$ می‌دانیم:

$$\tan x+\cot x=\frac{۱}{\sin x\cos x}$$

بنابراین:

$$\tan^۲x+\cot^۲x=(\tan x+\cot x)^۲-۲$$

$$=(\frac{۱}{\sin x\cos x})^۲-۲=۴^۲-۲=۱۴$$

۸۲۷- $\boxed{۳}$ ابتدا $\sin\alpha\cos\alpha$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۲۵}{۸}\Rightarrow\frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{۲۵}{۸}$$

$$\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۸}{۲۵}$$

اگر $|\sin\alpha-\cos\alpha|=A$ باشد، خواهیم داشت:

$$A^۲=۱-۲\sin\alpha\cos\alpha=۱-\frac{۱۶}{۲۵}=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow A=\frac{۳}{۵}$$

-۸۲۸ [۴] عبارت سمت راست تساوی را ساده می‌کنیم.

$$\frac{۱}{\cos^{۲} x}-\frac{۱}{\cos^{۴} x}=\frac{\cos^{۲} x-۱}{\cos^{۴} x}=\frac{-\sin^{۲} x}{\cos^{۲} x}\times\frac{۱}{\cos^{۲} x}$$

$$=-\tan^{۲} x(۱+\tan^{۲} x)=-\tan^{۲} x-\tan^{۴} x$$

$$=a\tan^{۲} x+b\tan^{۴} x \Rightarrow a=b=-۱ \Rightarrow a+b=-۲$$

-۸۲۹ [۴] تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم.

$$\cos(\pi+\theta)+\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)=-\cos\theta-\sin\theta=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow (\sin\theta+\cos\theta)^{۲}=\frac{۱}{۹} \Rightarrow ۱+\sin ۲\theta=\frac{۱}{۹}$$

$$\Rightarrow \sin ۲\theta=-\frac{۸}{۹}$$

-۸۳۰ [۳] رابطهٔ $\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^{۲}\alpha$ برقرار است. بنابراین:

$$\cos ۲\alpha=۱-۲(-\frac{\sqrt{۷}}{۳})^{۲}=۱-\frac{۱۴}{۹}=-\frac{۵}{۹}$$

-۸۳۱ [۳] ابتدا $\sin\alpha$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\sin\alpha^{۲}=۱-\cos^{۲}\alpha=۱-\frac{۸}{۹}=\frac{۱}{۹}\xrightarrow{\sin\alpha<۰}\sin\alpha=-\frac{۱}{۳}$$

بنابراین:

$$\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha=۲(-\frac{۱}{۳})(-\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})=\frac{۴\sqrt{۲}}{۹}$$

-۸۳۲ [۱] **روش اول**: مقدار $\cos^{۲}\alpha$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}=۱+\tan^{۲}\alpha=۱+\frac{۱}{۴}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow\cos^{۲}\alpha=\frac{۴}{۵}$$

بنابراین:

$$\cos ۲\alpha=۲\cos^{۲}\alpha-۱=\frac{۸}{۵}-۱=\frac{۳}{۵}$$

روش دوم: اتحادهای زیر برقرارند:

$$\sin ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^{۲}\alpha}\ ,\ \cos ۲\alpha=\frac{۱-\tan^{۲}\alpha}{۱+\tan^{۲}\alpha}$$

در نتیجه:

$$\cos ۲\alpha=\frac{۱-\frac{۱}{۴}}{۱+\frac{۱}{۴}}=\frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۵}{۴}}=\frac{۳}{۵}$$

-۸۳۳ [۴] دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}\Rightarrow(\sin\theta+\cos\theta)^{۲}=\frac{۹}{۱۰}$$

$$\Rightarrow ۱+\sin ۲\theta=\frac{۹}{۱۰}\Rightarrow\sin ۲\theta=-\frac{۱}{۱۰}$$

-۸۳۴ [۳] اگر $A=\sin\theta+\cos\theta$ باشد، خواهیم داشت:

$$A^{۲}=۱+\sin ۲\theta=۱+۰/۶۹=۱/۶۹\xrightarrow{A>۰}A=۱/۳$$

-۸۳۵ [۳] ابتدا عبارت P را ساده می‌کنیم.

$$P=\frac{\cos^{۲}\alpha}{۱+\sin\alpha}-\frac{\sin^{۲}\alpha}{۱-\cos\alpha}=\frac{۱-\sin^{۲}\alpha}{۱+\sin\alpha}-\frac{۱-\cos^{۲}\alpha}{۱-\cos\alpha}$$

$$=(۱-\sin\alpha)-(۱+\cos\alpha)=-\sin\alpha-\cos\alpha$$

بنابراین:

$$P^{۲}-۱=(-\sin\alpha-\cos\alpha)^{۲}-۱=۱+\sin ۲\alpha-۱=\sin ۲\alpha$$

-۸۳۶ [۱] ابتدا مقدار $\tan\alpha$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{۳-\tan\alpha}{۴+۲\tan\alpha}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۹-۳\tan\alpha=۴+۲\tan\alpha$$

$$\Rightarrow\tan\alpha=۱$$

روش اول: مقدار $\cos^{۲}\alpha$ را به دست می‌آوریم.

$$\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}=۱+\tan^{۲}\alpha=۲\Rightarrow\cos^{۲}\alpha=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$\sin^{۲}\alpha-\cos ۲\alpha=(۱-\cos^{۲}\alpha)-(۲\cos^{۲}\alpha-۱)$$

$$=۲-۳\cos^{۲}\alpha=۲-\frac{۳}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

روش دوم:

$$\tan\alpha=۱\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow\sin^{۲}\alpha-\cos ۲\alpha=\sin^{۲}\frac{\pi}{۴}-\cos\frac{\pi}{۲}=\frac{۱}{۲}-۰=\frac{۱}{۲}$$

-۸۳۷ [۲] ابتدا $\cos ۲\theta$ را به دست می‌آوریم.

$$\cos ۲\theta=۱-۲\sin^{۲}\theta=۱-۲(\frac{۷}{۱۶})=\frac{۱}{۸}$$

بنابراین:

$$\cos ۴\theta=۲\cos^{۲} ۲\theta-۱=۲(\frac{۱}{۸})^{۲}-۱=-\frac{۳۱}{۳۲}$$

-۸۳۸ [۲] از نامساوی $\sin^{۲}\theta<\sin\theta$ نتیجه می‌شود $\sin\theta>۰$ است.

از طرفی: $\sin ۲\theta<۰\Rightarrow ۲\sin\theta\cos\theta<۰\xrightarrow{\sin\theta>۰}\cos\theta<۰$

$\sin\theta>۰$ و $\cos\theta<۰$ است بنابراین انتهای کمان θ در ناحیهٔ دوم است.

-۸۳۹ [۲] ابتدا مختصات P را به دست می‌آوریم.

$$x^{۲}+(x+\frac{۱}{۵})^{۲}=۱\Rightarrow ۲x^{۲}+\frac{۲}{۵}x-\frac{۲۴}{۲۵}=۰$$

$$\Rightarrow x^{۲}+\frac{x}{۵}-\frac{۱۲}{۲۵}=۰\Rightarrow x=\frac{-\frac{۱}{۵}\pm\sqrt{\frac{۱}{۲۵}+\frac{۴۸}{۲۵}}}{۲}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-\frac{۱}{۵}\pm\frac{۷}{۵}}{۲}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۳}{۵} & \text{غ‌ق‌ق}\\ x=-\frac{۴}{۵} & \checkmark\end{cases}$$

(P در ناحیهٔ سوم است.)

$$\Rightarrow P(-\frac{۴}{۵},-\frac{۳}{۵})\xrightarrow{\text{زاویهٔ حاده است}\ \theta}\sin\theta=\frac{۳}{۵}\ ,\ \cos\theta=\frac{۴}{۵}$$

بنابراین:

$$\sin ۲\theta=۲\sin\theta\cos\theta=۲(\frac{۳}{۵})(\frac{۴}{۵})=\frac{۲۴}{۲۵}$$

-۸۴۰ [۲] $\sin\alpha=۰/۸$ و انتهای کمان α در ناحیهٔ دوم است.
بنابراین $\cos\alpha=-۰/۶$ می‌باشد.

$$\frac{۱-\cos(\pi+۲\alpha)}{۱+\cos(\frac{\pi}{۲}-۲\alpha)}=\frac{۱+\cos ۲\alpha}{۱+\sin ۲\alpha}=\frac{۲\cos^{۲}\alpha}{۱+۲\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{۲\times۰/۳۶}{۱+۲(-۰/۶)(۰/۸)}=\frac{۰/۷۲}{۰/۰۴}=۱۸$$

-۸۴۱ [۱] اگر $\alpha-\frac{\pi}{۶}=\beta$ باشد، $۲\alpha-\frac{\pi}{۳}=۲\beta$ است.

$$\sin(۲\alpha+\frac{\pi}{۶})=\sin(۲\alpha-\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۲})=\sin(۲\beta+\frac{\pi}{۲})$$

$$=\cos ۲\beta=۱-۲\sin^{۲}\beta=۱-۲(\frac{۱}{\sqrt{۵}})^{۲}=\frac{۳}{۵}$$

-۸۴۲ [۳] تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم.

$$۴\cos^{۲}x-\sin^{۲}x=\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۴\cos^{۲}x-(۱-\cos^{۲}x)=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow\cos^{۲}x=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین:

$$\cos ۲x=۲\cos^{۲}x-۱=\frac{۱}{۲}-۱=-\frac{۱}{۲}$$

۸۴۳- [۱] اگر $x-\frac{\pi}{5}=\alpha$ باشد، آن‌گاه $x+\frac{3\pi}{10}=\alpha+\frac{\pi}{2}$ است.

$$2\cos(x-\frac{\pi}{5})+\sin(x+\frac{3\pi}{10})=1$$

$$\Rightarrow 2\cos\alpha+\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})=1 \Rightarrow 2\cos\alpha+\cos\alpha=1$$

$$\Rightarrow 3\cos\alpha=1 \Rightarrow \cos\alpha=\frac{1}{3}$$

در نتیجه:

$$\cos(\frac{2\pi}{5}-2x)=\cos(2x-\frac{2\pi}{5})=\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$=\frac{2}{9}-1=-\frac{7}{9}$$

۸۴۴- [۴] دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(\sqrt{2}\sin x-2\cos x)^2=3$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x+4\cos^2 x-4\sqrt{2}\sin x\cos x=3$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x-4\sqrt{2}\sin x\cos x=1$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x-1=4\sqrt{2}\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow \cos 2x=2\sqrt{2}\sin 2x \Rightarrow \tan 2x=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

۸۴۵- [۲] می‌دانیم $\cos 75^\circ=\sin 15^\circ$ است.

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 15^\circ=\frac{1-\cos 30^\circ}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 15^\circ=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

بنابراین:

$$\cos 75^\circ=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow a=6\,,\, b=2$$

$$\Rightarrow a-b=4$$

۸۴۶- [۱] می‌دانیم $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$، بنابراین:

$$\sin^2\frac{3\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

۸۴۷- [۴] عبارت A را ساده می‌کنیم.

$$A=\sin^3\theta\cos\theta-\cos^3\theta\sin\theta$$

$$=\sin\theta\cos\theta(\sin^2\theta-\cos^2\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta(-\cos 2\theta)$$

$$=-\frac{1}{4}\sin 4\theta=-\frac{1}{4}\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{8}$$

۸۴۸- [۲] تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم.

$$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha \qquad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=3 \Rightarrow \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=3 \Rightarrow \cot\frac{\theta}{2}=3$$

بنابراین:

$$\tan(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})=-\cot\frac{\theta}{2}=-3$$

۸۴۹- [۳] تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم.

$$1+\cos\theta=\cos\frac{\theta}{2} \Rightarrow 2\cos^2\frac{\theta}{2}=\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\xrightarrow{\frac{\theta}{2}\ \text{زاویهٔ حاده است}} \cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}$$

روش اول: $\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=2(\frac{1}{2})^2-1=-\frac{1}{2}$

بنابراین:

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2(-\frac{1}{2})^2-1=-\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ انتهای کمان 2θ در ناحیهٔ سوم است.

$$1+\tan^2 2\theta=\frac{1}{\cos^2 2\theta}=4 \Rightarrow \tan^2 2\theta=3$$

$\Rightarrow \tan 2\theta=\sqrt{3}$ (ناحیهٔ سوم)

روش دوم: $\frac{\theta}{2}$ زاویهٔ حاده و $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}$ است. در نتیجه $\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{3}$ است.

$$\Rightarrow 2\theta=\frac{4\pi}{3} \Rightarrow \tan 2\theta=\sqrt{3}$$

۸۵۰- [۲] می‌دانیم: $\tan x-\cot x=-2\cot 2x$

بنابراین:

$$\tan x-\cot x=-\frac{2}{\tan 2x}=-\frac{2}{\frac{1}{3}}=-6$$

۸۵۱- [۴] می‌دانیم $\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$ است. بنابراین:

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{12}$$

خواهیم داشت:

$$\sin^4\frac{\pi}{12}+\sin^4\frac{5\pi}{12}=\sin^4\frac{\pi}{12}+\cos^4\frac{\pi}{12}$$

$$1-2\sin^2\frac{\pi}{12}\cos^2\frac{\pi}{12}=1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{6}=1-\frac{1}{2}(\frac{1}{4})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

۸۵۲- [۲] می‌دانیم:

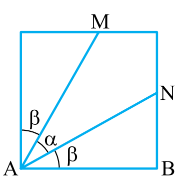
$$\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$

بنابراین:

$$f(\frac{\pi}{8})=1-\frac{3}{4}\sin^2\frac{\pi}{4}=1-\frac{3}{4}(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

۸۵۳- [۳] با توجه به شکل واضح است $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$ بنابراین:

$$2\alpha=\pi-4\beta$$



اگر ضلع مربع را x بنامیم، خواهیم داشت:

$$AN^2=x^2+(\frac{x}{2})^2=\frac{5}{4}x^2 \Rightarrow AN=\frac{\sqrt{5}}{2}x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\beta=\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}x}=\dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ \cos\beta=\dfrac{x}{\frac{\sqrt{5}}{2}x}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\sin 2\beta=2\sin\beta\cos\beta=\frac{4}{5}$$

$$\xrightarrow{2\beta<\frac{\pi}{2}} \cos 2\beta=\sqrt{1-\sin^2 2\beta}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$$

حال $\sin ۲\alpha$ را به دست می‌آوریم.

$$\sin ۲\alpha = \sin(\pi - ۴\beta) = \sin ۴\beta = ۲\sin ۲\beta \cos ۲\beta$$

$$= ۲(\frac{۴}{۵})(\frac{۳}{۵}) = \frac{۲۴}{۲۵}$$

۸۵۴- [۳] در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$\frac{BC}{AC} = \sin ۱۵^\circ \Rightarrow AC = \frac{BC}{\sin ۱۵^\circ} = \frac{۲}{\sin ۱۵^\circ}$$

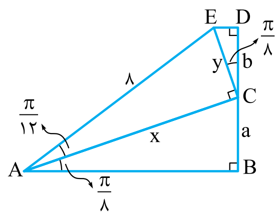
در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACD داریم:

$$\frac{AC}{AD} = \cos ۱۵^\circ \Rightarrow AD = \frac{AC}{\cos ۱۵^\circ} = \frac{\frac{۲}{\sin ۱۵^\circ}}{\cos ۱۵^\circ}$$

$$= \frac{۲}{\sin ۱۵^\circ \cos ۱۵^\circ} = \frac{۲}{\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ} = \frac{۲}{\frac{۱}{۴}} = ۸$$

۸۵۵- [۲] با توجه به شکل داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ABC}: a = x\sin\frac{\pi}{۸}\\ \overset{\Delta}{CDE}: b = y\cos\frac{\pi}{۸}\end{array}\right\} \Rightarrow ab = xy\sin\frac{\pi}{۸}\cos\frac{\pi}{۸}$$



$$\Rightarrow ab = \frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۴}xy$$

$$\Rightarrow ab = \frac{\sqrt{۲}}{۴}xy$$

خواهیم داشت:

$$\overset{\Delta}{ACE}: \left\{\begin{array}{l} x = ۸\cos\frac{\pi}{۱۲}\\ y = ۸\sin\frac{\pi}{۱۲}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow xy = ۶۴\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{\pi}{۱۲} = ۳۲\sin\frac{\pi}{۶} = ۱۶$$

بنابراین:

$$ab = \frac{\sqrt{۲}}{۴}\times ۱۶ = ۴\sqrt{۲}$$

۸۵۶- [۴] دورهٔ تناوب تابع $y = \sin ax$ و $y = \cos ax$ به صورت $T = \frac{۲\pi}{|a|}$ می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} y = ۱+۲\cos ۲\pi x \Rightarrow T_۱ = \frac{۲\pi}{۲\pi} = ۱\\ y = ۲-۳\sin\frac{\pi}{۳}x \Rightarrow T_۲ = \frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۳}} = ۶\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{T_۱}{T_۲} = \frac{۱}{۶}$$

۸۵۷- [۱] ابتدا $|a|$ را به دست می‌آوریم.

$$y = ۳\sin\frac{\pi}{a}x \Rightarrow T_۱ = \frac{۲\pi}{|\frac{\pi}{a}|} = ۴ \Rightarrow |a| = ۲$$

خواهیم داشت:

$$y = ۱+\tan a\pi x \Rightarrow T_۲ = \frac{\pi}{|a\pi|} = \frac{۱}{|a|} = \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

۸۵۸- [۳] ابتدا $f(x)$ را ساده می‌کنیم.

$$f(x) = \sin x\sin(x+\frac{\pi}{۲}) = \sin x\cos x = \frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

$$\Rightarrow T = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$$

۸۵۹- [۱] ابتدا تابع را ساده می‌کنیم.

$$y = \tan ۳x - \cot ۳x = -۲\cot ۶x$$

دورهٔ تناوب تابع $y = \tan ax$ و $y = \cot ax$ به صورت $T = \frac{\pi}{|a|}$ می‌باشد.

$$\Rightarrow T = \frac{\pi}{۶}$$

۸۶۰- [۲] ابتدا y را ساده می‌کنیم.

$$y = f(x+\frac{\pi}{۲})f(x-\frac{\pi}{۴}) = \cos(۲x+\pi)\cos(۲x-\frac{\pi}{۲})$$

$$= (-\cos ۲x)(\sin ۲x) = -\frac{۱}{۲}\sin ۴x \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{۴} = \frac{\pi}{۲}$$

۸۶۱- [۳] ابتدا $f(x)$ را ساده می‌کنیم.

$$f(x) = ۴\sin^۲ ax = ۴(\frac{۱-\cos ۲ax}{۲}) = ۲-۲\cos ۲ax$$

$$\Rightarrow T_۱ = \frac{۲\pi}{|۲a|} = \frac{\pi}{|a|}$$

دورهٔ تناوب $g(x)$ را به دست می‌آوریم.

$$g(x) = \tan\frac{۳}{۴}x \Rightarrow T_۲ = \frac{\pi}{\frac{۳}{۴}} = \frac{۴\pi}{۳}$$

بنابراین:

$$T_۱ = \frac{۱}{۲}T_۲ \Rightarrow \frac{\pi}{|a|} = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow |a| = \frac{۳}{۲} \xrightarrow{a>۰} a = \frac{۳}{۲}$$

■ می‌توانیم از نکتهٔ زیر استفاده کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} y=\sin^۲ ax\\ y=\cos^۲ ax\end{array}\right\} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$$

۸۶۲- [۲] دورهٔ تناوب $y = \sin^۲ ax$ و $y = \cos^۲ ax$ برابر با $\frac{\pi}{|a|}$ می‌باشد.

$$f(x) = ۵\sin^۲\frac{\pi}{۶}x \Rightarrow T_۱ = \frac{\pi}{\frac{\pi}{۶}} = ۶$$

$$g(x) = \tan\frac{۲\pi}{۳a}x \Rightarrow T_۲ = \frac{\pi}{|\frac{۲\pi}{۳a}|} = \frac{۳|a|}{۲}$$

بنابراین:

$$T_۱ = T_۲ \Rightarrow \frac{۳|a|}{۲} = ۶ \Rightarrow |a| = ۴ \xrightarrow{a>۰} a = ۴$$

۸۶۳- [۴] دورهٔ تناوب $y = f(۶ax)$ برابر ۳ است. در تابع $f(\frac{a}{۳}x)$ ضریب x، نسبت به تابع اول، $\frac{۱}{۱۸}$ برابر شده است. در نتیجه دورهٔ تناوب آن ۱۸ برابر دورهٔ تناوب $y = f(۶ax)$ یعنی ۵۴ می‌باشد. (ضریب ۶ در $y = ۶f(\frac{a}{۳}x)$ تأثیری در دورهٔ تناوب ندارد.)

۸۶۴- [۲] در تابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ روابط مقابل برقرار است: $\max = |a| + c \quad \min = -|a| + c$

بنابراین:

$$f(x) = ۵-۳\sin \pi x \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\max = ۵+۳ = ۸\\ \min = ۵-۳ = ۲\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \max + \min = ۱۰$$

$$T = \frac{۲\pi}{|\pi|} = ۲$$

در نتیجه:

$$\frac{۱۰}{۲} = ۵$$

۸۶۵- [۳] در تابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ روابط زیر برقرار است:

$$|a| = \frac{\max - \min}{۲} \quad c = \frac{\max + \min}{۲} \quad T = \frac{۲\pi}{|b|}$$

بنابراین:

$$|a| = \frac{۴-(-۲)}{۲} = ۳$$

$$c = \frac{۴-۲}{۲} = ۱ \quad T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{\pi}{۶} \Rightarrow |b| = ۱۲$$

در نتیجه [۳] درست است.

۸۶۶- [۱] ابتدا $|a|$ را به دست می‌آوریم.

$$y=۱+a\sin(\frac{a\pi}{۳}x) \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|\frac{a\pi}{۳}|}=۴ \Rightarrow |a|=\frac{۳}{۲}$$

خواهیم داشت:

$$|a|=\frac{max-min}{۲}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow max-min=۳$$

۸۶۷- [۲] دورهٔ تناوب تابع $y=\frac{a}{۲}\cos ۳ax$ برابر $T=\frac{۲\pi}{|۳a|}$ است.

می‌دانیم:

$$\frac{max-min}{۲}=\frac{|a|}{۲} \Rightarrow max-min=|a|$$

بنابراین:

$$T\times(max-min)=\frac{۲\pi}{|۳a|}\times|a|=\frac{۲\pi}{۳}$$

۸۶۸- [۴] با توجه به نمودار، تابع در مبدأ مختصات نزولی بوده و از نقاط $(۰,۰)$ و $(\frac{\pi}{۲},۳)$ عبور می‌کند.

در [۱] تابع از $(\frac{\pi}{۲},۳)$ عبور نمی‌کند.

در [۲] تابع از $(۰,۰)$ عبور نمی‌کند.

در [۳] تابع در مبدأ مختصات صعودی است.

۸۶۹- [۱] در گزینه‌های [۲] و [۳] ماکزیمم تابع ۳ و مینیمم تابع ۱- است که با توجه به شکل نادرست است.

در [۴] ضریب $\cos\frac{\pi}{۲}x$ منفی بوده و تابع در $x=۰$ دارای مینیمم است که با توجه به شکل نادرست است.

در [۱] ماکزیمم و مینیمم به ترتیب ۱ و ۳- بوده و در $x=۰$ دارای ماکزیمم است.

۸۷۰- [۳] طول پاره‌خط AB برابر با دورهٔ تناوب تابع است.

$$y=۳-۳\sin\frac{\pi}{۴}x \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۴}}=۸ \Rightarrow AB=۸$$

ارتفاع MH در مثلث AMB برابر ماکزیمم تابع است.

$$max=۳+|-۳|=۶ \Rightarrow MH=۶$$

بنابراین:

$$S_{AMB}=\frac{AB\times MH}{۲}=\frac{۸\times۶}{۲}=۲۴$$

۸۷۱- [۱] دورهٔ تناوب تابع با توجه به شکل برابر ۴ است. بنابراین در تابع $y=a\cos bx+c$ خواهیم داشت:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=۴ \Rightarrow |b|=\frac{\pi}{۲}$$

ماکزیمم تابع ۴ و مینیمم تابع صفر است.

$$|a|=\frac{max-min}{۲}=\frac{۴-۰}{۲}=۲$$

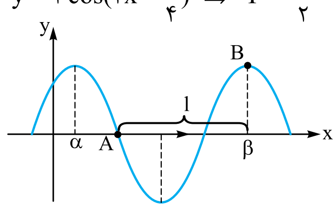
$$c=\frac{max+min}{۲}=\frac{۴+۰}{۲}=۲$$

تابع در $x=۰$ دارای ماکزیمم بوده و در نتیجه a مثبت و برابر با ۲ است.

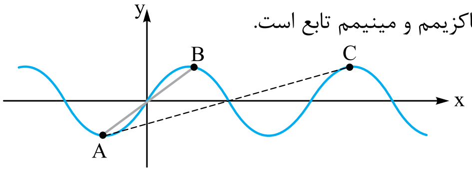
$\Rightarrow y=۲\cos\frac{\pi x}{۲}+۲$ [۱] درست است:

۸۷۲- [۳] فاصلهٔ بین α و β در شکل برابر دورهٔ تناوب است. واضح است که فاصلهٔ بین A و β یعنی ℓ برابر $\frac{۳}{۴}$ دورهٔ تناوب می‌باشد.

$$y=۳\cos(۲x-\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi \Rightarrow \ell=\frac{۳\pi}{۴}$$



۸۷۳- [۳] برای این‌که شیب خط مذکور بیشترین مقدار باشد، نقاط مورد نظر باید دو نقطهٔ ماکزیمم و مینیمم متوالی باشند. فاصلهٔ بین طول‌های این دو نقطه برابر نصف دورهٔ تناوب و فاصلهٔ بین عرض‌های آن‌ها برابر اختلاف ماکزیمم و مینیمم تابع است.



$$y=۳\sin\frac{\pi}{۴}x$$

$$T=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۴}}=۸ \Rightarrow \frac{۱}{۲}T=۴$$

$$max-min=۲\times۳=۶$$

بنابراین:

$$m_{AB}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

۸۷۴- [۳] **روش اول**: اگر $۴x+\frac{\pi}{۶}=\alpha$ باشد، آن‌گاه:

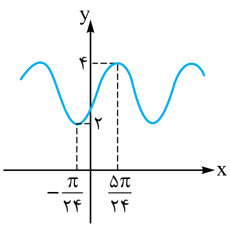
$$۰<x<k \Rightarrow \frac{\pi}{۶}<۴x+\frac{\pi}{۶}<۴k+\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \frac{\pi}{۶}<\alpha<۴k+\frac{\pi}{۶}$$

می‌دانیم تابع $y=\cos\alpha$ در بازهٔ $(\frac{\pi}{۶},\pi)$ نزولی و در نتیجه تابع $f(x)=۳-\cos\alpha$ در این بازه صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار α برابر π می‌باشد.

$$۴k+\frac{\pi}{۶}=\pi \Rightarrow k=\frac{۵\pi}{۲۴}$$

روش دوم: رسم شکل:

نمودار تابع $y=۳-\cos(۴x+\frac{\pi}{۶})$ به صورت مقابل است. بدیهی است تابع در فاصلهٔ $(۰,\frac{۵\pi}{۲۴})$ صعودی است.



۸۷۵- [۱] فاصلهٔ طول‌های دو نقطهٔ A و B برابر دورهٔ تناوب تابع است.

$$y=a\cos\frac{\pi}{۲}x \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}}=۴ \Rightarrow AB=۴$$

$\Rightarrow$ طول نقطهٔ B برابر ۴ است

تابع در $x=۰$ دارای ماکزیمم است. در نتیجه a مثبت است. ماکزیمم تابع برابر a و مینیمم برابر $-a$ است. بنابراین:

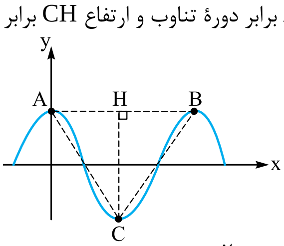
$$A(۰,a) \quad B(۴,a) \quad C(۲,-a)$$

(نقطهٔ C مینیمم بوده و طول آن وسط طول دو نقطهٔ ماکزیمم متوالی است.)

$$m_{AC}\times m_{BC}=-۱ \Rightarrow (-a)(a)=-۱ \Rightarrow a^۲=۱$$

$$\xrightarrow{a>۰} a=۱$$

۸۷۶- [۴] حداقل مساحت مثلث زمانی است که نقاط A و B، دو نقطهٔ ماکزیمم متوالی باشند. طول ضلع AB برابر دورهٔ تناوب و ارتفاع CH برابر اختلاف ماکزیمم و مینیمم تابع است.



$$AB=T=\frac{۲\pi}{|a|}$$

$$CH=max-min=۲|a|$$

$$\Rightarrow S=\frac{AB\times CH}{۲}=\frac{\frac{۲\pi}{|a|}\times۲|a|}{۲}=۲\pi$$

۸۷۷- $\boxed{۴}$ AC برابر با نصف دورهٔ تناوب است.

$$y=a\cos a\pi x$$

$$T=\frac{۲\pi}{|a\pi|}=\frac{۲}{|a|}\Rightarrow AC=\frac{۱}{|a|}\xrightarrow{a<۰}AC=-\frac{۱}{a}$$

(تابع در $x=۰$ مینیمم دارد بنابراین a منفی است.)

در نتیجه مختصات نقاط A و C به دست می‌آید.

$$A(\frac{۱}{۲a},۰)\ ,\ C(-\frac{۱}{۲a},۰)$$

مختصات نقطهٔ B به صورت $(۰,a)$ می‌باشد. بدیهی است مثلث ABC متساوی‌الساقین است. برای این‌که متساوی‌الاضلاع باشد کافی است: $AB=AC$

$$AB=AC\Rightarrow\sqrt{\frac{۱}{۴a^۲}+a^۲}=-\frac{۱}{a}\Rightarrow\frac{۱}{۴a^۲}+a^۲=\frac{۱}{a^۲}$$

$$\Rightarrow a^۲=\frac{۳}{۴a^۲}\Rightarrow a^۴=\frac{۳}{۴}\Rightarrow a=-\sqrt[۴]{\frac{۳}{۴}}$$

۸۷۸- $\boxed{۴}$ با توجه به نمودار دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{\pi}{۲}$ و مینیمم تابع -۳ است.

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow|b|=۴$$

$$\min=-۱-|a|=-۳\Rightarrow|a|=۲\Rightarrow|\frac{a}{b}|=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

تابع در $x=۰$ نزولی و در نتیجه $ab<۰$ است، بنابراین:

$$\frac{a}{b}=-\frac{۱}{۲}$$

۸۷۹- $\boxed{۲}$ با توجه به نمودار، فاصلهٔ بین $x=۰$ تا $x=۳$، $\frac{۳}{۴}$ دورهٔ تناوب است:

$$y=a\sin b\pi x+۱$$

$$\frac{۳}{۴}T=۳\Rightarrow T=۴\Rightarrow\frac{۲\pi}{|b\pi|}=۴\Rightarrow|b|=\frac{۱}{۲}$$

ماکزیمم تابع برابر ۳ می‌باشد.

$$\max=|a|+۱=۳\Rightarrow|a|=۲\Rightarrow|ab|=۱$$

تابع در $x=۰$ نزولی بوده و در نتیجه $ab<۰$ است. بنابراین: $ab=-۱$

۸۸۰- $\boxed{۱}$ با توجه به نمودار دورهٔ تناوب تابع ۶ و ماکزیمم آن ۳ است.

$$y=a-\cos b\pi x$$

$$T=\frac{۲\pi}{|b\pi|}=۶\Rightarrow|b|=\frac{۱}{۳}$$

$$\max=a+۱=۳\Rightarrow a=۲$$

(b می‌تواند $\frac{۱}{۳}$ یا $-\frac{۱}{۳}$ باشد و تفاوتی ایجاد نمی‌شود.)

$$\Rightarrow y=۲-\cos\frac{\pi}{۳}x\xrightarrow{x=\frac{۱۷}{۲}}y=۲-\cos\frac{۱۷\pi}{۶}$$

$$=۲-\cos\frac{۵\pi}{۶}=۲+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۸۸۱- $\boxed{۳}$ فاصلهٔ بین طول‌های دو نقطهٔ ماکزیمم و مینیمم متوالی نصف دورهٔ تناوب است.

$$y=۲+a\cos b\pi x$$

$$\frac{T}{۲}=۲\Rightarrow T=۴$$

$$\min=-۱\Rightarrow۲-|a|=-۱\Rightarrow|a|=۳$$

بنابراین: $\max=۲+|a|=۲+۳=۵$

در نتیجه: $\frac{\max}{T}=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$

۸۸۲- $\boxed{۴}$ نمودار در دو دورهٔ تناوب رسم شده است، بنابراین:

$$۲T=\frac{۴}{۵}\Rightarrow T=\frac{۲}{۵}$$

$$y=۱+a\sin b\pi x\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b\pi|}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow|b|=۵$$

$$\min=-۲\Rightarrow۱-|a|=-۲\Rightarrow|a|=۳$$

تابع در $x=۰$ صعودی بوده و $ab>۰$ می‌باشد.

$$\Rightarrow\begin{cases}a=۳,b=۵\\a=-۳,b=-۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=۸\ \checkmark\\a+b=-۸\end{cases}$$

۸۸۳- $\boxed{۱}$ مینیمم تابع -۶ و ماکزیمم آن صفر است.

$$f(x)=a+b\sin\frac{\pi}{۳}x$$

$$a=\frac{\max+\min}{۲}=\frac{۰-۶}{۲}=-۳$$

$$|b|=\frac{\max-\min}{۲}=\frac{۰+۶}{۲}=۳$$

تابع در $x=۰$ نزولی بوده و $b<۰$ است. بنابراین $b=-۳$ می‌باشد.

در نتیجه:

$$f(x)=-۳-۳\sin\frac{\pi}{۳}x\Rightarrow f(\frac{۹}{۲})=-۳-۳\sin\frac{۳\pi}{۲}$$

$$=-۳+۳=۰$$

■ دورهٔ تناوب تابع ۶ می‌باشد. با توجه به نمودار طول نقطهٔ ماکزیمم $(\frac{۳}{۴}T)$ برابر $\frac{۹}{۲}$ و در نتیجه $f(\frac{۹}{۲})=۰$ است.

۸۸۴- $\boxed{۱}$ از $x=۰$ تا $x=۵$، $\frac{۳}{۲}$ دورهٔ تناوب است.

$$\frac{۳}{۲}T=۵\Rightarrow T=\frac{۱۰}{۳}$$

$$f(x)=a\cos b\pi x-۲\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b\pi|}=\frac{۱۰}{۳}\Rightarrow|b|=\frac{۳}{۵}$$

$$\max=۲\Rightarrow-۲+|a|=۲\Rightarrow|a|=۴$$

تابع در $x=۰$ دارای ماکزیمم بوده و $a>۰$ است. بنابراین $a=۴$ و $b=\pm\frac{۳}{۵}$ است.

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=۴+\frac{۳}{۵}=۴/۶\\a+b=۴-\frac{۳}{۵}=۳/۴\end{cases}$$

۸۸۵- $\boxed{۱}$ با توجه به نمودار دورهٔ تناوب برابر $\frac{۱۳\pi}{۱۸}-\frac{\pi}{۱۸}=\frac{۲\pi}{۳}$ و ماکزیمم تابع $\frac{۳}{۲}$ است.

$$y=a-۳\sin bx$$

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow|b|=۳\xrightarrow{b<۰}b=-۳$$

(تابع در $x=۰$ صعودی و $-۳b$ مثبت است.)

$$\max=a+|-۳|=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

در نتیجه: $۲ab=۲(-\frac{۳}{۲})(-۳)=۹$

۸۸۶- $\boxed{۳}$ با توجه به نمودار دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{۳}$، ماکزیمم ۳ و مینیمم -۱ است.

$$y=a\sin bx+c$$

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow|b|=۳$$

$$|a|=\frac{\max-\min}{۲}=\frac{۳+۱}{۲}=۲$$

$$c=\frac{\max+\min}{۲}=\frac{۳-۱}{۲}=۱$$

تابع در $x=۰$ نزولی بوده و $ab<۰$ است بنابراین:

$$|ab|=۶ \Rightarrow ab=-۶$$

در نتیجه:

$$ab-c=-۶-۱=-۷$$

۸۸۷- [۴] دورهٔ تناوب تابع ۶، مینیمم آن ۲- و $f(۰)=۲$ می‌باشد.

ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم.

$$f(x)=a\cos\pi(bx+\frac{۳}{۲})+c=a\cos(b\pi x+\frac{۳\pi}{۲})+c$$

$$=a\sin b\pi x+c$$

$$T=\frac{۲\pi}{|b\pi|}=\frac{۲}{|b|}=۶ \Rightarrow |b|=\frac{۱}{۳}$$

$$f(۰)=۲ \Rightarrow c=۲$$

$$\min=c-|a|=-۲ \Rightarrow ۲-|a|=-۲ \Rightarrow |a|=۴$$

تابع در $x=۰$ نزولی بوده و $ab<۰$ است.

$$|ab|=\frac{۴}{۳} \Rightarrow ab=-\frac{۴}{۳} \Rightarrow abc=-\frac{۸}{۳}$$

۸۸۸- [۲] دورهٔ تناوب تابع برابر b و مینیمم آن برابر صفر است.

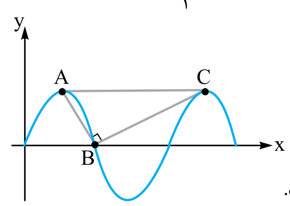
$$f(x)=a+b\cos\frac{۲\pi}{۹}ax$$

$$\left.\begin{array}{l} T=\dfrac{۲\pi}{\frac{۲\pi}{۹}|a|}=b \Rightarrow |a|b=۹ \\ \min=a-|b|=۰ \Rightarrow a=|b| \xrightarrow{b>۰} a=b \end{array}\right\} \Rightarrow a=b=۳$$

بنابراین:

$$f(x)=۳+۳\cos\frac{۲\pi}{۳}x \Rightarrow f(a)=f(۳)=۳+۳\cos ۲\pi=۶$$

۸۸۹- [۳] اگر دورهٔ تناوب T باشد، طول نقاط A، B و C به ترتیب $\frac{T}{۴}$، $\frac{T}{۲}$ و $\frac{۵T}{۴}$ است.



تابع در $x=۰$ صعودی و $a>۰$ است.

$$T=\frac{۲\pi}{۲\pi}=۱,\ \max=|a|=a$$

$$\Rightarrow A(\frac{۱}{۴},a)\quad B(\frac{۱}{۲},۰)\quad C(\frac{۵}{۴},a)$$

بنابراین:

$$m_{AB}\times m_{BC}=-۱ \Rightarrow \frac{a}{\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}}\times\frac{a}{\frac{۵}{۴}-\frac{۱}{۲}}=-۱$$

$$\Rightarrow a^۲=\frac{۳}{۱۶} \xrightarrow{a>۰} a=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

۸۹۰- [۴] دورهٔ تناوب تابع $y=۱+۲\cos\pi x$ برابر $T=\frac{۲\pi}{\pi}=۲$ است. بنابراین طول نقاط A و B به ترتیب صفر و ۲ می‌باشد. $(AB=۲)$

ماکزیمم تابع برابر $۳=۲+۱$ بوده و در نتیجه عرض نقاط A و B برابر ۳ است (ارتفاع ذوزنقه $h=۳$ است). عرض نقاط C و D صفر است.

$$۱+۲\cos\pi x=۰ \Rightarrow \cos\pi x=-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi x=\frac{۲\pi}{۳} \\ \pi x=\frac{۴\pi}{۳} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۲}{۳} \\ x=\frac{۴}{۳} \end{cases}$$

طول نقاط C و D به ترتیب $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۴}{۳}$ بوده و $CD=\frac{۲}{۳}$ است.

$$S_{ABCD}=\frac{AB+CD}{۲}\times h=\frac{۲+\frac{۲}{۳}}{۲}\times ۳=۴$$

۸۹۱- [۳] اگر دورهٔ تناوب برابر T باشد، $\frac{۳}{۴}T=\frac{\pi}{۲}$ و در نتیجه $T=\frac{۲\pi}{۳}$ است. ماکزیمم تابع ۳ می‌باشد. ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم.

$$f(x)=a\sin bx\cos bx=\frac{a}{۲}\sin ۲bx$$

$$T=\frac{۲\pi}{|۲b|}=\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow |b|=\frac{۳}{۲}$$

$$\max=|\frac{a}{۲}|=۳ \Rightarrow |a|=۶$$

تابع در $x=۰$ نزولی و $ab<۰$ است.

$$|\frac{a}{b}|=\frac{۶}{\frac{۳}{۲}}=۴ \Rightarrow -\frac{a}{b}=۴ \Rightarrow \frac{a}{b}=-۴$$

۸۹۲- [۱] ضابطهٔ تابع به صورت $y=۲\sin^۲ x=۱-\cos ۲x$ است.

دورهٔ تناوب تابع $T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$ بوده و در نتیجه $OB=\pi$ است.

ماکزیمم تابع برابر $۲=۱+۱$ بوده و در نتیجه $y_A=۲$ می‌باشد.

$$S_{OAB}=\frac{۱}{۲}\times OB\times y_A=\frac{۱}{۲}\times\pi\times ۲=\pi$$

۸۹۳- [۳] ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم.

$$y=a+b\sin^۲ x=a+b(\frac{۱-\cos ۲x}{۲})=-\frac{b}{۲}\cos x+a+\frac{b}{۲}$$

ماکزیمم تابع ۲ و مینیمم آن ۱- است. تابع در $x=۰$ دارای ماکزیمم بوده و $-\frac{b}{۲}>۰$ و در نتیجه $b<۰$ است.

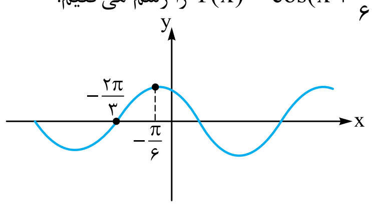
$$\max=|\frac{b}{۲}|+a+\frac{b}{۲}=۲ \Rightarrow -\frac{b}{۲}+a+\frac{b}{۲}=۲ \Rightarrow a=۲$$

$$\min=-|\frac{b}{۲}|+a+\frac{b}{۲}=-۱ \Rightarrow a+b=-۱$$

$$\Rightarrow ۲+b=-۱ \Rightarrow b=-۳ \Rightarrow a-b=۵$$

۸۹۴- [۱] $\sin x$ در بازهٔ $[\pi,۲\pi]$ منفی بوده و در نتیجه $y=|\sin x|=-\sin x$ است. در بین گزینه‌ها تابع $y=\cos(\frac{\pi}{۲}+x)$ با $y=-\sin x$ برابر است.

۸۹۵- [۳] نمودار تابع $f(x)=\cos(x+\frac{\pi}{۶})$ را رسم می‌کنیم.



مشخص است اگر نمودار $y=\sin x$ را $\frac{۲\pi}{۳}$ به سمت چپ منتقل کنیم، بر نمودار فوق منطبق خواهد شد. بنابراین $y=\sin(x+\frac{۲\pi}{۳})$ بر نمودار $f(x)$ منطبق است. بنابراین تابع $g(x)=\sin(x+\theta)$ زمانی بر $f(x)$ منطبق است که $\theta=\frac{۲\pi}{۳}$ و یا $\theta=۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳}$ باشد.

۸۹۶- [۴] بدیهی است دورهٔ تناوب توابع $f(x)$ و $g(x)$ برابر است، بنابراین اگر a مثبت باشد، $a=۳$ است.

می‌دانیم $\sin(۳x-\pi)=-\sin ۳x=\cos(۳x+\frac{\pi}{۲})$ است. بنابراین

برای این‌که $g(x)=\cos(۳x+b)$ بر $f(x)=\sin(۳x-\pi)$ منطبق باشد، کافی است $b=\frac{\pi}{۲}$ و یا $b=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ باشد. در نتیجه b می‌تواند $-۲\pi+\frac{\pi}{۲}=-\frac{۳\pi}{۲}$ باشد.

۸۹۷- [۳] در تابع $y=a+۲\sin(bx-\frac{\pi}{۳})$ ، $|-\frac{\pi}{۳}|<\frac{\pi}{۲}$ بوده و ویژگی‌های آن با $y=a+۲\sin bx$ یکسان است. دورهٔ تناوب تابع π و مینیمم آن ۱- است. تابع در $x=۰$ نزولی بوده و $b<۰$ می‌باشد.

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\pi \Rightarrow |b|=۲ \xrightarrow{b<۰} b=-۲$$

$$\min = a-۲=-۱ \Rightarrow a=۱ \Rightarrow a-b=۳$$

۸۹۸- [۴] در تابع $f(x)=a-b\sin(x+\frac{\pi}{۶})$ ، $|\frac{\pi}{۶}|<\frac{\pi}{۲}$ بوده و ویژگی‌های آن با $y=a-b\sin x$ یکسان است. $f(\pi)=f(-\pi)=۰$ و ماکزیمم تابع ۲ است. تابع در $x=۰$ صعودی بوده و $-b>۰$ و در نتیجه $b<۰$ است.

$$f(\pi)=a-b\sin\frac{۷\pi}{۶}=۰ \Rightarrow a+\frac{b}{۲}=۰ \Rightarrow b=-۲a$$

$$\max=a+|b|=۲ \xrightarrow{b<۰} a-b=۲$$

$$\xrightarrow{b=-۲a} ۳a=۲ \Rightarrow a=\frac{۲}{۳} \Rightarrow b=-\frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۲}{۳}+\frac{۴}{۳}\sin(x+\frac{\pi}{۶})$$

واضح است طول نقطهٔ ماکزیمم A، $x=\frac{\pi}{۳}$ (سینوس برابر ۱ باشد) و طول نقطهٔ مینیمم B، $x=-\frac{۲\pi}{۳}$ (سینوس برابر ۱- باشد) است. مینیمم تابع نیز $\frac{۲}{۳}-\frac{۴}{۳}=-\frac{۲}{۳}$ می‌باشد.

$$A(\frac{\pi}{۳},۲)\,,\, B(-\frac{۲\pi}{۳},-\frac{۲}{۳}) \Rightarrow m_{AB}=\frac{۲+\frac{۲}{۳}}{\frac{\pi}{۳}+\frac{۲\pi}{۳}}=\frac{\frac{۸}{۳}}{\pi}=\frac{۸}{۳\pi}$$

۸۹۹- [۴] تابع از مبدأ مختصات عبور می‌کند.

$$f(x)=۱+a\cos(bx-\frac{\pi}{۳})$$

$$f(۰)=۰ \Rightarrow ۱+a\cos(-\frac{\pi}{۳})=۰ \Rightarrow ۱+\frac{a}{۲}=۰ \Rightarrow a=-۲$$

در تابع $y=a\cos(bx+\theta)+c$ اگر در سمت راست محور yها اول ماکزیمم داشته باشیم با فرض این‌که b مثبت باشد $a\theta<۰$ و با فرض این‌که b منفی باشد $a\theta>۰$ است.

در این تابع در سمت راست محور yها اول ماکزیمم داریم و $a\theta>۰$ است. بنابراین $b<۰$ می‌باشد.

تابع $f(x)$ در نقاطی صفر می‌شود که $\cos(bx-\frac{\pi}{۳})$ برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد.

اولین نقطه در نمودار $x=۰$ بود که $\cos(-\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}$ بود. در سایر ریشه‌های نمودار x مثبت و b منفی است. بنابراین $bx-\frac{\pi}{۳}$ به ترتیب $-\frac{۵\pi}{۳}$، $-\frac{۷\pi}{۳}$ و $-\frac{۱۱\pi}{۳}$ می‌باشد. یعنی در آخرین ریشه که $x=\frac{۵\pi}{۳}$ است، $bx-\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱۱\pi}{۳}$ می‌باشد:

$$\frac{۵\pi}{۳}b-\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱۱\pi}{۳} \Rightarrow b=-۲$$

۹۰۰- [۱]

$$y=\sin^۶ x+\cos^۶ x=۱-\frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲x=۱-\frac{۳}{۴}(\frac{۱-\cos ۴x}{۲})$$

$$=\frac{۵}{۸}+\frac{۳}{۸}\cos ۴x$$

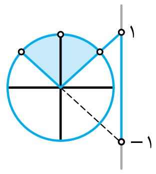
$$T=\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}\ ,\ \max=\frac{۵}{۸}+\frac{۳}{۸}=۱\ ,\ \min=\frac{۵}{۸}-\frac{۳}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

طول نقطهٔ B برابر $\frac{۳}{۲}T=\frac{۳\pi}{۴}$ است.

$$\left.\begin{array}{l}A(۰,۱)\\ B(\frac{۳\pi}{۴},\frac{۱}{۴})\end{array}\right\} \Rightarrow m_{AB}=\frac{۱-\frac{۱}{۴}}{۰-\frac{۳\pi}{۴}}=\frac{\frac{۳}{۴}}{-\frac{۳\pi}{۴}}=-\frac{۱}{\pi}$$

۹۰۱- [۴]

۹۰۲- [۱] اگر $\frac{\pi}{۸}<\theta<\frac{۳\pi}{۸}$ باشد، آن‌گاه $\frac{\pi}{۴}<۲\theta<\frac{۳\pi}{۴}$ بوده و با توجه به دایرهٔ مثلثاتی $\tan ۲\theta>۱$ یا $\tan ۲\theta<-۱$ است.



بنابراین:

$$|\tan ۲\theta|>۱ \Rightarrow \frac{۱}{|۳m-۱|}>۱ \xrightarrow{m\neq\frac{۱}{۳}} |۳m-۱|<۱$$

$$\Rightarrow -۱<۳m-۱<۱ \Rightarrow ۰<۳m<۲ \Rightarrow ۰<m<\frac{۲}{۳}$$

$$\xrightarrow{m\neq\frac{۱}{۳}} m\in(۰,\frac{۲}{۳})-\{\frac{۱}{۳}\}$$

۹۰۳- [۲] تابع $y=\tan(g(x))$ در نقاطی که $g(x)=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ باشد، تعریف نشده است. $(k\in\mathbb{Z})$

$$f(x)=\tan\frac{۳x}{۴} \Rightarrow \frac{۳x}{۴}=k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{۴k\pi}{۳}+\frac{۲\pi}{۳}$$

اگر $k=۰$ باشد، $x=\frac{۲\pi}{۳}$ است. به ازای بقیهٔ مقادیر صحیح k، x در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ قرار نمی‌گیرد. بنابراین تنها به ازای $x=\frac{۲\pi}{۳}$ تابع $f(x)$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ تعریف نشده است.

۹۰۴- [۴] ضابطهٔ $f(x)$ را ساده می‌کنیم.

$$f(x)=۲-\tan(\pi-\frac{۲}{۳}x)=۲+\tan\frac{۲}{۳}x$$

تابع $y=\tan x$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ اکیداً یکنواست بنابراین تابع $y=\tan\frac{۲}{۳}x$ در بازهٔ $(-\frac{۳\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴})$ اکیداً یکنواست، در نتیجه کم‌ترین مقدار k برابر $-\frac{۳\pi}{۴}$ است.

۹۰۵- [۳] ضابطهٔ تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم.

$$f(x)=\cot(\frac{۳\pi}{۲}+\pi ax)=-\tan(a\pi x)$$

نمودار تابع در $x=۰$ اکیداً نزولی بوده و $-a<۰$ و در نتیجه $a>۰$ است.

با توجه به نمودار دورهٔ تناوب تابع ۶ می‌باشد.

$$T=\frac{\pi}{|a\pi|}=۶ \Rightarrow |a|=\frac{۱}{۶} \xrightarrow{a>۰} a=\frac{۱}{۶}$$

۹۰۶- [۲] با توجه به نمودار، $f(۰)=-۱$ است.

$$f(x)=a+\tan(\frac{\pi}{۴}+bx)$$

$$\Rightarrow f(۰)=a+\tan\frac{\pi}{۴}=-۱ \Rightarrow a=-۲$$

تابع در $x=۰$ صعودی بوده و $b>۰$ می‌باشد. همچنین $f(x)$ در $x=\frac{\pi}{۳}$ تعریف نشده است:

$$\frac{\pi}{۴}+b(\frac{\pi}{۳})=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow b=\frac{۳}{۴} \Rightarrow a-b=-۲-\frac{۳}{۴}=-\frac{۱۱}{۴}$$

۹۰۷- [۱] حداکثر a نصف دورهٔ تناوب است.

$$y=۳\tan(\frac{\pi}{۳}-۲x) \Rightarrow T=\frac{\pi}{|-۲|}=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow a=\frac{T}{۲}=\frac{\pi}{۴}$$

۹۰۸- ۳ جواب‌های کلی معادله را به دست می‌آوریم.

$$۲\sin ۲x=-۱ \Rightarrow \sin ۲x = -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \\ ۲x = ۲k\pi+\pi+\frac{\pi}{۶}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{۱۲} \\ x = k\pi + \frac{۷\pi}{۱۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۱۱\pi}{۱۲}, \frac{۲۳\pi}{۱۲} \\ x = \frac{۷\pi}{۱۲}, \frac{۱۹\pi}{۱۲}\end{cases} \Rightarrow \frac{۲۳\pi}{۱۲}-\frac{۷\pi}{۱۲}=\frac{۱۶\pi}{۱۲}=\frac{۴\pi}{۳}$$

۹۰۹- ۳ **روش اول:**

$$۴\cos^۲ x = ۱ \Rightarrow \cos^۲ x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \begin{cases}\cos x = \frac{۱}{۲}\\ \cos x = -\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۳}\\ x=\frac{۲\pi}{۳},\frac{۴\pi}{۳}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} \frac{\pi}{۳}+\frac{۵\pi}{۳}+\frac{۲\pi}{۳}+\frac{۴\pi}{۳}=۴\pi$$

روش دوم:

$$۴\cos^۲ x = ۱ \Rightarrow ۲(۱+\cos ۲x)=۱ \Rightarrow \cos ۲x = -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi\pm\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۳},\frac{۲\pi}{۳},\frac{۴\pi}{۳},\frac{۵\pi}{۳}$$

۹۱۰- ۴ $x=\frac{۵\pi}{۱۲}$ جواب معادله است.

$$k\cos ۲x+\sqrt{۳}=۰ \xrightarrow{x=\frac{۵\pi}{۱۲}} k\cos\frac{۵\pi}{۶}+\sqrt{۳}=۰$$

$$\Rightarrow \frac{-\sqrt{۳}}{۲}k = -\sqrt{۳} \Rightarrow k=۲$$

خواهیم داشت:

$$۲\cos ۲x+\sqrt{۳}=۰ \Rightarrow \cos ۲x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲x = ۲k\pi\pm\frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi\pm\frac{۵\pi}{۱۲}$$

$$\Rightarrow x = \frac{۵\pi}{۱۲},\frac{۷\pi}{۱۲},\frac{۱۷\pi}{۱۲},\frac{۱۹\pi}{۱۲}$$

بزرگ‌ترین جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ برابر $\frac{۱۹\pi}{۱۲}$ است.

۹۱۱- ۱ معادله را ساده می‌کنیم.

$$\sin(x+\frac{\pi}{۳})\cos(x+\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\sin(۲x+\frac{۲\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin(۲x+\frac{۲\pi}{۳})=۱ \Rightarrow ۲x+\frac{۲\pi}{۳}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x = k\pi-\frac{\pi}{۱۲}$$

۹۱۲- ۲ اگر $x-\frac{\pi}{۳}=\alpha$ باشد، آن‌گاه $x+\frac{\pi}{۶}=\frac{\pi}{۲}+\alpha$ است.

$$\sin(x+\frac{\pi}{۶})+\cos(x-\frac{\pi}{۳})=۱ \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)+\cos\alpha=۱$$

$$\Rightarrow ۲\cos\alpha=۱\Rightarrow \cos\alpha=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \alpha=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow x-\frac{\pi}{۳}=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi \Rightarrow x=۰,۲\pi \\ x=۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}$$

بنابراین: $۰+۲\pi+\frac{۲\pi}{۳}=\frac{۸\pi}{۳}$

۹۱۳- ۱ اگر $x-\frac{\pi}{۴}=\alpha$ باشد، آن‌گاه $x+\frac{\pi}{۴}=\alpha+\frac{\pi}{۲}$ است.

$$\cos(x-\frac{\pi}{۴})\cos(x+\frac{\pi}{۴})=-\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow -\cos\alpha\sin\alpha=-\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \sin ۲\alpha=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \begin{cases}۲\alpha=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ ۲\alpha=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=k\pi+\frac{\pi}{۱۲}\\ \alpha=k\pi+\frac{۵\pi}{۱۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=k\pi+\frac{\pi}{۳}\\x=k\pi+\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{U} x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

۹۱۴- ۱ می‌دانیم $\sin(-x)=-\sin x$ است.

$$\sin ۳x+\sin x=۰\Rightarrow \sin ۳x=-\sin x$$

$$\Rightarrow \sin ۳x=\sin(-x)\Rightarrow\begin{cases}۳x=۲k\pi-x\\۳x=۲k\pi+\pi+x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{k\pi}{۲}\\x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\end{cases}\xrightarrow{U}x=\frac{k\pi}{۲}$$

۹۱۵- ۲ می‌دانیم $\cos(x+\pi)=-\cos x$ است.

$$\cos ۲x+\cos x=۰\Rightarrow\cos ۲x=-\cos x$$

$$\Rightarrow\cos ۲x=\cos(x+\pi)\Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm(x+\pi)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\pi\\x=\frac{۲k\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pi\\x=\frac{\pi}{۳},\pi,\frac{۵\pi}{۳}\end{cases}$$

بنابراین معادله در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ سه جواب دارد.

۹۱۶- ۲ می‌دانیم $\sin(x-\frac{\pi}{۲})=-\cos x$ است.

$$\sin ۳x+\cos x=۰\Rightarrow\sin ۳x=-\cos x$$

$$\Rightarrow\sin ۳x=\sin(x-\frac{\pi}{۲})\Rightarrow\begin{cases}۳x=۲k\pi+x-\frac{\pi}{۲}\\۳x=۲k\pi+\pi-(x-\frac{\pi}{۲})\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=k\pi-\frac{\pi}{۴}\\x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{۳\pi}{۸}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۳\pi}{۴}\\x=\frac{۳\pi}{۸},\frac{۷\pi}{۸}\end{cases}$$

بنابراین:

$$\frac{۳\pi}{۴}+\frac{۳\pi}{۸}+\frac{۷\pi}{۸}=۲\pi$$

۹۱۷- ۴ معادله را ساده می‌کنیم.

$$\cos(۲x-\frac{\pi}{۲})+\sin(x+\pi)=۰\Rightarrow\sin ۲x-\sin x=۰$$

روش اول:

$$\sin ۲x=\sin x\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi+x\\۲x=۲k\pi+\pi-x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi\\x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۰,۲\pi\\x=\frac{\pi}{۳},\pi,\frac{۵\pi}{۳}\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۰+۲\pi+\frac{\pi}{۳}+\pi+\frac{۵\pi}{۳}=۵\pi$$

روش دوم:

$2\sin x\cos x-\sin x=0 \Rightarrow \sin x(2\cos x-1)=0$

$\Rightarrow \begin{cases}\sin x=0\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0,\pi,2\pi\\ x=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\end{cases}$

-۹۱۸ [۱] معادله را ساده می‌کنیم.

$2\sin^2 x-2\sin x\cos x-1=0$

$\Rightarrow 2\sin^2 x-1=2\sin x\cos x$

$\Rightarrow -\cos 2x=\sin 2x \Rightarrow \cos 2x=-\sin 2x$

روش اول:

$\cos 2x=\cos(2x+\frac{\pi}{2}) \Rightarrow 2x=2k\pi\pm(2x+\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

روش دوم: جواب کلی معادلهٔ $\tan x=\tan\alpha$ به صورت $x=k\pi+\alpha$ می‌باشد.

$\cos 2x=-\sin 2x \Rightarrow \tan 2x=-1 \Rightarrow 2x=k\pi-\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

-۹۱۹ [۱] با شرط $\cos x\neq -1$ صورت کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$\sin 4x+\sin 3x=0 \Rightarrow \sin 4x=-\sin 3x$

$\Rightarrow \sin 4x=\sin(-3x) \Rightarrow \begin{cases}4x=2k\pi-3x\\ 4x=2k\pi+\pi+3x\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}x=\frac{2k\pi}{7} \checkmark\\ x=2k\pi+\pi \text{ غ‌ق‌ق } \quad (\cos x\neq -1)\end{cases}$

-۹۲۰ [۲] معادله را ساده می‌کنیم.

$\sin x(2\sin x-9)=5 \Rightarrow 2\sin^2 x-9\sin x-5=0$

$\Rightarrow \sin x=\frac{9\pm\sqrt{121}}{4} \Rightarrow \begin{cases}\sin x=5 \text{ غ‌ق‌ق}\\ \sin x=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\end{cases}$

بنابراین: $\frac{11\pi}{6}-\frac{7\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$

-۹۲۱ [۲] معادله را ساده می‌کنیم.

$\sin^2 x+\cos x=\frac{1}{4} \Rightarrow 1-\cos^2 x+\cos x=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \cos^2 x-\cos x-\frac{3}{4}=0 \Rightarrow \cos x=\frac{1\pm\sqrt{4}}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases}\cos x=\frac{3}{2} \text{ غ‌ق‌ق}\\ \cos x=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\end{cases}$

بنابراین: $\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}=2\pi$

-۹۲۲ [۱] معادله را ساده می‌کنیم.

$2\cos^2 x+3\sin x=0 \Rightarrow 2\times(1-\sin^2 x)+3\sin x=0$

$\Rightarrow 2\sin^2 x-3\sin x-2=0 \Rightarrow \sin x=\frac{3\pm\sqrt{25}}{4}$

$\Rightarrow \begin{cases}\sin x=2 \text{ غ‌ق‌ق}\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\\ x=2k\pi-\frac{5\pi}{6}\end{cases}$

-۹۲۳ [۳] معادله را ساده می‌کنیم.

$\cos 2x-2\sin^2 x=0 \Rightarrow \cos 2x-(1-\cos 2x)=0$

$\Rightarrow \cos 2x=\frac{1}{2} \Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{6}$

-۹۲۴ [۴] معادله را ساده می‌کنیم.

$\sin(\frac{\pi}{2}+x)\cos(\pi+x)+2\cos(x-\pi)=1$

$\Rightarrow \cos x(-\cos x)-2\cos x=1$

$\Rightarrow \cos^2 x+2\cos x+1=0 \Rightarrow (\cos x+1)^2=0$

$\Rightarrow \cos x=-1 \Rightarrow x=2k\pi+\pi \Rightarrow x=2k\pi-\pi$

-۹۲۵ [۴] با فرض $\sin x\neq 0$ صورت کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$\cos x(2\cos x+1)-1=0 \Rightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0$

$\Rightarrow \begin{cases}\cos x=-1 \text{ غ‌ق‌ق } \quad (\sin x\neq 0)\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{cases}$

$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

-۹۲۶ [۴] $x=\frac{5\pi}{6}$ ریشهٔ معادله است.

$\cos 2x+a\sin x=0 \xrightarrow{x=\frac{5\pi}{6}} \cos\frac{5\pi}{3}+a\sin\frac{5\pi}{6}=0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{a}{2}=0 \Rightarrow a=-1$

حال، معادله را حل می‌کنیم.

$\cos 2x-\sin x=0 \Rightarrow \cos 2x=\sin x$

$\Rightarrow \cos 2x=\cos(\frac{\pi}{2}-x) \Rightarrow 2x=2k\pi\pm(\frac{\pi}{2}-x)$

$\Rightarrow \begin{cases}x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6} \Rightarrow x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\\ x=2k\pi-\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}\end{cases}$

بنابراین: $\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}=\frac{5\pi}{2}$

-۹۲۷ [۴] با فرض $\sin x-\cos x\neq 0$ معادله را ساده می‌کنیم.

$\sin x=\frac{1}{\sin x-\cos x} \Rightarrow \sin^2 x-\sin x\cos x=1$

$\Rightarrow 1-\sin^2 x+\sin x\cos x=0$

$\Rightarrow \cos^2 x+\sin x\cos x=0 \Rightarrow \cos x(\cos x+\sin x)=0$

$\Rightarrow \begin{cases}\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\\ \cos x=-\sin x \Rightarrow x=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\end{cases}$

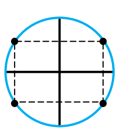
-۹۲۸ [۱] با فرض $\sin 2x\neq 0$ و $\cos 2x\neq 0$ معادله را ساده می‌کنیم.

$\frac{\sin x}{\cos 2x}=\frac{\cos x}{\sin 2x} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos 2x}=\frac{\cancel{\cos x}}{2\sin x\cancel{\cos x}}$

$\Rightarrow 2\sin^2 x=\cos 2x \Rightarrow 1-\cos 2x=\cos 2x$

$\Rightarrow \cos 2x=\frac{1}{2} \Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

رئوس یک مستطیل (غیر مربع) می‌باشند.



۹۲۹- [۲] معادله را ساده می‌کنیم.

$$\cos ۲x = ۵\cos x - ۳ \Rightarrow ۲\cos^{۲} x - ۵\cos x + ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{۵ \pm \sqrt{۹}}{۴}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = ۲ \quad \text{غ‌ق‌ق} \\ \cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

بنابراین: $\cos(\theta - \frac{\pi}{۳}) = \cos(۰) = ۱$

۹۳۰- [۲] **روش اول**: دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم. (ممکن است جواب اضافه وارد مسئله شود.)

$$\sin ۳x + \cos ۳x = -۱ \Rightarrow ۱ + \sin ۶x = ۱ \Rightarrow \sin ۶x = ۰$$

$$\Rightarrow ۶x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۶} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{۳}, -\frac{\pi}{۶}, ۰, \frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۳}$$

جواب‌های ۰ و $\frac{\pi}{۶}$ در معادلهٔ اولیه صدق نمی‌کنند و قابل قبول نیستند.

بنابراین در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ سه جواب وجود دارد.

روش دوم: معادلات خاص:

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi, x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \sin x + \cos x = -۱ \Rightarrow x = (۲k+۱)\pi, x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

$$\sin ۳x + \cos ۳x = -۱ \Rightarrow \begin{cases} ۳x = (۲k+۱)\pi \\ ۳x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = (۲k+۱)\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۳}, -\frac{\pi}{۳} \\ x = \frac{۲k\pi}{۳} - \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

۹۳۱- [۱] با شرط $x \neq k\pi$ معادله را ساده می‌کنیم.

$$۱ + \cot^{۲} x = ۸\cos^{۲} x \Rightarrow \frac{۱}{\sin^{۲} x} = ۸\cos^{۲} x$$

$$\Rightarrow ۸\sin^{۲} x\cos^{۲} x = ۱ \Rightarrow ۲\sin^{۲} ۲x = ۱ \Rightarrow \sin^{۲} ۲x = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin ۲x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow ۲x = k\pi \pm \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} \pm \frac{\pi}{۸}$$

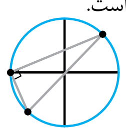
۹۳۲- [۱] با شرط $۱ - \cos x \neq ۰$ معادله را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sin ۲x}{۱ - \cos x} = ۲(\cos x + ۱) \Rightarrow \sin ۲x = ۲(۱ - \cos^{۲} x)$$

$$\Rightarrow ۲\sin x\cos x = ۲\sin^{۲} x \Rightarrow ۲\sin x(\cos x - \sin x) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۰ \\ \cos x = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۰, \pi \\ x = \frac{\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴} \end{cases}$$

با توجه به شرط $\cos x \neq ۱$ جواب $x = ۰$ غیر قابل قبول است.



جواب‌ها رئوس مثلث قائم الزاویه هستند.

۹۳۳- [۲] $x = \frac{\pi}{۶}$ ریشهٔ معادله است.

$$\sin ۲x - \sin x - \cos x = k$$

$$\xrightarrow{x = \frac{\pi}{۶}} \sin\frac{\pi}{۳} - \sin\frac{\pi}{۶} - \cos\frac{\pi}{۶} = k$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲} = k \Rightarrow k = -\frac{۱}{۲}$$

حال، معادله را حل می‌کنیم.

$$\sin ۲x - \sin x - \cos x = -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲\sin x\cos x - \sin x - \cos x + \frac{۱}{۲} = ۰$$

$$\Rightarrow ۲\sin x(\cos x - \frac{۱}{۲}) - (\cos x - \frac{۱}{۲}) = ۰$$

$$\Rightarrow (\cos x - \frac{۱}{۲})(۲\sin x - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۳} \\ \sin x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۶} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۳}$$

۹۳۴- [۲] با شرط $\cos x \neq ۰$ دو طرف معادله را در $\cos x$ ضرب می‌کنیم.

$$\tan x + \sin x = ۱ + \cos x$$

$$\Rightarrow \sin x + \sin x\cos x = \cos x + \cos^{۲} x$$

$$\sin x - \cos x + \cos x(\sin x - \cos x) = ۰$$

$$\Rightarrow (\sin x - \cos x)(۱ + \cos x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \cos x \\ \cos x = -۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴} \\ x = \pi \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = \frac{۵\pi}{۲}$$

۹۳۵- [۱] برای این‌که جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۳x = \cos ax$ بر روی دایرهٔ مثلثاتی رئوس یک ۷ضلعی منتظم باشد، باید مجموعه‌جواب به صورت $\frac{۲k\pi}{۷}$ باشد.

$$\cos ax = \cos ۳x \Rightarrow ax = ۲k\pi \pm ۳x \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۲k\pi}{a - ۳} \\ x = \frac{۲k\pi}{a + ۳} \end{cases}$$

اگر $a - ۳ = ۷$ باشد، آن‌گاه $a = ۱۰$ و مجموعه‌جواب به صورت $\begin{cases} x = \frac{۲k\pi}{۷} \\ x = \frac{۲k\pi}{۱۳} \end{cases}$ است که بیانگر رئوس یک ۷ضلعی منتظم و یک ۱۳ضلعی منتظم است. بنابراین قابل قبول نیست.

اگر $a + ۳ = ۷$ باشد، آن‌گاه $a = ۴$ و مجموعه‌جواب به صورت $\begin{cases} x = ۲k\pi \\ x = \frac{۲k\pi}{۷} \end{cases}$ است که اجتماع این جواب‌ها برابر $\frac{۲k\pi}{۷}$ می‌باشد. در نتیجه $a = ۴$ جواب مسئله است.

۹۳۶- [۲] معادله را ساده می‌کنیم.

$$\sin^{۴} x + \cos^{۴} x = \frac{۳}{۴} \Rightarrow ۱ - \frac{۱}{۲}\sin^{۲} ۲x = \frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \sin^{۲} ۲x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱ - \cos ۴x}{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos ۴x = ۰$$

$$\Rightarrow ۴x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۸} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{۸} \\ \beta = \frac{\pi}{۴} + \frac{\pi}{۸} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\alpha - \beta| = \frac{\pi}{۴}$$