مقدمه ناشر

سلام

نمی‌دونم چه‌قدر با کتاب‌های نردبام آشنا هستید. ولی از اون‌جایی که استارت کتاب‌های نردبام، از سال دهم زده می‌شه، بد نیست یکم در موردش حرف بزنیم. راستش این‌که چرا کتاب‌های سخت و پُرایده می‌نویسیم، دلیلش این است که یک سری آدم هستند که کله‌شان بوی قورمه‌سبزی می‌دهد و کلن دنبال دعوا می‌گردند! خودِ ما با سبزی‌های داخل کله‌مان رفتیم انتشارات خیلی‌سبز را راه انداختیم، حالا یک عده هم می‌خواهند از سبزی‌های داخل کله‌شان استفاده‌های بهتری بکنند. این‌ها آدم‌های سخت‌کوش، باهوش و مبارزه‌طلبی هستند که قرار است بعدن‌ها دنیا را کمی تکان بدهند. این‌جور آدم‌ها، عاشق این‌جور کتاب‌ها می‌شوند.

کتاب‌های نردبام برای آدم‌های خلاق و مبارزه‌طلب نوشته شده. هر چند که دانش‌آموزان هم می‌توانند برای محک‌زدن میزان توانایی و تسلطشان سراغ این کتاب‌ها بیایند. این کتاب‌ها، کتاب‌های کامل و مستقلی هستند! یعنی هم درس‌نامه دارند، هم تست؛ هم پاسخ تشریحی! امیدوارم که از خواندش، لذت ببرید.

دوستان خوبم، استاد کیوان و شفیع‌زاده که انسان‌های شریف و کاربلدی هستند و سابقهٔ درخشانی در تدریس ریاضیات دارند، درس‌نامه و تست‌های این کتاب را نوشتند. آقای ارشاد هم زحمت پاسخ‌های تشریحی را کشید. از همهٔ این دوستان ممنونم و از انتشار این کتاب خوشحال!

مقدمه مؤلف

به نام خدا

بعد از آن‌که کتاب سال‌های خوبی را سپری کرد و بین دانش‌آموزان محترم و دبیران عزیز جایگاه مناسبی پیدا کرد، بر آن شدیم مطابق تغییرات کنکور سراسری در سال‌های اخیر با حفظ مزایای کتاب، تغییراتی در این کتاب داشته باشیم. از مزایای کتاب می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱) ارائهٔ یک درس‌نامهٔ منظم و دقیق و پوشش جامع بر تمام مباحث کتاب

۲) حل مثال‌های مؤثر در متن درس‌نامه

۳) چیدمان مناسب تست‌ها که می‌تواند در یادگیری دانش‌آموزان عزیز، نقش مؤثر و بی‌بدیلی داشته باشد.

۴) ارائهٔ تست‌های ترکیبی که با کنکور در سال‌های اخیر متناسب بوده است.

امیدواریم تجربهٔ کافی و دقت نظر ما در تألیف کتاب با تلاش و همت شما تکمیل شود تا لذت فهم ریاضی در شما عزیزان دوچندان شود.

در انتها از مسئولین دوست‌داشتنی انتشارات و عوامل تولید که با صبر و حوصلهٔ زیاد همراه ما در تألیف کتاب بودند، کمال تشکر و قدردانی را داریم.

(تیم تألیف، تیر ۱۴۰۲)

فهرست

فصل چهار

معادله‌ها و نامعادله‌ها

معادلهٔ درجه‌دوم و روش‌های مختلف حل آن

هر معادله به شکل $ax^۲ + bx + c = ۰$ که در آن $a \neq ۰$، یک معادلهٔ درجه‌دوم نامیده می‌شود.

برای حل این معادله از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم:

روش اول: تجزیه: به کمک اتحادها معادله را به صورت $a(x - x_۱)(x - x_۲) = ۰$ می‌نویسیم. در این صورت $x = x_۱$ و $x = x_۲$ جواب‌های معادله‌اند.

توجه داشته باشید که اگر A و B دو عبارت جبری باشند، به طوری که $AB = ۰$ آن‌گاه یا $A = ۰$ است و یا $B = ۰$ است.

به طور مثال:

الف) $x^۲ - ۵x + ۶ = ۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۳) = ۰ \Rightarrow x = ۳$ یا $x = ۲$

ب) $۴x^۲ + ۴x - ۳ = ۰ \Rightarrow ۴(x^۲ + x - \frac{۳}{۴}) = ۰ \Rightarrow ۴(x - \frac{۱}{۲})(x + \frac{۳}{۲}) = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۳}{۲}$ یا $x = \frac{۱}{۲}$

تست اگر $x = ۱$ یک جواب معادلهٔ $(x-a)(x-۳) = ۲$ باشد، جواب دیگر معادله کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ «۴» مقدار $x = ۱$ را در معادله جایگزین می‌کنیم: $(۱-a)(۱-۳) = ۲ \Rightarrow -۲ + ۲a = ۲ \Rightarrow a = ۲$

حال $a = ۲$ را در معادله جایگزین می‌کنیم: $(x-۲)(x-۳) = ۲ \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۳x + ۶ = ۲ \Rightarrow x^۲ - ۵x + ۴ = ۰$

به کمک تجزیه معادلهٔ آخر را حل می‌کنیم: $x^۲ - ۵x + ۴ = ۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۴) = ۰ \Rightarrow x = ۴$ یا $x = ۱$

روش دوم: مربع کامل: اگر به عبارت $x^۲ + ax$، جملهٔ $\frac{a^۲}{۴}$ را اضافه کنیم، به شکل مربع کامل می‌شود. ($\frac{a^۲}{۴}$ برابر مربع نصف ضریب x است.)

$$x^۲ + ax = x^۲ + ax + \frac{a^۲}{۴} - \frac{a^۲}{۴} = (x + \frac{a}{۲})^۲ - \frac{a^۲}{۴}$$

در این روش برای حل معادله سعی می‌کنیم به حالت $(x + \frac{a}{۲})^۲ = k$ برسیم که در این صورت $x + \frac{a}{۲} = \pm\sqrt{k}$ می‌شود و سپس x به دست می‌آید.

به طور مثال برای حل معادلهٔ $x^۲ - ۶x + ۲ = ۰$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) عدد ثابت ۲ را به سمت راست منتقل می‌کنیم: $x^۲ - ۶x = -۲$

۲) مربع نصف ۶ را به دو طرف اضافه می‌کنیم: $x^۲ - ۶x + ۹ = -۲ + ۹$

۳) سمت چپ را به شکل مربع کامل می‌نویسیم: $(x-۳)^۲ = ۷$

۴) از دو طرف جذر می‌گیریم: $x - ۳ = \pm\sqrt{۷}$

۵) جواب‌ها به دست آمدند: $x = ۳ \pm \sqrt{۷}$

تست به ازای کدام مقدار m، $۲ - \sqrt{۳}$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۴x + m = ۰$ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

پاسخ گزینهٔ «۱» برای حل معادله، m را به سمت راست منتقل می‌کنیم و مربع نصف ضریب x، یعنی $۴ = (\frac{-۴}{۲})^۲$ را به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم:

$$x^۲ - ۴x + m = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۴x = -m \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۴ = ۴ - m \Rightarrow (x-۲)^۲ = ۴ - m$$

$$\Rightarrow x - ۲ = \pm\sqrt{۴ - m} \Rightarrow x = ۲ \pm \sqrt{۴ - m}$$

یکی از جواب‌ها، $۲ - \sqrt{۳}$ است؛ پس $۴ - m = ۳$ و در نتیجه $m = ۱$ است.

نکته برای آن‌که $ax^۲+bx$ را مربع کامل بسازیم، می‌توانیم از a فاکتور بگیریم و سپس عبارت $x^۲+\frac{b}{a}x$ را به شکل مربع کامل بنویسیم و یا عبارت $(\frac{b}{۲\sqrt{a}})^۲$ را به $ax^۲+bx$ اضافه و کم می‌کنیم. (ضریب x را نصف می‌کنیم $(\frac{b}{۲})$، به جذر a تقسیم می‌کنیم $(\frac{b}{۲\sqrt{a}})$ و سپس به توان ۲ می‌رسانیم: $((\frac{b}{۲\sqrt{a}})^۲)$).

به طور مثال برای مربع کامل سازی عبارت $۹x^۲+۱۲x$، ابتدا ۱۲ را نصف می‌کنیم؛ ۶ به دست می‌آید. ۶ را به جذر ۹ یعنی ۳ تقسیم می‌کنیم؛ ۲ به دست می‌آید؛ سپس مربع ۲ یعنی ۴ را به عبارت اضافه می‌کنیم:

$$۹x^۲+۱۲x=۹x^۲+۱۲x+۴-۴=(۳x+۲)^۲-۴$$

$$۱۲\xrightarrow{\text{نصف}}۶\xrightarrow{\div\sqrt{۹}}۲\xrightarrow{\text{به‌توان ۲}}۴$$

مثال معادلهٔ $۲x^۲-۷x+۵=۰$ را به روش مربع کامل حل کنید.

پاسخ روش اول: دو طرف را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$۲x^۲-۷x+۵=۰\Rightarrow x^۲-\frac{۷}{۲}x+\frac{۵}{۲}=۰\Rightarrow x^۲-\frac{۷}{۲}x=-\frac{۵}{۲}\Rightarrow x^۲-\frac{۷}{۲}x+\frac{۴۹}{۱۶}=-\frac{۵}{۲}+\frac{۴۹}{۱۶}\Rightarrow (x-\frac{۷}{۴})^۲=\frac{۹}{۱۶}$$

$$\Rightarrow x-\frac{۷}{۴}=\pm\frac{۳}{۴}\Rightarrow x=\frac{۷}{۴}\pm\frac{۳}{۴}=\frac{۵}{۲}\ \text{یا}\ ۱$$

روش دوم: دو طرف را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$۲x^۲-۷x+۵=۰\Rightarrow ۴x^۲-۱۴x+۱۰=۰\Rightarrow ۴x^۲-۱۴x=-۱۰$$

$$\Rightarrow ۴x^۲-۱۴x+(\frac{۷}{۲})^۲=-۱۰+(\frac{۷}{۲})^۲\Rightarrow (۲x-\frac{۷}{۲})^۲=\frac{۹}{۴}\Rightarrow ۲x-\frac{۷}{۲}=\pm\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۲x=\frac{۷}{۲}\pm\frac{۳}{۲}\Rightarrow x=\frac{۵}{۲}\ \text{یا}\ ۱$$

روش سوم: روش کلی (روش Δ):

برای حل معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ ابتدا $\Delta=b^۲-۴ac$ را تشکیل می‌دهیم. سه حالت اتفاق می‌افتد:

الف اگر $\Delta>۰$، آن‌گاه ریشه‌های معادله از فرمول مقابل به دست می‌آیند: $x_۱\ ,\ x_۲=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$

ب اگر $\Delta=۰$، آن‌گاه معادله، یک ریشهٔ مضاعف (مکرر مرتبه‌دوم) دارد که از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید: $x_۱=x_۲=\frac{-b}{۲a}$

پ اگر $\Delta<۰$، آن‌گاه معادله جواب حقیقی ندارد.

مثال معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲x^۲-۵x+۳=۰$ ب) $x^۲+ax-۴+۲a=۰$

پاسخ ابتدا Δ را پیدا می‌کنیم و سپس معادله را حل می‌کنیم:

الف) $۲x^۲-۵x+۳=۰$

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۵)^۲-۴(۲)(۳)=۲۵-۲۴=۱$$

$$a=۲\ ,b=-۵\ ,c=۳$$

$$x_۱,x_۲=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۵)\pm\sqrt{۱}}{۴}=\frac{۵\pm۱}{۴}=۱\ \text{یا}\ \frac{۳}{۲}$$

ب) $x^۲+ax-۴+۲a=۰$

$$\Delta=a^۲-۴\times۱\times(-۴+۲a)=a^۲+۱۶-۸a=(a-۴)^۲$$

$$x_۱,x_۲=\frac{-a\pm\sqrt{(a-۴)^۲}}{۲}=\frac{-a\pm(a-۴)}{۲}\Rightarrow\begin{cases}x_۱=\frac{-a+a-۴}{۲}=-۲\\ x_۲=\frac{-a-a+۴}{۲}=۲-a\end{cases}$$

تست معادلهٔ $(x+a)(x+۴-a)+a^۲=۰$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد. حدود a کدام است؟

۱) $a<۱$ ۲) $a>۱$ ۳) $a<۲$ ۴) $a>۲$

پاسخ **گزینهٔ «۱»** ابتدا معادله را به شکل استاندارد $ax^۲+bx+c=۰$ می‌نویسیم:

$$(x+a)(x+۴-a)+a^۲=x^۲+(a+۴-a)x+a(۴-a)+a^۲=x^۲+۴x+۴a$$

حال $\Delta>۰$ را بررسی می‌کنیم:

$$\Delta=۴^۲-۴(۴a)=۱۶-۱۶a\Rightarrow ۱۶-۱۶a>۰\Rightarrow a<۱$$

تست اگر $x=-۲$ تنها ریشهٔ معادلهٔ $b-x(x+a)=۰$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) صفر

پاسخ گزینهٔ «۴» اگر در معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲+bx+c=۰$، $x=\alpha$ تنها ریشهٔ معادله باشد، آن‌گاه آن ریشه برابر $\alpha=-\frac{b}{۲a}$ است.

ابتدا معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$b-x(x+a)=۰ \Rightarrow b-x^۲-ax=۰ \Rightarrow x^۲+ax-b=۰$$

$$x=-۲=-\frac{a}{۲\times۱} \Rightarrow a=۴$$

حال $x=-۲$ را در معادله صدق می‌دهیم:

$$x^۲+ax-b=۰ \xrightarrow{x=-۲} ۴-۲a-b=۰ \xrightarrow{a=۴} b=-۴$$

پس $a+b=۰$ است.

مثال در دنبالهٔ هندسی $a,b,a+b,\ldots$ قدرنسبت را بیابید. $(a,b>۰)$

پاسخ b واسطهٔ هندسی a و $a+b$ است، پس:

$$b^۲=a(a+b) \qquad (۱)$$

از طرفی قدرنسبت برابر $q=\frac{b}{a}$ است، پس $b=aq$ است. حال در تساوی (۱) به جای b مساوی آن aq را جایگزین می‌کنیم:

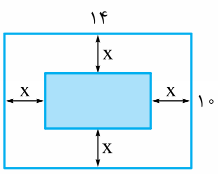
$$b^۲=a(a+b) \xrightarrow{b=aq} (aq)^۲=a(a+aq) \Rightarrow a^۲q^۲=a^۲+a^۲q \xrightarrow{\text{تقسیم بر } a^۲} q^۲=۱+q \Rightarrow q^۲-q-۱=۰$$

حال به کمک فرمول Δ معادله را حل می‌کنیم:

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۱)^۲-۴(۱)(-۱)=۵$$

$$q=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲} \xrightarrow{q>۰} q=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

تست مساحت مستطیل رنگ‌شده در شکل زیر برابر ۹۶ است. محیط این مستطیل چه‌قدر است؟



۱) ۴۲

۲) ۴۰

۳) ۳۶

۴) ۳۲

پاسخ گزینهٔ «۲» ابعاد مستطیل کوچک برابر $۱۰-۲x$ و $۱۴-۲x$ و مساحت آن برابر $(۱۰-۲x)(۱۴-۲x)$ است. داریم:

$$(۱۰-۲x)(۱۴-۲x)=۹۶ \Rightarrow ۴(۵-x)(۷-x)=۹۶ \Rightarrow (۵-x)(۷-x)=۲۴ \Rightarrow ۳۵-۵x-۷x+x^۲=۲۴$$

$$\Rightarrow x^۲-۱۲x+۱۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۱۲\pm\sqrt{۱۴۴-۴۴}}{۲}=\frac{۱۲\pm۱۰}{۲}=۱۱,۱$$

مشخص است که $x=۱۱$ نمی‌تواند باشد، پس $x=۱$ و ابعاد مستطیل برابر ۸ و ۱۲ و محیط آن برابر ۴۰ است.

مثال با فرض $\Delta>۰$ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ را بیابید.

پاسخ ریشه‌های معادله از رابطهٔ $\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$ به دست می‌آیند، پس داریم:

$$S=x_۱+x_۲=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۲b+\sqrt{\Delta}-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-b}{a}$$

$$P=x_۱x_۲=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}\right)=\frac{b^۲-\Delta}{۴a^۲}=\frac{b^۲-(b^۲-۴ac)}{۴a^۲}=\frac{۴ac}{۴a^۲}=\frac{c}{a}$$

تست در معادلهٔ درجه‌دوم $x^۲+۳x+m-۲=۰$ رابطهٔ $x_۱x_۲+x_۱^۲=۶$ برقرار است. مقدار m کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ «۴» با توجه به مثال بالا، $x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}=-۳$ است. داریم:

$$x_۱(x_۱+x_۲)=۶ \Rightarrow x_۱(-۳)=۶ \Rightarrow x_۱=-۲ \xrightarrow{x_۱+x_۲=-۳} x_۲=-۱$$

از طرفی $x_۱x_۲=\frac{c}{a}$ است، پس:

$$x_۱x_۲=\frac{c}{a}=m-۲ \Rightarrow m-۲=(-۱)(-۲) \Rightarrow m=۴$$

تست اگر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+\sqrt{6}x+n=0$ باشند، آن‌گاه مقدار n کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

پاسخ گزینهٔ «۱» مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است.

$$\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{-b}{a}=\frac{-\sqrt{6}}{2} \xrightarrow{\text{به توان } 2} (\sin\alpha+\cos\alpha)^2=(-\frac{\sqrt{6}}{2})^2 \Rightarrow \underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}+2\underbrace{\sin\alpha\cos\alpha}_{\frac{n}{2}}=\frac{6}{4}\\ \sin\alpha\cos\alpha=\frac{c}{a}=\frac{n}{2} \qquad \Rightarrow 1+n=\frac{3}{2} \Rightarrow n=\frac{1}{2}\end{cases}$$

نکته اگر α ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشد، آن‌گاه: $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$

به طور مثال، $x=3$ ریشهٔ مضاعف $2x^2-12x+18=0$ است، پس: $2x^2-12x+18=2(x-3)^2$

تست به ازای کدام مقدار m عبارت $(3m-2)x^2+2mx+1=0$ به صورت مربع کامل یک عبارت جبری است؟

۱) ۱ یا ۶ ۲) ۲ یا ۳ ۳) ۱ یا ۲ ۴) ۳ یا ۶

پاسخ گزینهٔ «۳» با توجه به نکتهٔ بالا می‌بایست $\Delta=0$ باشد. $\Delta=(2m)^2-4(3m-2)(1)=4m^2-12m+8=4(m^2-3m+2)$

$$\Delta=0 \Rightarrow m^2-3m+2=0 \Rightarrow (m-1)(m-2)=0 \Rightarrow m=1 \text{ یا } 2$$

نکته در معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$:

الف اگر $a+b+c=0$، آن‌گاه یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

ب اگر $a+c=b$، آن‌گاه یکی از ریشه‌ها -1 و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

۱ $3x^2-5x+2=0 \xrightarrow{3+(-5)+2=0} x_1=1 \ , \ x_2=\frac{2}{3}$

۲ $2x^2+5x+3=0 \xrightarrow{2+3=5} x_1=-1 \ , \ x_2=-\frac{3}{2}$

۳ $2x^2-\sqrt{3}x+\sqrt{3}-2=0 \xrightarrow{2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-2=0} x_1=1 \ , \ x_2=\frac{\sqrt{3}-2}{2}$

تست یکی از ریشه‌های معادلهٔ $(x+1)(x+a-3)=2a-4$ کدام است؟

۱) $a-2$ ۲) $a-1$ ۳) $1-a$ ۴) $2-a$

پاسخ گزینهٔ «۳» روش اول: ابتدا عبارت درجه‌دوم را ساده می‌کنیم:

$$x^2+(1+a-3)x+a-3=2a-4 \Rightarrow x^2+(a-2)x-a+1=0$$

مجموع ضرایب معادله صفر است $(1+(a-2)-a+1=0)$؛ پس یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری $-a+1$ است.

روش دوم: $a=0$ را در معادله جایگزین می‌کنیم: $(x+1)(x-3)=-4 \Rightarrow x^2-2x-3=-4 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=1$

فقط در ۳ به ازای $a=0$ جواب $x=1$ به دست می‌آید.

نکته اگر مقدار ax^2+bx+c به ازای $x=\alpha$ برابر صفر باشد، آن‌گاه α یک جواب معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ است.

مثال در معادلهٔ $ax^2+2bx+4c=0$ رابطهٔ $a+c=b$ برقرار است. ریشه‌های این معادله را بیابید.

پاسخ به ازای $x=-2$ مقدار عبارت را محاسبه می‌کنیم: $ax^2+2bx+4c=a(-2)^2+2b(-2)+4c=4(a-b+c)$

طبق فرض سؤال، حاصل این عبارت صفر است، پس یکی از ریشه‌های معادله، $x=-2$ است. حال معادله را به $x+2$ تجزیه می‌کنیم. برای این کار، عبارت را بر $x+2$ تقسیم می‌کنیم:

$$ax^2+2bx+4c=ax^2+2(a+c)x+4c=(x+2)(ax+2c)$$

$$\begin{array}{rl|l} & ax^2+2(a+c)x+4c & x+2 \\ - & ax^2+2ax & ax+2c \\ \hline & 2cx+4c & \\ - & 2cx+4c & \\ \hline & 0 \quad 0 & \end{array}$$

پس یکی از ریشه‌ها -2 و دیگری $\frac{-2c}{a}$ است.

معادلاتی که منجر به حل معادلهٔ درجه دوم می‌شوند

بعضی معادلات با درجهٔ بالاتر از ۲ وجود دارند که با نام‌گذاری مناسب برای بعضی از عبارت‌هایی که در معادله تکرار می‌شوند می‌توان به یک معادلهٔ درجه ۲ رسید. در واقع با تغییر متغیر مناسب، می‌توان به حل معادلهٔ درجه‌دوم رسید.

مثال معادلهٔ $(x^۲-۱)^۲-۱۳(x^۲-۱)+۳۶=۰$ را حل کنید.

پاسخ فرض کنید $t=x^۲-۱$. کافی است در معادله به جای $x^۲-۱$، t را جایگزین کنیم:

$$t^۲-۱۳t+۳۶=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۴ \Rightarrow x^۲-۱=۴ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۵} \\ t=۹ \Rightarrow x^۲-۱=۹ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۱۰} \end{cases}$$

تست مجموع جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۲x+\frac{۴}{(x-۱)^۲}=۴$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۴»** به دو طرف معادله یک واحد اضافه می‌کنیم و با فرض $t=(x-۱)^۲$ معادله را بازنویسی و حل می‌کنیم:

$$x^۲-۲x+۱+\frac{۴}{(x-۱)^۲}=۵ \Rightarrow t+\frac{۴}{t}=۵ \Rightarrow \frac{t^۲+۴}{t}=۵ \Rightarrow t^۲+۴=۵t \Rightarrow t^۲-۵t+۴=۰$$

از حل معادلهٔ بالا، $t=۱$ و $t=۴$ به دست می‌آید، پس داریم:

$$\begin{cases} t=۱ \Rightarrow (x-۱)^۲=۱ \Rightarrow x-۱=\pm۱ \Rightarrow x=۰,۲ \\ t=۴ \Rightarrow (x-۱)^۲=۴ \Rightarrow x-۱=\pm۲ \Rightarrow x=۳,-۱ \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}=۴$$

سهمی

نمودار هر معادله به صورت $y=ax^۲+bx+c$ که در آن $a\neq ۰$ یک سهمی است. نمودار این سهمی در دو حالت $a>۰$ و $a<۰$ به صورت روبه‌رو است:

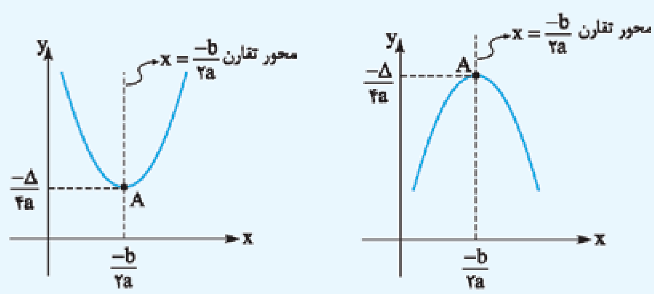
در هر دو حالت، نقطهٔ A را رأس سهمی می‌نامیم.

بعضی از خواص نمودار سهمی عبارت‌اند از:

۱ مختصات رأس سهمی به صورت $A(\frac{-b}{۲a},-\frac{\Delta}{۴a})$ می‌باشد.

۲ خط $x=-\frac{b}{۲a}$ محور تقارن سهمی است. (محور تقارن خطی است که از رأس می‌گذرد و موازی محور yها است.)

۳ در حالت $a>۰$، رأس سهمی پایین‌ترین نقطهٔ سهمی و در حالت $a<۰$، رأس سهمی بالاترین نقطهٔ سهمی است.

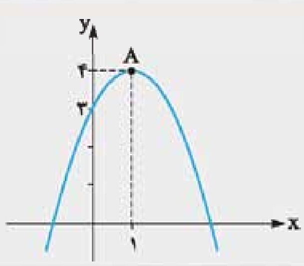


تذکر برای یافتن عرض رأس سهمی کافی است $x=\frac{-b}{۲a}$ را در معادلهٔ سهمی جایگزین کنیم. در واقع مقدار عرض نقطهٔ رأس سهمی به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ به دست می‌آید که برابر همان $-\frac{\Delta}{۴a}$ است.

مثال سهمی $y=-x^۲+۲x+۳$ را با یافتن رأس آن رسم کنید.

پاسخ چون $a<۰$ پس سهمی روبه‌پایین است. از فرمول $x=-\frac{b}{۲a}$ طول رأس سهمی و سپس با جای‌گذاری در معادلهٔ سهمی عرض آن را پیدا می‌کنیم:

$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۲}{۲(-۱)}=۱ \Rightarrow y=-۱+۲+۳=۴ \Rightarrow \text{رأس}: A(۱,۴)$$



تست اگر نقطهٔ $A(-۱,۳)$ رأس سهمی $y = ax^۲ + bx + ۵$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۶   ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۳»** طول رأس سهمی برابر $-\dfrac{b}{۲a}$ است.

$$x = -۱ = -\frac{b}{۲a} \Rightarrow b = ۲a \qquad (۱)$$

از طرفی مختصات رأس سهمی در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند:

$$y = ax^۲ + bx + ۵ \xrightarrow[y=۳]{x=-۱} ۳ = a - b + ۵ \Rightarrow a - b = -۲ \qquad (۲)$$

به کمک دو رابطهٔ (۱) و (۲) مقادیر a و b به دست می‌آید:

$$\begin{cases} b = ۲a \\ a - b = -۲ \end{cases} \Rightarrow a - ۲a = -۲ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow b = ۴ \Rightarrow a + b = ۶$$

تست نیمساز ناحیهٔ اول و سوم از رأس سهمی $y = ax^۲ - ۲x + ۲$ عبور می‌کند. مقدار a کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۱»** طول رأس سهمی برابر $-\dfrac{b}{۲a}$ و عرض آن $-\dfrac{\Delta}{۴a}$ است.

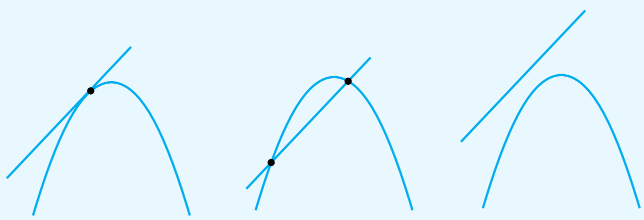
$$x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{-۲}{۲a} = \frac{۱}{a}$$

$$y = -\frac{\Delta}{۴a} = -\frac{۴ - ۸a}{۴a} = \frac{-۱ + ۲a}{a}$$

مختصات رأس در معادلهٔ نیمساز یعنی $y = x$ صدق می‌کند.

$$y = x \Rightarrow \frac{-۱+۲a}{a} = \frac{۱}{a} \Rightarrow -۱ + ۲a = ۱ \Rightarrow a = ۱$$

نکته اگر معادلهٔ حاصل از تقاطع یک سهمی و یک خط، ریشهٔ مضاعف داشته باشد، آن‌گاه خط و سهمی برهم مماس‌اند.



تست خط $y = mx + ۲$ در ناحیهٔ اول بر سهمی $y = ۲x^۲ + x + ۱۰$ مماس است. m کدام است؟

۱) -۷ ۲) ۷   ۳) ۹   ۴) -۹

پاسخ **گزینهٔ «۳»** چون خط بر سهمی مماس است، پس باید معادلهٔ زیر یک ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$۲x^۲ + x + ۱۰ = mx + ۲ \Rightarrow ۲x^۲ + (۱-m)x + ۸ = ۰$$

در نتیجه Δ معادلهٔ فوق باید صفر باشد:

$$\Delta = (۱-m)^۲ - ۶۴ = ۰ \Rightarrow (۱-m)^۲ = ۶۴ \Rightarrow \begin{cases} ۱ - m = ۸ \Rightarrow m = -۷ \\ ۱ - m = -۸ \Rightarrow m = ۹ \end{cases}$$

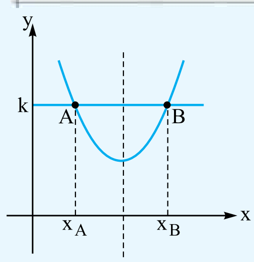
$m = -۷ \Rightarrow ۲x^۲ + ۸x + ۸ = ۰ \Rightarrow ۲(x+۲)^۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \Rightarrow$ در ناحیهٔ اول نیست.

$$m = ۹ \Rightarrow ۲x^۲ - ۸x + ۸ = ۰ \Rightarrow ۲(x-۲)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

پس $m = ۹$ قابل قبول است.

نکته اگر خط افقی $y = k$ نمودار سهمی را در نقاط A و B قطع کند، آن‌گاه وسط A و B روی محور تقارن سهمی قرار دارد. به بیان دیگر محور تقارن سهمی همان خط $x = \dfrac{x_A + x_B}{۲}$ است.

$$\text{محور تقارن:}\ x = \frac{x_A + x_B}{۲}$$



مثال خط d نمودار سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ را در نقاط $A(۲,k)$ و $B(۶,k)$ قطع می‌کند، مقدار $\dfrac{a}{b}$ را به دست آورید.

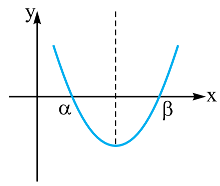
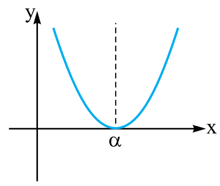
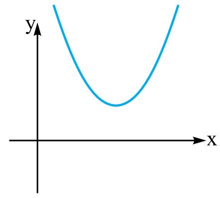
پاسخ نقاط A و B بر روی یک خط افقی قرار دارند، پس وسط آن‌ها روی محور تقارن است.

$$\text{محور تقارن}:\ x = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{۲+۶}{۲} = ۴$$

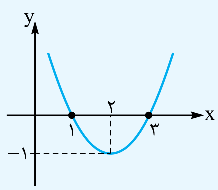
از طرفی محور تقارن همان خط $x = \dfrac{-b}{۲a}$ است، پس $\dfrac{-b}{۲a} = ۴$ و در نتیجه $\dfrac{a}{b} = \dfrac{-۱}{۸}$ است.

رابطهٔ نمودار سهمی با ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم

محل برخورد نمودار سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ با محور xها، همان ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ است. با توجه به علامت و مقدار Δ، سه حالت می‌توان در نظر گرفت:

علامت Δ	تعداد ریشه‌ها	نمودار سهمی	معادلهٔ سهمی	طول رأس (محور تقارن)
$\Delta > ۰$	دو ریشهٔ متمایز		$y = a(x-\alpha)(x-\beta)$	$x = \dfrac{\alpha+\beta}{۲}$
$\Delta = ۰$	یک ریشهٔ مضاعف		$y = a(x-\alpha)^۲$	$x = \alpha$
$\Delta < ۰$	فاقد ریشه		ــــــــ	ــــــــ

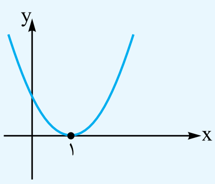
به مثال‌های زیر توجه کنید:



۱ $y = x^۲ - ۴x + ۳ = (x-۱)(x-۳)$

ریشه‌ها : $x = ۱, ۳$

رأس : $A(۲, -۱)$



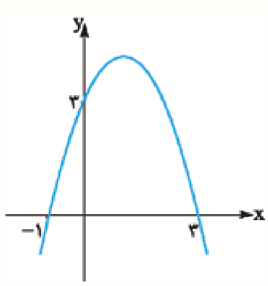
۲ $y = ۲x^۲ - ۴x + ۲ = ۲(x-۱)^۲$

ریشه‌ها : $x_۱ = x_۲ = ۱$

رأس : $A(۱, ۰)$

نکته اگر α و β محل برخورد سهمی با محور xها باشد، آن‌گاه $x = \dfrac{\alpha+\beta}{۲}$ طول رأس یا همان محور تقارن است.

تست نمودار یک سهمی به صورت مقابل است. عرض رأس سهمی چه‌قدر است؟



۱) ۵/۵

۲) ۵

۳) ۴/۵

۴) ۴

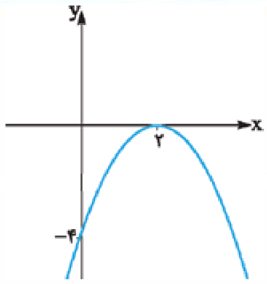
پاسخ **گزینهٔ «۴»** محل برخورد سهمی با محور xها به صورت $x = -۱$ و $x = ۳$ است پس معادلهٔ سهمی را به شکل $y = a(x+۱)(x-۳)$ می‌نویسیم. نمودار سهمی از نقطهٔ $(۰, ۳)$ عبور کرده است، این نقطه را در معادلهٔ سهمی صدق می‌دهیم:

$$y = a(x+۱)(x-۳) \xrightarrow[y=۳]{x=۰} ۳ = a \times ۱ \times (-۳) \Rightarrow a = -۱$$

پس معادلهٔ سهمی به شکل $y = -(x+۱)(x-۳)$ است، وسط ریشه‌ها طول رأس سهمی است؛ پس داریم:

$$x = \frac{-۱+۳}{۲} = ۱ \xrightarrow[\text{معادلهٔ سهمی}]{\text{جایگزین در}} y = -(۱+۱)(۱-۳) = ۴$$

تست نمودار سهمی $y=-x^2+mx+n$ به صورت مقابل است، مقدار m کدام است؟



۱) ۲
۲) -4
۳) -2
۴) ۴

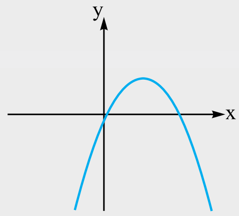
پاسخ **گزینهٔ «۴»** نمودار سهمی از نقطهٔ $(0,-4)$ عبور کرده است، پس $n=-4$ است. با توجه به این‌که نمودار سهمی بر محور xها مماس است پس ریشهٔ مضاعف دارد و در نتیجه $\Delta=0$ است.

$$\Delta=m^2+4n \xrightarrow{\Delta=0} m^2+4n=0 \xrightarrow{n=-4} m^2-16=0 \Rightarrow m=\pm 4$$

با توجه به این‌که ریشهٔ معادله مثبت است؛ پس $x=\frac{-b}{2a}=-\frac{m}{-2}=\frac{m}{2}$ باید مثبت باشد بنابراین فقط $m=4$ قابل قبول است.

مثال حدود a را چنان تعیین کنید که نمودار سهمی $y=ax^2-(a-2)x$ از ناحیهٔ دوم عبور نکند.

پاسخ ریشه‌های معادلهٔ $y=0$ که همان نقاط برخورد سهمی با محور xها می‌باشد را به دست می‌آوریم:



$$ax^2-(a-2)x=0 \Rightarrow x(ax-a+2)=0 \Rightarrow x=0, x=\frac{a-2}{a}$$

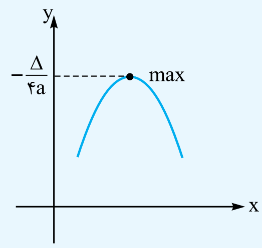
نمودار سهمی باید به صورت مقابل باشد، یعنی باید $a<0$ و $\frac{a-2}{a}\geq 0$ باشد.

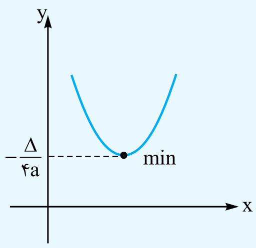
$$\frac{a-2}{a}\geq 0 \xrightarrow{a<0} a-2\leq 0 \Rightarrow a\leq 2$$

اشتراک دو شرط $a<0$ و $a\leq 2$ همان $a<0$ است.

ماکسیمم و مینیمم عبارت درجه دوم

نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ را در نظر بگیرید. رأس سهمی، وقتی $a>0$ باشد، پایین‌ترین نقطهٔ سهمی و اگر $a<0$ باشد، بالاترین نقطهٔ سهمی است. بنابراین بیشترین و یا کم‌ترین مقدار عبارت ax^2+bx+c برابر $-\frac{\Delta}{4a}$ است.





به مثال‌های مقابل توجه کنید.

۱ $y=2x^2-3x+2$ $\quad y_{\text{حداقل}}=y_{min}=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{9-4\times 2\times 2}{4\times 2}=\frac{7}{8}$

۲ $y=-x^2+4x+3$ $\quad y_{\text{حداکثر}}=y_{max}=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{16-4(-1)(3)}{4(-1)}=\frac{28}{4}=7$

مثال بیشترین مقدار مساحت مستطیلی که محیط آن برابر ۱۲ است را بیابید.

پاسخ طول مستطیل را x و عرض آن را y فرض می‌کنیم. محیط مستطیل برابر ۱۲ است، پس $2x+2y=12$ و یا $x+y=6$. مساحت مستطیل را برحسب x می‌نویسیم.

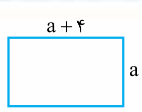
$$S=xy=x(6-x)=-x^2+6x$$

هدف یافتن بیشترین مقدار عبارت درجه‌دوم $-x^2+6x$ است.

$$S=-x^2+6x \Rightarrow S_{max}=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{36-0}{4(-1)}=9$$

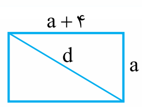
(دقت کنید که در این حالت $x=y=3$ است یعنی مربع بیشترین مساحت را دارد.)

تست کوتاه‌ترین قطر مستطیل شکل مقابل چه‌قدر است؟



۱) ۲
۲) ۴
۳) $4\sqrt{2}$
۴) $2\sqrt{2}$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** اگر x و y، طول و عرض یک مستطیل باشند، اندازهٔ قطر آن برابر $\sqrt{x^2+y^2}$ است.



$$d=\sqrt{(a+4)^2+a^2}=\sqrt{2a^2+8a+16}$$

حداقل مقدار $2a^2+8a+16$ برابر $-\frac{64-128}{8}=8$ است، پس $\min(d)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ است.

فرم دیگر سهمی

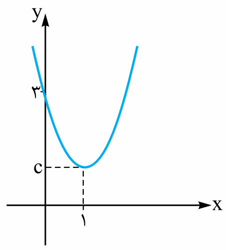
معادلهٔ هر سهمی را می‌توان به صورت روبه‌رو نیز نوشت: $y = a(x-h)^۲ + k \quad a \neq ۰$

این سهمی، رأسی به مختصات (h,k) و خط تقارنی به معادلهٔ $x = h$ دارد.

مثال **مختصات رأس و خط تقارن سهمی $y = x^۲ - ۴x + ۱۰$ را بیابید.**

پاسخ معادلهٔ سهمی را به صورت $y = (x-۲)^۲ + ۶$ می‌نویسیم. در این صورت مختصات رأس به صورت $(۲,۶)$ و معادلهٔ خط تقارن به صورت $x = ۲$ است.

تست **نمودار سهمی $y = ۲(x-a)^۲ + b$ به صورت مقابل است. مقدار c کدام است؟**



۱) ۱

۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ **گزینهٔ «۱»** مختصات رأس سهمی به صورت (a,b) است. با توجه به نمودار $a = ۱$ است و به ازای $x = ۰$ مقدار $y = ۳$ است.

$$y = ۲(x-a)^۲ + b \xrightarrow[y=۳]{x=۰} ۳ = ۲a^۲ + b \xrightarrow{a=۱} b = ۱$$

مقدار c همان عرض رأس سهمی، یعنی b است پس $c = ۱$ است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۳۷۱- ریشهٔ کوچک‌تر معادلهٔ $(\sqrt{۳}+۱)x^۲ - ۲\sqrt{۳}x + \sqrt{۳} - ۱ = ۰$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳} - ۲$ ۲) $۲ - \sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۳} - ۲$ ۴) $۲ - ۲\sqrt{۳}$

۳۷۲- اگر α کوچک‌ترین ریشه و β بزرگ‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $x^۲ - ۴x + ۲ = ۰$ باشد، حاصل $\beta^۲ + ۴\alpha$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۳۷۳- اگر ۱ و ۳− ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ + mx + n = ۰$ باشند، حاصل mn کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۱۲− ۴) ۲۴−

۳۷۴- در کدام‌یک از معادلات زیر، یکی از ریشه‌ها، دو برابر ریشهٔ دیگر است؟

۱) $x^۲ - ۲x - ۸ = ۰$ ۲) $x^۲ + ۶x + ۸ = ۰$ ۳) $x^۲ - x - ۲ = ۰$ ۴) $x^۲ + x - ۲ = ۰$

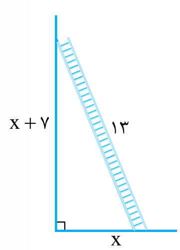
۳۷۵- اختلاف ریشه‌های غیرمشترک دو معادلهٔ $x^۲ - x - ۶ = ۰$ و $x^۲ - ۳x - ۱۰ = ۰$ چه‌قدر است؟

۱) ۸ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۳۷۶- اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است، اگر ۴ سال دیگر نسبت سن آن دو برادر، $\frac{۶}{۵}$ باشد، سن برادر کوچک‌تر هم‌اکنون چند سال است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۳۷۷- نردبانی به طول ۱۳ متر را مطابق شکل به دیواری تکیه داده‌ایم. فاصلهٔ پای نردبان تا دیوار چه عددی است؟



۱) ۵

۲) ۷

۳) ۹

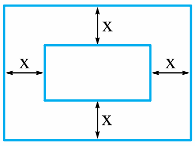
۴) ۱۱

۳۷۸- اضلاع مثلث قائم‌الزاویه $۲x - ۱, ۲x + ۱$ و x می‌باشد. مساحت مثلث کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰

۳۷۹- از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر قرار است یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ متر مربع بسازیم. اختلاف طول و عرض مستطیل کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷



۳۸۰- در شکل مقابل ابعاد مستطیل بزرگ برابر ۱۵ و ۲۰ و مساحت مستطیل کوچک برابر ۱۵۰ است. مقدار x کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۳

۳) ۲/۵ ۴) ۵

۳۸۱- فشار خون نرمال یک شخص از رابطهٔ $P=0/006S^2-0/02S+120$ به دست می‌آید که در آن P فشار خون برحسب میلی‌متر جیوه و S سن شخص می‌باشد. اگر فشار خون علی ۱۳۴ میلی‌متر جیوه باشد، سن علی چه‌قدر است؟

۱) ۲۵ ۲) ۵۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۵

۳۸۲- در یک استوانه به ارتفاع x، سطح کل برابر $0/48\pi x^2$ است. حجم این استوانه چند برابر πx^3 است؟

۱) ۰/۰۴ ۲) ۰/۰۶ ۳) ۰/۰۸ ۴) ۰/۱۲

۳۸۳- $\frac{2-\sqrt{6}}{2}$ ریشهٔ کدام‌یک از معادلات زیر می‌تواند باشد؟

۱) $x^2-2x=-\frac{1}{2}$ ۲) $x^2+2x=\frac{1}{2}$ ۳) $x^2+2x=-\frac{1}{2}$ ۴) $x^2-2x=\frac{1}{2}$

۳۸۴- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+6x+2=0$ و $\alpha<\beta$ باشد، حاصل $\alpha^2-\beta^2$ کدام است؟

۱) $-12\sqrt{7}$ ۲) $12\sqrt{7}$ ۳) -32 ۴) 32

۳۸۵- اگر a و b اعداد گویا باشند و $\frac{2-\sqrt{5}}{2}$ یکی از ریشه‌های $2x^2+ax+b=0$ باشد، مقدار $a.b$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۴) -2

۳۸۶- یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2+mx+n=0$ برابر $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ است. با فرض صحیح‌بودن m و n، حاصل mn کدام است؟

۱) 1 ۲) -4 ۳) -3 ۴) 5

۳۸۷- اگر یکی از ریشه‌های $x^4+ax^2+b=0$ به صورت $x=\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}$ باشد و بدانیم $a,b\in\mathbb{Z}$؛ مقدار b کدام است؟

۱) -8 ۲) 8 ۳) 16 ۴) -16

۳۸۸- اگر $x=-1$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $(m-x)(mx+1)=-3$ باشد، ریشهٔ دیگر کدام است؟

۱) $-\frac{5}{2}$ یا $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ یا $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{5}{2}$ یا $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$ یا $\frac{1}{2}$

۳۸۹- اگر $x=-\frac{3}{2}$ تنها ریشهٔ معادلهٔ $4x(x-a)=b$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) -6 ۲) 6 ۳) 12 ۴) -12

۳۹۰- در روش مربع کامل‌سازی، متوجه شدیم ریشه‌های معادلهٔ $x^2+2ax+b=0$ همان ریشه‌های معادلهٔ $(x+a)^2+b+4a$ است. a کدام می‌تواند باشد؟

۱) 2 ۲) -2 ۳) 4 ۴) -4

۳۹۱- قدرنسبت دنبالهٔ هندسی $a, b-2a, b, \dots$ کدام است؟ $(0<a<b)$

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۹۲- بین ضرایب معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$ رابطهٔ $a-2b+4c=0$ برقرار است. یکی از ریشه‌های این معادله کدام است؟

۱) $-\frac{c}{2a}$ ۲) $\frac{c}{2a}$ ۳) $\frac{2c}{a}$ ۴) $-\frac{2c}{a}$

۳۹۳- معادلات $x^2+3x+m=0$ و $x^2-x-m=0$ ریشهٔ مشترک دارند. حاصل‌جمع m با ریشهٔ مشترک چه‌قدر است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) -1 ۴) -2

۳۹۴- معادلات $x^2-3x+a=0$ و $x^2-ax+3=0$ فقط یک ریشهٔ مشترک دارند. ریشهٔ مشترک چه عددی است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) 3 ۴) -3

۳۹۵- اختلاف ریشه‌های غیرمشترک دو معادلهٔ $x^2-ax+a-1=0$ و $x^2-(a+1)x+a=0$ چه‌قدر است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) $2a$ ۴) $1-2a$

۳۹۶- معادله‌های $x^2-6x+a=0$ و $x^2-2x-3a=0$ یک ریشهٔ مشترک غیرصفر دارند. اختلاف ریشه‌های غیرمشترک کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۷

۳۹۷- ریشه‌های کدام معادلهٔ زیر $\cot 30^\circ$ و $\tan 30^\circ$ است؟

۱) $3x^2+4\sqrt{3}x+3=0$ ۲) $3x^2-4\sqrt{3}x+3=0$ ۳) $x^2-2\sqrt{3}x+1=0$ ۴) $x^2+2\sqrt{x}+1=0$

۳۹۸- اگر $4y^2 - 4xy - 3x^2 = 0$، مقدار مثبت $\frac{y}{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۳۹۹- تعداد ریشه‌های معادلهٔ $10(x-\sqrt{x})^2 - 11(x-\sqrt{x}) + 1 = 0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۰۰- تعداد ریشهٔ $x^2 - x + 2 + \frac{3}{x^2 - x + 1} = 5$ کدام عدد است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) صفر

۴۰۱- اگر مجموعه‌ای که شامل ریشه‌های معادلهٔ $(x-1)(x+2)(x-3)(x-6) = 16$ است را A بنامیم، مجموع عضوهای مجموعهٔ A کدام است؟

۱) -15 ۲) ۱۵ ۳) ۶ ۴) ۸

۴۰۲- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^4 - 4x^2 - 1 = 0$ و $\alpha < \beta$ باشد، حاصل $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta$ کدام است؟

۱) $6+3\sqrt{5}$ ۲) $2+\sqrt{5}$ ۳) $2-\sqrt{5}$ ۴) $6-3\sqrt{5}$

۴۰۳- مجموع جواب‌های معادلهٔ $4^x = 3 \times 2^{x+1} - 8$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۰۴- اگر $\frac{8}{x^2-4} = \frac{x}{x-2} + \frac{x-2}{x+2}$ دارای جواب α باشد، مقدار $||\alpha| - 2|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۰۵- یکی از عامل‌های چندجمله‌ای $P = x^3 - 7x + a$، عبارت $x - 2$ است. اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین ریشهٔ $P(x) = 0$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۰۶- هرگاه $4(\frac{x}{x^2+1})^2 + (x + \frac{1}{x}) + 1 = 0$ مقدار x کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) -2 ۴) $\frac{1}{2}$

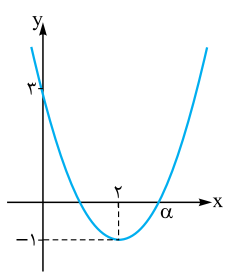
۴۰۷- بزرگ‌ترین ریشهٔ $2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$ چه عددی است؟

۱) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{\sqrt{5}-3}{2}$ ۴) ۳

۴۰۸- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 2x + m = 0$ و $\alpha\beta + \alpha^2 = 10$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) -15 ۳) ۳۵ ۴) -35

۴۰۹- اگر شکل مقابل نمودار یک تابع درجه۲ باشد، ریشهٔ بزرگ‌تر کدام است؟

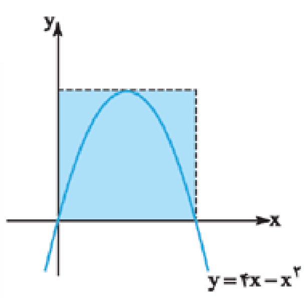


۱) ۳
۲) ۴
۳) $2+2\sqrt{2}$
۴) $2+3\sqrt{2}$

۴۱۰- نمودار یک سهمی به معادلهٔ $y = 2(x+1)^2 + k$ از نقطهٔ $A(-3,5)$ عبور می‌کند. رأس این سهمی به چه عرضی است؟

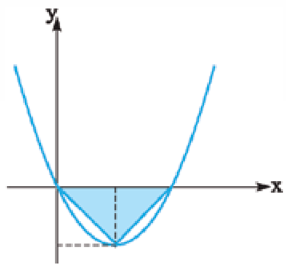
۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

۴۱۱- مساحت مستطیل رنگی شکل مقابل چه‌قدر است؟



۱) ۶
۲) ۱۲
۳) ۸
۴) ۱۶

۴۱۲- نمودار سهمی $y = x^{۲} - ۲\sqrt{۳}x$ به صورت مقابل است. مساحت مثلث رنگی چه‌قدر است؟



۱) $۳\sqrt{۳}$

۲) $۶\sqrt{۳}$

۳) $\frac{۳}{۲}\sqrt{۳}$

۴) $۴\sqrt{۳}$

۴۱۳- اگر $x = ۲$ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y = ۳x^{۲} + bx + ۱$ باشد، عرض رأس این سهمی کدام است؟

۱) -۱۲ ۲) -۱۱ ۳) -۱۰ ۴) -۹

۴۱۴- خط $x = ۲$، محور تقارن سهمی $y = \frac{۱}{۲}x^{۲} + ax + b$ می‌باشد. اگر معادلهٔ $y = ۰$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۱۵- نمودار سهمی $y = (۲x - ۱)(ax + ۳)$ بر محور xها مماس است. عرض رأس سهمی $y = x^{۲} + ax - a$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۴ ۴) -۴

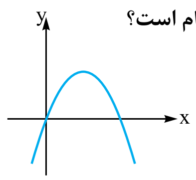
۴۱۶- محور تقارن سهمی‌های $y = x^{۲} - ۲x + a$ و $y = ۲x^{۲} + bx - ۵$ مشترک است. اگر خط $y = ۱$ از دو نقطه با عرض یکسان روی دو سهمی عبور کند، مقدار $a + b$ چه‌قدر است؟

۱) -۶ ۲) -۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۴۱۷- رأس سهمی $y = kx^{۲} - ۴x + ۳$ روی خط $y = -x + ۲$ قرار دارد. عرض رأس سهمی کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۱۸- اگر a عدد طبیعی باشد و نمودار $y = (a^{۲} - ۳)x^{۲} + ۴ax + a - ۲b$ به صورت شکل زیر باشد، مختصات رأس سهمی کدام است؟



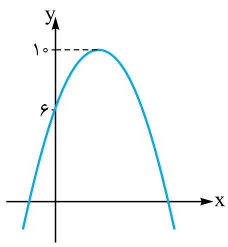
۱) $A(۱,۲)$

۲) $A(۱,۴)$

۳) $A(۲,۴)$

۴) $A(۲,۲)$

۴۱۹- نمودار سهمی $y = -x^{۲} + bx + c$ به صورت مقابل است. مقدار b کدام است؟



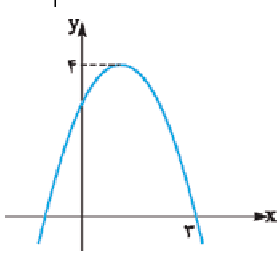
۱) ۲

۲) ۶

۳) -۴

۴) ۴

۴۲۰- نمودار $y = -x^{۲} + ax + b$ به شکل مقابل است. مقدار ab کدام است؟



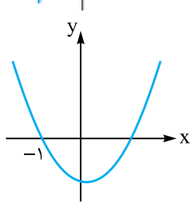
۱) -۱۲

۲) ۱۲

۳) -۶

۴) ۶

۴۲۱- معادلهٔ سهمی $y = ax^{۲} + bx + c$ به شکل مقابل است. مقدار $a + c$ کدام می‌باشد؟



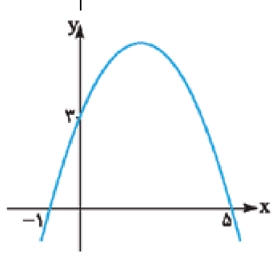
۱) b

۲) $-b$

۳) -۱

۴) ۱

۴۲۲- نمودار یک سهمی به صورت مقابل است. عرض رأس این سهمی کدام است؟



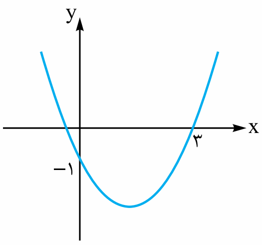
۱) ۵/۲

۲) ۵/۳

۳) ۵/۴

۴) ۵/۵

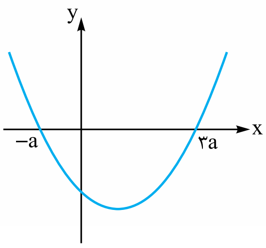
۴۲۳- نمودار $y = x^۲ - ax + b$ به شکل مقابل است. ریشهٔ کوچک‌تر آن کدام است؟



۱) $-\frac{۴}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$

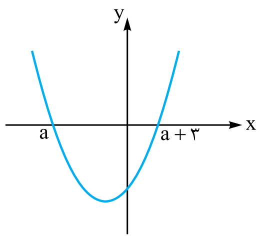
۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

۴۲۴- نمودار سهمی $y = ۳x^۲ - ۴x + c$ به صورت مقابل است. مقدار c کدام است؟



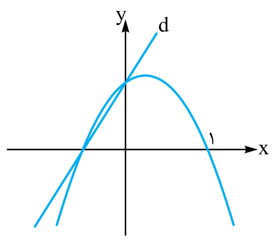
۱) -۱
۲) -۲
۳) -۳
۴) -۴

۴۲۵- نمودار $y = x^۲ + x + m + ۱$ به صورت مقابل است. مقدار m کدام است؟



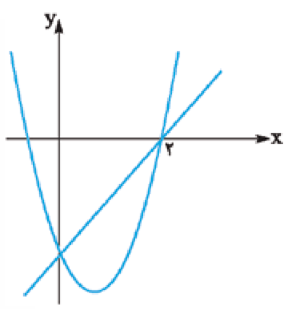
۱) -۶
۲) -۸
۳) -۳
۴) -۴

۴۲۶- نمودار سهمی $y = ax^۲ + ۳x + c$ به صورت مقابل است. معادلهٔ خط d کدام است؟



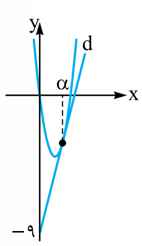
۱) $y = ax + c$
۲) $y = -ax + c$
۳) $y = ۳ax + c$
۴) $y = -\frac{a}{۳}x + c$

۴۲۷- دو منحنی $y = ۲x + b$ و $y = ۲x^۲ + ax + b$ روی محورهای مختصات همدیگر را قطع می‌کنند. مختصات رأس سهمی کدام است؟



۱) $(\frac{۱}{۲}, -۵)$
۲) $(۱, -۵)$
۳) $(\frac{۱}{۲}, -\frac{۹}{۲})$
۴) $(۱, -۶)$

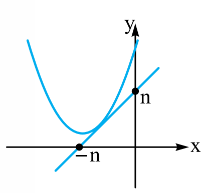
۴۲۸- مطابق شکل، خط d در نقطه‌ای به طول α بر سهمی $y = ۴x^۲ - ۸x$ مماس است. α کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$

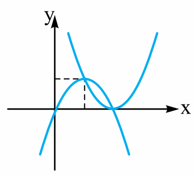
۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۸}{۵}$

۴۲۹- در شکل زیر، خط d بر نمودار تابع $y = x^۲ + ۳x + m$ مماس است. حاصل $m - n$ کدام است؟



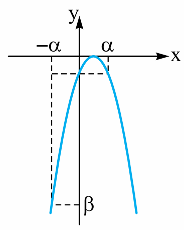
۱) ۱
۲) ۲
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

۴۳۰- در شکل مقابل، نمودار سهمی‌های $y=-x^2+2x$ و $y=ax^2+bx+c$ رسم شده است. حاصل $b-c$ کدام است؟



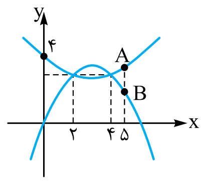
۱) ۴-
۲) ۸-
۳) ۴
۴) ۸

۴۳۱- خط $y=3x-6$ سهمی (در شکل مقابل) را روی محورهای مختصات قطع می‌کند. مقدار β کدام است؟



۱) ۳۲-
۲) ۳۶-
۳) ۴۸-
۴) ۵۴-

۴۳۲- نمودار دو سهمی متمایز در شکل مقابل رسم شده است. طول پاره‌خط AB چه‌قدر است؟

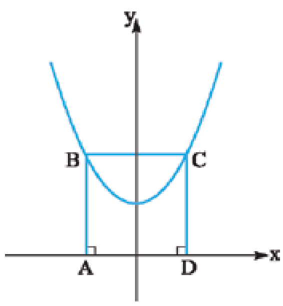


۱) ۲/۵
۲) ۲
۳) ۱/۵
۴) ۱

۴۳۳- اگر کم‌ترین مقدار $y=ax^2+3x+5$ برابر ۱- باشد، طول رأس سهمی کدام است؟

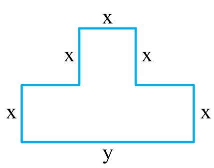
۱) ۴-
۲) $-\frac{4}{9}$
۳) $\frac{4}{3}$
۴) $-\frac{4}{3}$

۴۳۴- در شکل مقابل، مساحت مربع ABCD برابر ۱۶ است. اگر معادلهٔ سهمی $y=ax^2+bx+2$ باشد، مقدار a کدام است؟



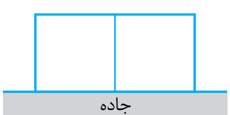
۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۲
۳) $\frac{3}{2}$
۴) ۳

۴۳۵- محیط شکل مقابل برابر ۱۲ است. بیشترین مقدار مساحت آن چه‌قدر است؟



۱) ۶
۲) ۹
۳) ۱۸
۴) ۱۲

۴۳۶- با ۴۸ متر طناب یک محوطه مطابق شکل مقابل، در کنار یک جاده جدا کرده‌ایم. محوطهٔ دو قسمت مستطیل‌شکل است. بیشترین مساحت کدام است؟

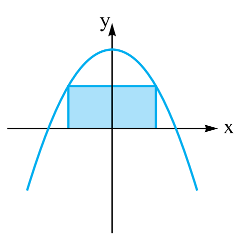


۱) ۲۸۸
۲) ۵۷۶
۳) ۹۶
۴) ۱۹۲

۴۳۷- اگر $2x+y=10$ باشد، حداقل مقدار x^2+y^2 چه‌قدر است؟

۱) ۲۰
۲) ۱۵
۳) ۱۰
۴) ۵

۴۳۸- اگر معادلهٔ سهمی روبه‌رو $y=9-x^2$ باشد، بیشترین محیط مستطیل چه عددی است؟



۱) ۲۰
۲) ۲۲
۳) ۲۴
۴) ۱۸

۴۳۹- نقطهٔ M روی نمودار $y=\sqrt{2x+6}$ قرار دارد. کم‌ترین فاصلهٔ M از نقطهٔ $A(2,0)$ چه‌قدر است؟

۱) ۵
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

تعیین علامت

منظور از تعیین علامت عبارت جبری $P(x)$ آن است که تعیین کنیم به ازای چه مقادیری از x، علامت $P(x)$ مثبت به ازای چه مقادیری از x علامت $P(x)$ منفی است.

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه اول

برای تعیین علامت عبارت $y = ax + b$ ابتدا ریشهٔ آن $(ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a})$ را پیدا می‌کنیم و سپس مطابق جدول زیر تعیین علامت می‌کنیم:

x	$x < -\frac{b}{a}$	$x = -\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
$y = ax + b$	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

این جدول را به طور خلاصه به صورت روبه‌رو رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$y = ax + b$	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

به طور مثال جدول تعیین علامت عبارت‌های $2x - 6$ و $-3x + 6$ به صورت زیر است:

۱

x		3	
$2x - 6$	$-$	0	$+$

۲

x		2	
$-3x + 6$	$+$	0	$-$

تست **اگر a یک عدد طبیعی و جدول تعیین علامت عبارت $P = (3a - 4)x + 2 - b$ به صورت زیر باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟**

x		1	
P	$+$	0	$-$

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۲»** از روی جدول متوجه می‌شویم که $x = 1$ ریشهٔ عبارت $P = 0$ است. $P = 0 \xrightarrow{x=1} 3a - 4 + 2 - b = 0 \quad (1)$

سمت راست $x = 1$ علامت P منفی است و چون باید علامت P موافق علامت $3a - 4$ باشد پس $3a - 4$ منفی است. مقدار $3a - 4$ فقط به ازای یک مقدار طبیعی a یعنی $a = 1$، منفی است. بنابراین طبق رابطهٔ (۱) مقدار $b = 1$ به دست می‌آید.

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم

برای تعیین علامت عبارت $P = ax^2 + bx + c$ ابتدا ریشه‌های معادلهٔ $P = 0$ را پیدا می‌کنیم. با توجه به مقدار Δ و تعداد ریشه‌های این معادله، عبارت P را به یکی از صورت‌های زیر تعیین علامت می‌کنیم:

۱ $P = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ x_1, x_2 ریشه‌ها باشند

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
P	موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

۲ $P = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow$ x_1 ریشهٔ مضاعف باشد

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
P	موافق علامت a	0	موافق علامت a

۳ $P = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ ریشه ندارد

x	$-\infty$	$+\infty$
P	موافق علامت a	

مثال **عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.**

۱) $P = x^2 - 5x + 6$ **۲) $P = -x^2 + 4x - 4$** **۳) $P = x^2 - 2x + 2$**

پاسخ ۱) ریشه‌های $P = 0$ عبارت‌اند از $x = 2$ و $x = 3$ و علامت ضریب x^2 مثبت است.

x		2		3	
P	$+$	0	$-$	0	$+$

۲) ریشهٔ $P = 0$ مضاعف و برابر $x = 2$ و علامت ضریب x^2 منفی است.

x		2	
P	$-$	0	$-$

۳) معادلهٔ $P = 0$ ریشه ندارد و ضریب x^2 مثبت است.

x	
P	$+$

نکته ۱ عبارت $P = ax^۲ + bx + c$ به شرطی همواره مثبت است که $a > ۰$ و $\Delta < ۰$ باشد.

۲ عبارت $P = ax^۲ + bx + c$ به شرطی همواره منفی است که $a < ۰$ و $\Delta < ۰$ باشد.

تست **به ازای چه مقادیری از m، عبارت $P = mx^۲ + ۶x + ۲m + ۳$ به ازای جمیع مقادیر x، مثبت است؟**

۱) $m > ۳$ ۲) $۰ < m < \frac{۳}{۲}$ ۳) $m > \frac{۳}{۲}$ ۴) $۰ < m < ۳$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** می‌بایست $\Delta < ۰$ و $m > ۰$ باشد.

$$\Delta = ۳۶ - ۴m(۲m + ۳) = -۸m^۲ - ۱۲m + ۳۶ = ۴(-۲m^۲ - ۳m + ۹)$$

عبارت $-۲m^۲ - ۳m + ۹$ را تعیین علامت می‌کنیم.

$$-۲m^۲ - ۳m + ۹ = ۰ \Rightarrow m = -۳ \; , \; \frac{۳}{۲}$$

m		-۳		$\frac{۳}{۲}$	
$-۲m^۲ - ۳m + ۹$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

پس به شرطی $\Delta < ۰$ است که $m < -۳$ و یا $m > \frac{۳}{۲}$ باشد و چون باید $m > ۰$ باشد، پس فقط جواب $m > \frac{۳}{۲}$ قابل قبول است.

نکته اگر α و β $(\beta > \alpha)$ ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $P(x) = ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند، آن‌گاه:

۱ $\alpha < t < \beta \Leftrightarrow aP(t) < ۰$ (بین دو ریشه علامت a و P مخالف هم)

۲ $t < \alpha$ یا $t > \beta \Leftrightarrow aP(t) > ۰$ (خارج دو ریشه علامت a و P موافق هم)

تست **اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $P(x) = x^۲ - mx + m - ۱ = ۰$ و $-۱ < \alpha < ۲ < \beta$ باشد، آن‌گاه کدام صحیح است؟**

۱) $m < ۰$ ۲) $۰ < m < ۳$ ۳) $m > ۳$ ۴) $m < ۳$

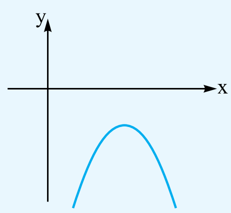
پاسخ **گزینهٔ «۳»** علامت ضریب $x^۲$ مثبت است، پس باید $P(-۱)$ مثبت و $P(۲)$ منفی باشد.

$$\begin{cases} P(-۱) = ۱ + m + m - ۱ = ۲m \xrightarrow{P(-۱) > ۰} m > ۰ \\ P(۲) = ۴ - ۲m + m - ۱ = ۳ - m \xrightarrow{P(۲) < ۰} m > ۳ \end{cases} \xrightarrow{\cap} m > ۳$$

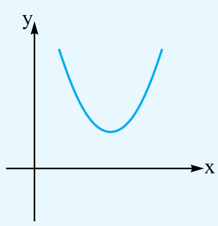
رابطهٔ نمودار عبارت درجه‌دوم با علامت آن: سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ را در نظر بگیرید، آن قسمت از نمودار سهمی که بالای محور xها است، علامت y مثبت و آن قسمت از نمودار سهمی که زیر محور xها است، علامت y منفی است. به نمودارهای زیر توجه کنید.

۱ $\Delta < ۰$

$\begin{cases} a < ۰ \\ y < ۰ \end{cases}$

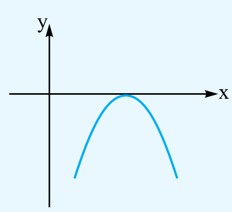


$\begin{cases} a > ۰ \\ y > ۰ \end{cases}$

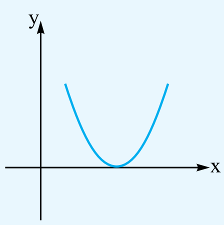


۲ $\Delta = ۰$

$\begin{cases} a < ۰ \\ y \leq ۰ \end{cases}$

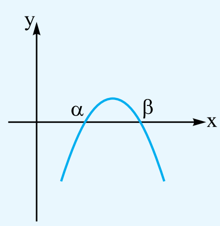


$\begin{cases} a > ۰ \\ y \geq ۰ \end{cases}$

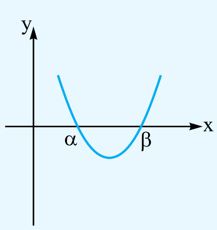


۳ $\Delta > ۰$

$a < ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha < x < \beta \Rightarrow y > ۰ \\ x < \alpha , x > \beta \Rightarrow y < ۰ \end{cases}$



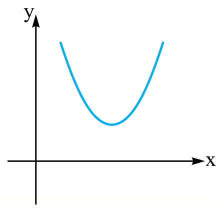
$a > ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha < x < \beta \Rightarrow y < ۰ \\ x < \alpha , x > \beta \Rightarrow y > ۰ \end{cases}$



تست **به ازای چه مقادیری از a نمودار سهمی $y = (a - ۱)x^۲ + ۲\sqrt{۲}x + a$ بالای محور xها است؟**

۱) $a < -۱$ ۲) $a > ۱$ ۳) $a > ۲$ ۴) $۱ < a < ۲$

پاسخ گزینهٔ «۳» برای آن‌که نمودار همواره بالای محور xها باشد باید $a-۱>۰$ و $\Delta<۰$ باشد.



$$a-۱>۰ \Rightarrow a>۱$$

$$\Delta=۸-۴a(a-۱)=۴(-a^۲+a+۲)$$

a		-۱		۲	
Δ	$-$		$+$		$-$

به ازای $a<-۱$ و $a>۲$ مقدار Δ منفی است که با توجه به شرط $a>۱$، فقط حالت $a>۲$ قابل قبول است.

تست نمودار سهمی $y=-x^۲+۳x+۲$ همواره زیر خط $y=m-۳x$ است. حدود m کدام است؟

۱) $m>۸$ ۲) $m>۹$ ۳) $m>۱۰$ ۴) $m>۱۱$

پاسخ گزینهٔ «۴» روش اول: مطابق شکل باید خط و سهمی برخورد نداشته باشند، یعنی معادلهٔ زیر جواب نداشته باشد:

$$-x^۲+۳x+۲=m-۳x \Rightarrow x^۲-۶x+m-۲=۰$$

در نتیجه باید Δ معادلهٔ فوق منفی باشد:

$$\Delta=۳۶-۴(m-۲)<۰ \Rightarrow ۳۶<۴(m-۲) \Rightarrow ۹<m-۲ \Rightarrow ۱۱<m$$

روش دوم: باید به ازای همهٔ مقادیر x نامعادلهٔ زیر همواره برقرار باشد:

$$-x^۲+۳x+۲<m-۳x \Rightarrow \underbrace{-x^۲+۶x+۲-m}_{P}<۰$$

پس باید عبارت P همواره منفی باشد:

$$\begin{cases}\Delta=۳۶+۴(۲-m)<۰ \Rightarrow m>۱۱\\ a=-۱<۰\end{cases}$$

تعیین علامت در حالت کلی

فرض کنید عبارت P از حاصل‌ضرب یا تقسیم چند عبارت درجه‌اول یا درجه‌دوم تشکیل شده باشد (مثلاً عبارت $P=\dfrac{(x-۱)(x+۲)^۲}{x^۲+x-۶}$). برای تعیین علامت P، هر یک از عبارت‌های موجود در صورت و مخرج را تعیین علامت می‌کنیم و نتایج را در یک جدول می‌نویسیم. علامت‌های هر ناحیه را در هم ضرب می‌کنیم و در سطر آخر قرار می‌دهیم. بدین ترتیب علامت P به دست می‌آید.

مثال عبارت $P=\dfrac{(x-۱)(x+۲)^۲}{x^۲+x-۶}$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ با یافتن ریشهٔ هر یک از عبارت‌های موجود در صورت و مخرج، آن‌ها را تعیین علامت می‌کنیم.

$$\begin{cases}x-۱=۰ \Rightarrow x=۱\\ (x+۲)^۲=۰ \Rightarrow x=-۲\\ x^۲+x-۶=۰ \Rightarrow x=-۳,۲\end{cases}$$

x		-۳		-۲		۱		۲	
$x-۱$	$-$		$-$		$-$		$+$		$+$
$(x+۲)^۲$	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$x^۲+x-۶$	$+$		$-$		$-$		$-$		$+$
P	$-$		$+$		$+$		$-$		$+$

تست در بازهٔ (a,b) عبارت $P=\dfrac{(x+۱)(x^۲-x-۲)}{x-۳}$ منفی است. حداکثر $b-a$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ «۱» هر یک از عبارت‌های صورت و مخرج را تعیین علامت می‌کنیم.

$$\begin{cases}x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱\\ x^۲-x-۲=۰ \Rightarrow x=-۱,۲\\ x-۳=۰ \Rightarrow x=۳\end{cases}$$

x		-۱		۲		۳	
$x+۱$	$-$		$+$		$+$		$+$
$x^۲-x-۲$	$+$		$-$		$+$		$+$
$x-۳$	$-$		$-$		$-$		$+$
P	$+$		$+$		$-$		$+$

در بازهٔ $(۲,۳)$ علامت P، منفی است، پس $b-a=۳-۲=۱$.

نکته برای تعیین علامت یک عبارت گویا که صورت و مخرج آن تا حد امکان تجزیه شده است، ابتدا ریشهٔ تمام عبارت‌های موجود در صورت و مخرج را پیدا می‌کنیم. سپس علامت ضریب بزرگ‌ترین درجهٔ صورت و مخرج را در هم ضرب می‌کنیم و حاصل آن را در اولین خانهٔ سمت راست جدول قرار می‌دهیم. حال در جدول به سمت چپ حرکت می‌کنیم و یکی در میان علامت‌ها را عوض می‌کنیم مگر آن‌که به ریشهٔ مضاعف برسیم که در این صورت علامت عوض نمی‌شود.

مثال عبارت $P=\dfrac{(x+۱)^{۲}(x-۲)}{(x+۲)(x-۳)}$ را تعیین علامت کنید.

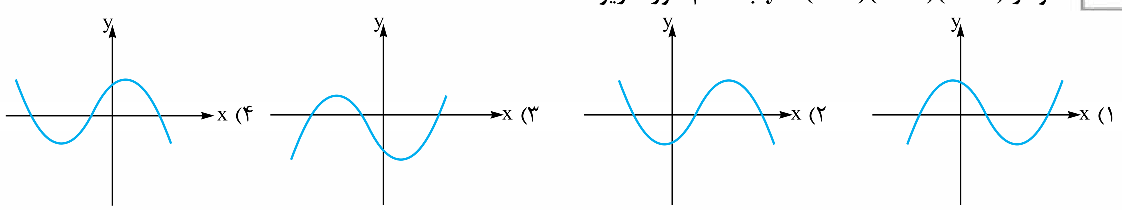
پاسخ ریشه‌های عبارت‌های صورت و مخرج عبارت‌اند از $x=۳,۲,-۱,-۲$. علامت بزرگ‌ترین درجهٔ صورت و مخرج مثبت است پس اولین خانهٔ سمت راست دارای علامت مثبت است.

x		−۲		−۱		۲		۳	
P									+

حال به سمت چپ حرکت می‌کنیم و علامت‌ها را عوض می‌کنیم به‌جز دو خانه‌ای که دو طرف ریشهٔ مضاعف (یعنی $x=-۱$) است.

x		−۲		−۱		۲		۳	
P	−		+		+		−		+

تست نمودار $y=(x+۱)(x-۲)(x-۳)$ به کدام صورت زیر است؟



پاسخ گزینهٔ «۱» ریشه‌های معادلهٔ $y=۰$ عبارت‌اند از $x=۳$، $x=۲$ و $x=-۱$، یعنی یک ریشهٔ منفی و دو ریشهٔ مثبت دارد. پس یا **۱** صحیح است و یا **۲**. تعیین علامت عبارت y به صورت زیر است. پس از سمت راست، نمودار y ابتدا بالای محور xها است، سپس زیر محور xها. بنابراین در بین **۱** و **۲** فقط **۱** صحیح است.

x		−۱		۲		۳	
y	−		+		−		+

نامعادله

برای حل نامعادله از خواص زیر استفاده می‌کنیم:

۱ جمع یک عدد به دو طرف: $a<b \Leftrightarrow a\pm c<b\pm c$

۲ ضرب یک عدد مثبت در دو طرف: $a<b \xleftrightarrow{c>۰} ac<bc$

۳ ضرب یک عدد منفی در دو طرف: $a<b \xleftrightarrow{c<۰} ac>bc$

۴ معکوس‌کردن دو طرف: $a<b \xrightarrow{ab>۰} \dfrac{۱}{a}>\dfrac{۱}{b}$

۵ به توان فردرساندن دو طرف: $a<b \xleftrightarrow{\text{فرد}\ n} a^n<b^n$

۶ به توان زوج‌رساندن دو طرف: $۰<a<b \xrightarrow{\text{زوج}\ n} a^n<b^n$

تست با فرض $۰<\dfrac{۱}{a}<-\dfrac{۲}{b}$، کدام عدد زیر مثبت است؟

۱) $a+۲b$ ۲) $a+b$ ۳) $۱+ab$ ۴) $b+۳a$

پاسخ گزینهٔ «۴» با توجه به فرض سؤال، a مثبت و b منفی است.

$$\frac{۱}{a}<-\frac{۲}{b} \xrightarrow{ab<۰} \frac{۱}{a}(ab)>-\frac{۲}{b}(ab) \Rightarrow b>-۲a \Rightarrow b+۲a>۰$$

چون $a>۰$ است، پس $b+۲a+a>۰$ یعنی $b+۳a$ مثبت است.

مثال نامعادلهٔ $\dfrac{x}{۲}-\dfrac{۳}{۵}\le\dfrac{۳x+۱}{۴}$ را حل کنید و جواب آن را روی محور نشان دهید.

پاسخ دو طرف را در ۲۰ ضرب می‌کنیم:

$$۱۰x-۱۲\le ۱۵x+۵ \Rightarrow -۱۲-۵\le ۱۵x-۱۰x \Rightarrow -۱۷\le ۵x \Rightarrow x\ge -\frac{۱۷}{۵}$$

تست مجموعه جواب نامعادلهٔ $1 < \frac{2x-1}{x+2}$ به صورت (a,b) می‌باشد. حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ **گزینهٔ «۱»** عبارت سمت راست را به چپ منتقل می‌کنیم و مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$\frac{2x-1}{x+2}-1<0 \Rightarrow \frac{2x-1-(x+2)}{x+2}<0 \Rightarrow \frac{x-3}{x+2}<0$$

برای حل این نامعادله دو روش داریم:

روش اول: عبارت سمت چپ را تعیین علامت می‌کنیم:

		-2		3	
$x-3$	$-$		$-$		$+$
$x+2$	$-$		$+$		$+$
$\frac{x-3}{x+2}$	$+$		$-$ جواب		$+$

بازهٔ $(-2,3)$ جواب نامعادله است؛ پس $b-a=5$.

روش دوم: مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\frac{x-3}{x+2}>0$ با مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $(x-3)(x+2)<0$ یکسان است.

x		-2		3	
$(x-3)(x+2)$	$+$		$-$		$+$

$\Rightarrow$ جواب: $(-2,3)$

نکته تعیین علامت عبارت $p=\frac{ax+b}{cx+d}$ به مانند تعیین علامت عبارت $q=(ax+b)(cx+d)$ است. (تنها تفاوت آن است که عبارت p به ازای $x=\frac{-d}{c}$ تعریف نشده ولی عبارت q برابر صفر است.)

تست مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $1 < \frac{ax+6}{bx-4}$ به صورت $(2,+\infty)$ است. a کدام است؟

۱) -2 یا ۵ ۲) ۲ یا -5 ۳) ۲ یا ۵ ۴) -2 یا -5

پاسخ **گزینهٔ «۲»** نامعادله را به صورت مقابل می‌نویسیم:

$$\frac{ax+6}{bx-4}-1>0 \Rightarrow \frac{ax+6-bx+4}{bx-4}=\frac{(a-b)x+10}{bx-4}>0$$

تعیین علامت عبارت $p=\frac{(a-b)x+10}{bx-4}$ با عبارت $q=((a-b)x+10)(bx-4)$ یکسان است. اگر $b\neq 0$ و $a-b\neq 0$ باشد، جدول تعیین علامت عبارت q به یکی از دو صورت مقابل است:

		α		β	
	$-$		$+$		$-$

یا

		α		β	
	$+$		$-$		$+$

چون جواب معادله $(2,+\infty)$ است. پس عبارت q نمی‌تواند درجه‌دوم باشد (به جدول‌های فوق نگاه کنید.)

پس دو حالت روبه‌رو را داریم تا عبارت q درجه ۱ باشد:

$$\begin{cases} a=b \Rightarrow q=10(bx-4)>0 \xrightarrow{x\in(2,+\infty)} b=2=a \\ b=0 \Rightarrow q=-4(ax+10)>0 \xrightarrow{x\in(2,+\infty)} a=-5 \end{cases}$$

مثال حدود a را چنان تعیین کنید که نامعادلهٔ $\frac{x^2+5x+a}{2x^2+x+2}\leq 1$ برای هر x برقرار باشد.

پاسخ عبارت $2x^2+x+2$ همواره مثبت است (چون $\Delta<0$ و ضریب x^2 مثبت است)، پس می‌توانیم دو طرف نامساوی را بدون تغییر در علامت در $2x^2+x+2$ ضرب کنیم:

$$\frac{x^2+5x+a}{2x^2+x+2}\times(2x^2+x+2)\leq 1\times(2x^2+x+2) \Rightarrow x^2+5x+a\leq 2x^2+x+2$$

$$\Rightarrow 2x^2+x+2-x^2-5x-a\geq 0 \Rightarrow x^2-4x+2-a\geq 0$$

به شرطی عبارت درجه‌دوم آخر همواره بزرگ‌تر مساوی صفر است که $\Delta\leq 0$ باشد (دقت کنید ضریب x^2 مثبت است.)

$$\Delta\leq 0 \Rightarrow 16-4(2-a)\leq 0 \Rightarrow 16-8+4a\leq 0 \Rightarrow 4a\leq -8 \Rightarrow a\leq -2$$

نامعادله‌های قدرمطلقی

فرض کنید u و v عبارت جبری و a یک عدد حقیقی مثبت باشند. برای حل نامعادله‌های قدرمطلقی می‌توانیم از خواص زیر استفاده کنیم:

۱ $|u|<a \Leftrightarrow -a<u<a$ ۲ $|u|>a \Leftrightarrow u<-a$ یا $u>a$ ۳ $|u|<|v| \Leftrightarrow u^2<v^2$

تذکر خاصیت سوم بیانگر این مطلب است که اگر دو طرف یک نامساوی منفی نباشد، می‌توانیم طرفین آن را به توان ۲ برسانیم.

مثال **نامعادله‌های زیر را حل کنید.**

۱) $|۲x-۱|<۳$ **۲)** $|۳x-۲|>۱$ **۳)** $|x-۲|\le|۲x-۱|$

پاسخ ۱) از ویژگی ۱ استفاده می‌کنیم:

$$|۲x-۱|<۳ \Rightarrow -۳<۲x-۱<۳ \Rightarrow -۲<۲x<۴ \Rightarrow -۱<x<۲$$

۲) از ویژگی ۲ استفاده می‌کنیم:

$$|۳x-۲|>۱ \Rightarrow \begin{cases} ۳x-۲>۱ \Rightarrow ۳x>۳ \Rightarrow x>۱ \\ ۳x-۲<-۱ \Rightarrow ۳x<۱ \Rightarrow x<\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

۳) دو طرف نامساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$|x-۲|\le|۲x-۱| \Rightarrow (x-۲)^۲\le(۲x-۱)^۲ \Rightarrow x^۲-۴x+۴\le۴x^۲-۴x+۱ \Rightarrow ۳x^۲\ge۳ \Rightarrow x^۲\ge۱$$

$$\Rightarrow |x|\ge۱ \Rightarrow x\ge۱ \text{ یا } x\le-۱$$

تست **مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $|۲x+۱|<۳$ با مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $x^۲+ax+b<۰$ برابر است. حاصل $a-b$ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۳»** ابتدا نامعادلهٔ قدرمطلقی را حل می‌کنیم:

$$|۲x+۱|<۳ \Rightarrow -۳<۲x+۱<۳ \Rightarrow -۴<۲x<۲ \Rightarrow -۲<x<۱$$

از طرفی عبارت درجه‌دوم $x^۲+ax+b$ وقتی منفی است که x بین دو ریشه باشد. پس ۲− و ۱ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+ax+b=۰$ می‌باشند.

$$x^۲+ax+b=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \Rightarrow ۱+a+b=۰ \\ x=-۲ \Rightarrow ۴-۲a+b=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ b=-۲ \end{cases} \Rightarrow a-b=۳$$

تست **مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\left|\frac{۳x+۱}{۲x-۱}\right|<x-۱$ کدام است؟**

۱) $۱<x<۳$ ۲) $x>۴$ ۳) $x>۳$ ۴) $۱<x<۴$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** حاصل $|u|$ هرگز منفی نمی‌شود و چون $x-۱$ از قدرمطلق بزرگ‌تر است، پس مثبت است یعنی $x>۱$ است. این نشان می‌دهد صورت و مخرج عبارت داخل قدرمطلق مثبت است. پس می‌توانیم قدرمطلق را حذف کنیم: $\frac{۳x+۱}{۲x-۱}<x-۱$

طرفین را در عدد مثبت $۲x-۱$ ضرب می‌کنیم:

$$۳x+۱<(۲x-۱)(x-۱) \Rightarrow ۳x+۱<۲x^۲-۲x-x+۱ \Rightarrow ۲x^۲-۶x>۰$$

چون $x>۱$ است، پس فقط $x>۳$ جواب نامعادله است.

x		۰		۳	
$۲x^۲-۶x$	+		−		+

نکته برای حل نامعادلهٔ قدرمطلقی می‌توانیم از خاصیت روبه‌رو استفاده کنیم:

$$|x|=\begin{cases} x & x\ge۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

مثال **نامعادلهٔ $x^۲-۲x<|x-۲|$ را حل کنید.**

پاسخ عبارت داخل قدرمطلق را بازه‌بندی می‌کنیم:

۱) $x-۲>۰ \Rightarrow x>۲$ $\quad x^۲-۲x<|x-۲| \Rightarrow x\cancel{(x-۲)}<\cancel{x-۲} \Rightarrow x<۱$

اشتراک دو نامساوی $x>۲$ و $x<۱$ تهی است.

۲) $x-۲<۰ \Rightarrow x<۲$ $\quad x^۲-۲x<|x-۲| \Rightarrow x\cancel{(x-۲)}<-\cancel{(x-۲)} \Rightarrow x>-۱$

اشتراک دو نامساوی $x<۲$ و $x>-۱$ بازهٔ $(-۱,۲)$ است.

تست **مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $(x+۲)|x|<-۳$ بازهٔ $(-\infty,a)$ می‌باشد. مقدار a کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲− ۳) ۳− ۴) ۱−

پاسخ **گزینهٔ «۳»** برای x دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱) $x>۰$ $\quad (x+۲)|x|<-۳ \Rightarrow (x+۲)x<-۳ \Rightarrow x^۲+۲x+۳<۰$

مجموعه‌جواب این نامعادله تهی است.

۲) $x<۰$ $\quad (x+۲)|x|<-۳ \Rightarrow (x+۲)(-x)<-۳ \Rightarrow x^۲+۲x-۳>۰$

مجموعه‌جواب این نامعادله به صورت $x>۱$ یا $x<-۳$ است که اگر با $x<۰$ اشتراک بگیریم، جواب $x<-۳$ به دست می‌آید.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۴۴۰- برای هر عدد حقیقی x، رابطهٔ $a^۲x+۳<x-۴a$ برقرار است. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) -۳

۴۴۱- اگر A مجموعه‌جواب $x^۲-۴<۰$ و B مجموعه‌جواب $x^۲-۳x<۰$ باشند، نقطهٔ میانی بازهٔ $(A\cap B)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۴۴۲- جدول تعیین علامت $y=ax^۲+bx+۶$ مطابق شکل مقابل است. مقدار $a+b$ برابر است با:

x		-۲		۳	
y	−	∘	+	∘	−

۱) -۲ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) صفر

۴۴۳- جدول تعیین علامت کدام عبارت زیر به صورت مقابل است؟

x		$-\alpha$		۲α	
P	−	∘	+	∘	−

۱) $P=x^۲+۲x-۸$ ۲) $P=x^۲-۲x-۸$ ۳) $P=-x^۲-۲x+۸$ ۴) $P=-x^۲+۲x+۸$

۴۴۴- جدول تعیین علامت عبارت $P=ax^۲+۲x+a^۲-۴$ به صورت زیر است. حاصل $a+b$ کدام است؟

x		b		۱	
P	+	∘	−	∘	+

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

۴۴۵- جدول تعیین علامت $y=ax^۲+۴x+b$ مطابق شکل مقابل است. مقدار $a-b$ کدام است؟

x		۱	
y	−	∘	−

۱) -۲ ۲) -۴ ۳) ۴ ۴) صفر

۴۴۶- جواب نامعادلهٔ $\frac{۲-x^۲}{x}>۱$ کدام است؟

۱) $(۰,۱)$ ۲) $(۰,۱)\cup(۱,+\infty)$ ۳) $(-\infty,-۲)\cup(۰,۱)$ ۴) $(-۲,۰)$

۴۴۷- به ازای کدام عدد عبارت $P=\frac{\sqrt{x+۳}(۴-x)}{-۲x^۲+۵x-۳}$ مثبت می‌شود؟

۱) ۲ ۲) -۱ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۴۴۸- مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $-۴<\frac{۳x}{x-۱}<۶$ به صورت $\mathbb{R}-[a,b]$ است. حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۱۰}{۷}$ ۴) ۴

۴۴۹- جدول تعیین علامت $P=ax^۲+b^۲x+b-۲$ به صورت مقابل است. مقدار $a+b$ کدام است؟

x		۱	
P	+	∘	−

۱) ۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) ۴

۴۵۰- جدول تعیین علامت کدام عبارت زیر به صورت مقابل است؟

x		α		β	
P	+	∘	−	∘	−

۱) $(x-۱)(x-۲)^۲$ ۲) $(x-۲)(x-۱)^۲$ ۳) $(۱-x)(x-۲)^۲$ ۴) $(۲-x)(x-۱)^۲$

۴۵۱- جدول تعیین علامت عبارت $P=(x-۲)(x^۲+ax+۶)$ به صورت مقابل است. مقدار a کدام است؟

x			
P	−	−	+

۱) ۵ ۲) -۵ ۳) $-۲\sqrt{۶}$ ۴) $\sqrt{۶}$

۴۵۲- جدول تعیین علامت عبارت $P=(x-۱)(x^۲+ax+۱۶)$ به صورت مقابل است. حاصل $a+b$ کدام است؟

x		b		۱	
P	−	∘	−	∘	+

۱) -۴ ۲) ۸ ۳) -۸ ۴) ۴

۴۵۳- جدول تعیین علامت عبارت $P=۱+\frac{۱}{x^۲+۲x}$ به صورت مقابل است. $\alpha+\beta$ کدام است؟

x		α		β		۰	
P	+		−		−		+

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۴۵۴- اگر $2x^2+(m+1)x+\frac{m}{2}+2=0$ فاقد ریشهٔ حقیقی باشد، حدود m کدام است؟

۱) $-3<m<5$ ۲) $-2<m<4$ ۳) $-3<m<4$ ۴) $-1<m<5$

۴۵۵- به ازای چند مقدار صحیح m، معادلهٔ $mx^2+6x-2m+9=0$ جواب حقیقی ندارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۵۶- معادلهٔ $x^2+mx+n=0$ ریشهٔ مضاعف دارد. کدام معادلهٔ زیر حتماً دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد؟

۱) $x^2-(m-2)x-n=0$ ۲) $x^2+mx+n+1=0$ ۳) $x^2-nx+m+1=0$ ۴) $x^2+(n-1)x-m=0$

۴۵۷- معادلهٔ $(2n+1)x^2-8x+16=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد. حداقل مقدار طبیعی n کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۵۸- معادلهٔ $x^4-(m+3)x^2+m+2=0$ دارای ۴ ریشهٔ حقیقی است. حدود m کدام است؟

۱) $m>-2$ ۲) $m<-2$ ۳) $-2<m<2$ ۴) $m>2$

۴۵۹- اگر عبارت $mx^2+(2m-1)x+m$ همواره مثبت باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m>\frac{1}{4}$ ۲) $0<m<\frac{1}{4}$ ۳) $0<m<4$ ۴) $m>0$

۴۶۰- نامعادلهٔ $\frac{2x^2-x+m}{x^2+x+1}>1$ به ازای هر عدد حقیقی برقرار است. حدود m کدام است؟

۱) $-2<m<1$ ۲) $-1<m<2$ ۳) $m>2$ ۴) $m<-1$

۴۶۱- جواب نامعادلهٔ $2x^2+ax+4\geq 0$ به صورت $\mathbb{R}-(b,2)$ است. $a+b$ چه عددی است؟

۱) ۶ ۲) ۶- ۳) ۱- ۴) ۵-

۴۶۲- مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\frac{ax+6}{x+b}>0$ به صورت $(-2,3)$ می‌باشد. حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴- ۳) ۴ ۴) ۶-

۴۶۳- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+ax-3=0$ باشند، محدودهٔ a کدام باشد تا $\alpha<1<\beta$ باشد؟

۱) $a<2$ ۲) $a>2$ ۳) $a>-2$ ۴) $a<-2$

۴۶۴- نمودار $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$ در بازهٔ (α,β) بالاتر از خط $2y-7=0$ می‌باشد. حداکثر مقدار $\beta-\alpha$ کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۶/۵

۴۶۵- به ازای چند مقدار طبیعی m، نمودار سهمی $y=2x^2+mx+10$ همواره بالای خط $y=2$ قرار دارد؟

۱) ۷ مقدار ۲) ۶ مقدار ۳) ۵ مقدار ۴) ۴ مقدار

۴۶۶- اگر نمودار سهمی $y=ax^2-ax$ همواره زیر خط $y=1$ باشد، حدود a کدام است؟

۱) $0<a<4$ ۲) $-4<a<0$ ۳) $-4<a<4$ ۴) $a>4$

۴۶۷- جسمی از بالای یک ساختمان به ارتفاع h متر به هوا پرتاب می‌شود. ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیهٔ t از رابطهٔ $y=-5t^2+18t+h$ به دست می‌آید. اگر در فاصلهٔ زمانی $0<t<4$، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۵ متر باشد، حداقل مقدار h کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

۴۶۸- خط $y=2x-1$ بر منحنی به معادلهٔ $y=x^2+mx+3$ مماس است. مقدار m کدام است؟

۱) ۲ یا ۶- ۲) ۲- یا ۶ ۳) ۴ یا ۶- ۴) ۴- یا ۶

۴۶۹- به ازای کدام مقدار a، خط $y=2x-1$ بر سهمی $y=ax^2-2x+a+2$ مماس و زیر آن است؟ (به‌جز نقطهٔ تماس)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳- ۴) ۴-

۴۷۰- نمودار تابع $y=\frac{x^2+ax+3}{x^2+x+1}$، همواره بالای خط $y=1$ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) $a>1$ ۳) ۲ ۴) $a>2$

۴۷۱- در مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $-2<\frac{2}{x^2-5x+6}<0$ چند عدد صحیح قرار دارد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

۴۷۲- نمودار $y = ax^{۲} + (a+۲)x$ از ناحیهٔ دوم محورهای مختصاتی عبور نمی‌کند. حدود a کدام است؟

۱) $a \le ۰$ ۲) $-۲ \le a < ۰$ ۳) $a < -۲$ ۴) $a < ۰$

۴۷۳- نمودار سهمی $y = ax^{۲} - ۳x + a - ۴$ از هر چهار ناحیهٔ مختصات عبور می‌کند. برای a چند مقدار طبیعی یافت می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۷۴- مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\frac{۳}{x^{۲}} < \frac{۴}{x} - ۱$ کدام است؟

۱) $(۰,۱)$ ۲) $(۱,۳)$ ۳) $(۰,۳)$ ۴) $(۲,۳)$

۴۷۵- به ازای چند مقدار صحیح x، عبارت $P = ۳ + \frac{۴}{x} - \frac{۲x}{x-۲}$ منفی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۷۶- مجموع اعداد طبیعی که در نامعادلهٔ $\frac{۱}{\sqrt{x}-۲} + \frac{۱}{۲+\sqrt{x}} < \frac{x}{۳\sqrt{x}}$ صدق می‌کند، چه‌قدر است؟

۱) ۳۵ ۲) ۲۹ ۳) ۲۶ ۴) ۲۲

۴۷۷- اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $۲x^{۲} - ۲ = ۳|x|$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۴۷۸- جمع ریشه‌های $۳x^{۲} + ۱ = ۴|x|$ چه عددی است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) صفر

۴۷۹- مجموع جواب‌های معادلهٔ $x^{۲} + ۲x = ۶ - ۳|x|$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۴۸۰- مجموع جواب‌های معادلهٔ $x^{۲} - ۲|x-۱| - ۱۰ = ۰$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $۳-\sqrt{۱۳}$ ۳) $۵-\sqrt{۱۳}$ ۴) صفر

۴۸۱- در بازهٔ (a,b) عبارت $۲x^{۲} - x - ۱۰$ منفی و عبارت $|\frac{x+۳}{۲} - ۲|$ کوچک‌تر از یک است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۳/۵

۴۸۲- مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $x^{۲} - ۲x < |x-۱|$ به صورت (a,b) است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۸۳- معادلهٔ $x^{۲} - ۴|x| + k + ۲ = ۰$ چهار ریشهٔ متمایز دارد. حدود k کدام است؟

۱) $k < ۲$ ۲) $-۲ < k$ ۳) $-۲ < k < ۲$ ۴) $|k| > ۲$

۴۸۴- معادلهٔ $||x-۲|-۴| = k$ دارای ۴ ریشه است. حدود k کدام است؟

۱) $۰ < k$ ۲) $۲ < k < ۴$ ۳) $۰ < k < ۴$ ۴) $k \ge ۴$

۴۸۵- جواب نامعادلهٔ $(|x|+۳)(|x|-۲) < ۰$ بازهٔ (a,b) است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۴

۴۸۶- چند عدد صحیح در نامعادلهٔ $||x-۲|-۲| < ۲$ صدق می‌کند؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۴۸۷- جمع اعداد صحیح که در نامعادلهٔ $||x-۱|-۳| < ۲$ صدق می‌کند، چه عددی است؟

۱) -۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) صفر

۴۸۸- مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $|x-\alpha| > \beta$ به صورت $(-\infty,-۲)\cup(۴,+\infty)$ است. حاصل $۲\beta - \alpha$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۸۹- اگر x عضوی از مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $|۲x+۱| < ۳$ باشد، آن‌گاه $|x| < a$ است. حداقل a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۴۹۰- مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $x^{۲} + ax + b < ۰$ به صورت $|x+۲| < ۳$ می‌باشد. حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۹ ۳) -۱ ۴) ۹

۴۹۱- مجموعه‌جواب دو نامعادلهٔ $|x-۲|<a$ و $x^{۲}+bx-۵<۰$ یکسان است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) -۷ ۴) ۷

۴۹۲- مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $|x+۳|<|x+a|$ روی محور به صورت روبه‌رو است. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۴۹۳- مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\left|\frac{۳x+۱}{۲x-۱}\right|<x-۱$ بازهٔ $(a,+\infty)$ می‌باشد. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۹۴- جواب نامعادلهٔ $\left|\frac{۲x+۱}{x-۱}\right|<۳$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۹۵- جواب نامعادلهٔ $x+|۲x-۱|<۵$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $(-\infty,۵)$ ۲) $(-۵,۲)$ ۳) $(-۴,۳)$ ۴) $(-۴,۲)$

۴۹۶- مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\left|\frac{mx+۱}{۲x-۱}\right|<۱$ به صورت بازهٔ (a,b) است. حدود m کدام است؟

۱) $|m|<۲$ ۲) $|m|>۲$ ۳) $|m|<۱$ ۴) $|m|>۱$

۴۹۷- مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\left|\frac{x+۱}{ax+۳}\right|<۱$ به صورت $(b,+\infty)$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) صفر

۴۹۸- مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $-۱<\frac{۴|x|-۲}{x+۲}<۴$ در اعداد حقیقی منفی به صورت $(a,۰)$ است. مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۵}{۴}$ ۳) $-\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۴}{۵}$

$$=\frac{\sqrt[3]{zy}}{1+\sqrt[3]{yz}+\sqrt[3]{y}}\quad (*)$$

حال به کمک $yz=\frac{1}{x}$ رابطهٔ بالا را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{z}+1}=\frac{\sqrt[3]{yz}}{1+\sqrt[3]{\underset{\downarrow\ \sqrt[3]{\frac{1}{x}}}{yz}}+\sqrt[3]{y}}=\frac{\sqrt[3]{yz}}{1+\sqrt[3]{\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{y}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{yz}}{\frac{\sqrt[3]{x}+1+\sqrt[3]{xy}}{\sqrt[3]{x}}}=\frac{\sqrt[3]{\overset{1}{xyz}}}{1+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{1+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x}}$$

پس:

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x}+1}+\underbrace{\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{yz}+\sqrt[3]{y}+1}}_{\frac{\sqrt[3]{xy}}{1+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x}}}+\underbrace{\frac{\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{z}+1}}_{\frac{1}{1+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x}}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{xy}+1}{1+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x}}=1$$

روش دوم: اگر $A=\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x}+1}$، $B=\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{yz}+\sqrt[3]{y}+1}$ و $C=\frac{\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{xz}+\sqrt[3]{z}+1}$، می‌توانیم با ضرب صورت و مخرج B در $\sqrt[3]{x}$ آن را با A هم‌مخرج می‌کنیم:

$$B=\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{yz}+\sqrt[3]{y}+1}\times\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[3]{xy}}{\underset{\downarrow\ 1}{\sqrt[3]{xyz}}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{xy}}{1+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x}}$$

هم‌چنین اگر در کسر C به جای ۱ قرار دهیم $\sqrt[3]{xyz}$ داریم:

$$C=\frac{\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{xz}+\sqrt[3]{z}+\sqrt[3]{xyz}}=\frac{\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{z}(\sqrt[3]{x}+1+\sqrt[3]{xy})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+1+\sqrt[3]{xy}}$$

پس:

$$A+B+C$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x}+1}+\frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x}+1}+\frac{1}{\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x}+1}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{xy}+1}{\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x}+1}=1$$

۳۷۱- [۲] یک ریشهٔ معادله $x=1$ است (چون جمع ضرایب صفر است)، پس ریشهٔ دیگر معادله $\frac{c}{a}$ است:

$$x=1\Rightarrow \sqrt{3}+1-2\sqrt{3}+\sqrt{3}-1=0\ .\ x=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

مخرج کسر ریشهٔ دیگر را گویا می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$$

۳۷۲- [۴] روش اول: ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم:

$$x^2-4x+2=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=2\pm\sqrt{2}$$

پس $\alpha=2-\sqrt{2}$ و $\beta=2+\sqrt{2}$ است. در نتیجه:

$$\beta^2+4\alpha=(2+\sqrt{2})^2+4(2-\sqrt{2})$$

$$=4+2+4\sqrt{2}+8-4\sqrt{2}=14$$

روش دوم: می‌دانیم α و β در معادله صدق می‌کنند؛ پس:

$$\beta^2-4\beta+2=0\Rightarrow \beta^2=4\beta-2$$

پس: $\beta^2+4\alpha=4\beta-2+4\alpha=4(\alpha+\beta)-2=4(4)-2=14$

۳۷۳- [۴] روش اول: چون ۱ و ۳- ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+mx+n=0$ هستند، پس در معادله صدق می‌کنند:

$$x=1\Rightarrow 2+m+n=0\Rightarrow m+n=-2\quad (1)$$

$$x=-3\Rightarrow 18-3m+n=0\Rightarrow -3m+n=-18\quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)-(2)} 4m=16\Rightarrow m=4, n=-6\Rightarrow mn=-24$$

روش دوم: چون ۱ و ۳- ریشه هستند، پس داریم:

$$2x^2+mn+n=2(x+3)(x-1)\Rightarrow 2x^2+mx+n$$

$$=2x^2+4x-6\Rightarrow \begin{cases}m=4\\ n=-6\end{cases}\Rightarrow mn=-24$$

۳۷۴- [۲] گزینه‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

[۱] $x^2-2x-8=(x-4)(x+2)=0\Rightarrow \begin{cases}x=4\\ x=-2\end{cases}$

[۲] $x^2+6x+8=(x+2)(x+4)=0\Rightarrow \begin{cases}x=-2\\ x=-4\end{cases}$

[۳] $x^2-x-2=(x-2)(x+1)=0\Rightarrow \begin{cases}x=2\\ x=-1\end{cases}$

[۴] $x^2+x-2=(x+2)(x-1)=0\Rightarrow \begin{cases}x=-2\\ x=1\end{cases}$

در نتیجه در [۲] یکی از ریشه‌ها دو برابر دیگری است.

۳۷۵- [۲]

$$x^2-x-6=(x-3)(x+2)=0\Rightarrow \begin{cases}x=3\\ x=-2\end{cases}$$

$$x^2-3x-10=(x-5)(x+2)=0\Rightarrow \begin{cases}x=5\\ x=-2\end{cases}$$

ریشه‌های غیرمشترک دو معادله ۵ و ۳ هستند که اختلاف آن‌ها برابر ۲ است.

۳۷۶- [۲] اگر سن برادر کوچک‌تر x و سن برادر بزرگ y باشد، $y=x+4$ است. ۴ سال بعد سن برادر کوچک‌تر $x+4$ و سن برادر بزرگ‌تر $y+4$ خواهد بود؛ در نتیجه:

$$\frac{y+4}{x+4}=\frac{6}{5}\Rightarrow 5y+20=6x+24\Rightarrow 5y-6x=4$$

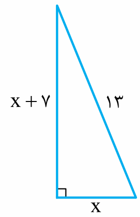
در نتیجه:

$$\begin{cases}y=x+4\\ 5y-6x=4\end{cases}\xrightarrow{y=x+4} 5(x+4)-6x=4$$

$\Rightarrow 5x+20-6x=4 \Rightarrow x=16$

۳۷۷- [۱] به کمک قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$(x+7)^2+x^2=13^2 \Rightarrow x^2+14x+49+x^2=169$



$\Rightarrow 2x^2+14x-120=0$

$\xrightarrow{\div 2} x^2+7x-60=0$

$\Rightarrow (x+12)(x-5)=0$

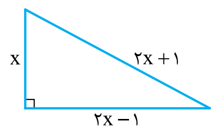
$\Rightarrow \begin{cases} x=-12 & \text{غ ق ق} \\ x=5 \end{cases}$

چون طول اضلاع باید مثبت باشد، پس $x=-12$ غیرقابل‌قبول است. در نتیجه $x=5$ است که این مقدار برابر فاصلهٔ پای نردبان تا دیوار است.

۳۷۸- [۴] به کمک قضیهٔ فیثاغورس داریم:

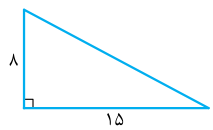
$(2x+1)^2=(2x-1)^2+x^2 \Rightarrow 4x^2+4x+1$

$=4x^2-4x+1+x^2 \Rightarrow x^2-8x=0 \Rightarrow x(x-8)=0$



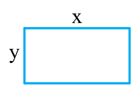
$\Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{غیر قابل قبول} \\ x=8 \end{cases}$

$x=0$ غیر قابل قبول است، زیرا طول اضلاع صفر یا منفی می‌شود. پس $x=8$ است؛ در نتیجه:



$S=\frac{8\times 15}{2}=60$

۳۷۹- [۴] اگر فرض کنیم x طول و y عرض مستطیل است، پس محیط آن $2x+2y$ و مساحت آن xy است؛ در نتیجه:



$\begin{cases} 2x+2y=50 \\ xy=144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=25 & (1) \\ xy=144 & (2) \end{cases}$

از معادلهٔ اول مقدار y را برحسب x به دست می‌آوریم و در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم تا معادلهٔ دوم تبدیل به یک معادلهٔ درجه‌دوم با یک متغیر شود:

$y=25-x \Rightarrow x(25-x)=144 \Rightarrow 25x-x^2=144$

$\Rightarrow x^2-\underbrace{25}_{(16+9)}x+\overbrace{144}^{(16\times 9)}=0$

حال معادلهٔ فوق را به کمک تجزیهٔ اتحاد جمله‌مشترک حل می‌کنیم:

$(x-16)(x-9)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x=16 \\ x=9 \Rightarrow \text{غ ق ق (چون فرض کردیم x طول است.)} \end{cases}$

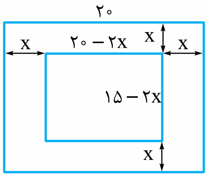
چون فرض کردیم x طول است، پس طول برابر ۱۶ است و عرض برابر ۹. بنابراین اختلاف طول و عرض برابر ۷ است.

۳۸۰- [۳] با توجه به شکل اگر طول مستطیل بزرگ ۲۰ باشد، طول مستطیل کوچک $20-2x$ و اگر عرض مستطیل بزرگ ۱۵ باشد، عرض مستطیل کوچک $15-2x$ است. در نتیجه با توجه به آن‌که مساحت مستطیل کوچک ۱۵۰ است؛ داریم:

مساحت مستطیل کوچک $=(20-2x)(15-2x)=150$

$\Rightarrow 4x^2-70x+300=150 \Rightarrow 4x^2-70x+150=0$

$\Rightarrow 2(2x-5)(x-15)=0$



$\Rightarrow \begin{cases} x=2/5 \\ x=15 & \text{غ ق ق} \end{cases}$

اما $x=15$ قابل‌قبول نیست، زیرا طول و عرض مستطیل کوچک منفی خواهد شد؛ پس $x=2/5$ است.

۳۸۱- [۲] در تساوی زیر، باید S را چنان بیابیم که P برابر ۱۳۴ باشد:

$P=0/006S^2-0/02S+120$

$\Rightarrow 0/006S^2-0/02S+120=134$

$\Rightarrow 0/006S^2-0/02S-14=0$

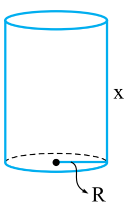
$\xrightarrow{\div 2} 0/003S^2-0/01S-7=0$

با ضرب تساوی قبل در ۱۰۰۰ داریم: $3S^2-10S-7000=0$

$\Rightarrow S=\frac{10\pm\sqrt{100+84000}}{6}=\frac{10\pm\sqrt{84100}}{6}=\frac{10\pm 290}{6}$

$\Rightarrow \begin{cases} S=\frac{300}{6}=50 \\ S=-\frac{280}{6} & \text{غ ق ق} \end{cases}$

۳۸۲- [۱] می‌دانیم مساحت کل برابر است با جمع مساحت‌های جانبی و قاعده‌ها، پس ابتدا داریم:



$2\pi Rx+2\pi R^2=0/48\pi x^2$

$R^2+xR-0/24x^2=0$

حال به کمک اتحاد جمله‌مشترک داریم:

$(R-0/2x)(R+1/2x)=0 \Rightarrow R=0/2x$

در نتیجه: $V=x\pi R^2=x\pi\times(0/2x)^2=0/04\pi x^3$

۳۸۳- [۴] **روش اول:** فرض می‌کنیم $\frac{2-\sqrt{6}}{2}$ ریشهٔ معادلهٔ $x^2+bx+c=0$ است. می‌دانیم ریشه‌های این معادله برحسب ضریب جملات آن به صورت زیر است:

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$

پس باید داشته باشیم: $\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}=\frac{2-\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow -b-\sqrt{b^2-4c}=2-\sqrt{6}$

در نتیجه: $\begin{cases} -b=2 \Rightarrow b=-2 \\ b^2-4c=6 \end{cases}$

$\xrightarrow{b=-2} 4-4c=6 \Rightarrow 4c=-2 \Rightarrow c=-\frac{1}{2}$

پس یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2-2x-\frac{1}{2}=0$ برابر $\frac{2-\sqrt{6}}{2}$ است:

$x^2-2x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x^2-2x=\frac{1}{2}$

روش دوم: فرض می‌کنیم $\frac{۲-\sqrt{۶}}{۲}$ ریشهٔ یک معادلهٔ درجه ۱ باشد؛ پس اگر $x=\frac{۲-\sqrt{۶}}{۲}$ باشد، پس داریم $x=۱-\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ و در نتیجه $x-۱=-\frac{\sqrt{۶}}{۲}$. حال اگر دو طرف تساوی را به توان ۲ برسانیم، به یک معادلهٔ درجه‌دوم می‌رسیم که علاوه بر این ریشه، یک ریشهٔ دیگر $(\frac{۲+\sqrt{۶}}{۲})$ نیز دارد:

$$x=\frac{۲-\sqrt{۶}}{۲}=۱-\frac{\sqrt{۶}}{۲}\Rightarrow x-۱=-\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}(x-۱)^۲=\frac{۶}{۴}\Rightarrow x^۲-۲x+۱=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow x^۲-۲x=\frac{۱}{۲}$$

۳۸۴- $\boxed{۲}$ **روش اول**: ریشه‌های معادله را حساب می‌کنیم:

$$x=\frac{-۶\pm\sqrt{۲۸}}{۲}=\frac{-۶\pm ۲\sqrt{۷}}{۲}=-۳\pm\sqrt{۷}$$

چون $\alpha<\beta$ است، پس $\alpha=-۳-\sqrt{۷}$ و $\beta=-۳+\sqrt{۷}$ است. در نتیجه:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-۶\\ \alpha-\beta=-۲\sqrt{۷}\end{cases}\Rightarrow(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^۲-\beta^۲$$

$$=-۶\times-۲\sqrt{۷}=۱۲\sqrt{۷}$$

روش دوم: اگر β و α ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، داریم:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\Rightarrow\alpha+\beta=-۶$$

پس:

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\Rightarrow|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{۳۶-۸}}{۱}=۲\sqrt{۷}$$

$$\xrightarrow{\alpha<\beta}\alpha-\beta=-۲\sqrt{۷}$$

در نتیجه $\alpha^۲-\beta^۲=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=۱۲\sqrt{۷}$

۳۸۵- $\boxed{۳}$ **روش اول**:

می‌دانیم ریشه‌های هر معادلهٔ درجه‌دوم $Ax^۲+Bx+C=۰$ در صورت وجود به صورت $x=\frac{-B\pm\sqrt{B^۲-۴AC}}{۲A}$ هستند. پس:

$$\begin{matrix}A=۲\\ B=a\\ C=b\end{matrix}\Rightarrow x=\frac{-a\pm\sqrt{a^۲-۸b}}{۴}$$

پس با توجه به منفی‌بودن ضریب پشت رادیکال (و مثبت‌بودن مخرج)، $\frac{۲-\sqrt{۵}}{۲}$ برابر $\frac{-a-\sqrt{a^۲-۸b}}{۴}$ است. در نتیجه:

$$\frac{-a-\sqrt{a^۲-۸b}}{۴}=\frac{۲-\sqrt{۵}}{۲}\xrightarrow{\times ۴}-a-\sqrt{a^۲-۸b}$$

$$=۴-\underbrace{۲\sqrt{۵}}_{\sqrt{۲۰}}$$

پس باید:

$$\begin{cases}-a=۴\Rightarrow a=-۴\\ a^۲-۸b=۲۰\end{cases}\xrightarrow{a=-۴}۱۶-۸b=۲۰$$

$$\Rightarrow ۸b=-۴\Rightarrow b=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $a.b=۲$ است.

روش دوم: فرض می‌کنیم $\frac{۲-\sqrt{۵}}{۲}$ یک ریشهٔ معادلهٔ $x=\frac{۲-\sqrt{۵}}{۲}$ باشد. داریم:

$$x=\frac{۲}{۲}-\frac{\sqrt{۵}}{۲}=۱-\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

در نتیجه $x-۱=-\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ است. با به توان ۲ رساندن دو طرف این تساوی یک معادلهٔ درجه‌دوم داریم که یک ریشهٔ دیگر $(\frac{۲+\sqrt{۵}}{۲})$ دارد:

$$(x-۱)^۲=(\frac{-\sqrt{۵}}{۲})^۲\Rightarrow x^۲-۲x+۱=\frac{۵}{۴}$$

$$\Rightarrow x^۲-۲x-\frac{۱}{۴}=۰$$

چون می‌خواهیم ضریب $x^۲$ برابر ۲ باشد، دو طرف تساوی فوق را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$۲x^۲-۴x-\frac{۱}{۲}=۰\Rightarrow\begin{cases}a=-۴\\ b=-\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow a.b=۲$$

۳۸۶- $\boxed{۲}$ ابتدا $۷-۴\sqrt{۳}$ را به صورت مربع حاصل‌جمع دو عدد می‌نویسیم:

$$\underbrace{۷}_{a^۲+b^۲}-\underbrace{۴\sqrt{۳}}_{۲ab}=\underbrace{۴}_{a^۲}+\underbrace{۳}_{b^۲}-\underbrace{۴\sqrt{۳}}_{۲ab}$$

$$=۲^۲+\sqrt{۳}^۲-۲\times۲\times\sqrt{۳}=(۲-\sqrt{۳})^۲$$

پس:

$$\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}=\sqrt{(۲-\sqrt{۳})^۲}=۲-\sqrt{۳}$$

می‌دانیم ریشه‌های هر معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲+bx+c=۰$ برابر $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$ است. پس در معادلهٔ $x^۲+mx+n=۰$ ریشه‌ها برابر $x=\frac{-m\pm\sqrt{m^۲-۴n}}{۲}$ است. در نتیجه با توجه به آن‌که $۲-\sqrt{۳}$ یک ریشهٔ معادله است، داریم:

$$\frac{-m-\sqrt{m^۲-۴n}}{۲}=۲-\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow -m-\sqrt{m^۲-۴n}=۴-\underbrace{۲\sqrt{۳}}_{\sqrt{۱۲}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-m=۴\Rightarrow m=-۴\\ m^۲-۴n=۱۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۱۶-۴n=۱۲\Rightarrow ۴n=۴\Rightarrow n=۱$$

پس:

$$mn=-۴$$

۳۸۷- $\boxed{۲}$ **روش اول**:

اگر فرض کنیم $x^۲=t$ است، معادلهٔ $x^۴+ax^۲+b=۰$ به صورت $t^۲+at+b=۰$ خواهد بود. پس اگر $x=\sqrt{۲-\sqrt{۲}}+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}$ یک ریشهٔ معادلهٔ اولیه باشد، $(\sqrt{۲-\sqrt{۲}}+\sqrt{۲+\sqrt{۲}})^۲$ یک ریشهٔ معادلهٔ $t^۲+at+b=۰$ خواهد بود:

$$(\sqrt{۲-\sqrt{۲}}+\sqrt{۲+\sqrt{۲}})^۲$$

$$=۲-\cancel{\sqrt{۲}}+۲+\cancel{\sqrt{۲}}+۲\sqrt{(۲-\sqrt{۲})(۲+\sqrt{۲})}$$

$$= ۴+۲\sqrt{۴-۲} = ۴+۲\sqrt{۲}$$

ریشه‌های معادلهٔ $t^۲+at+b=۰$ برابرند با $t=\frac{-a\pm\sqrt{a^۲-۴b}}{۲}$، پس چون $t=۴+۲\sqrt{۲}$ یک ریشهٔ معادله است، داریم:

$$\frac{-a+\sqrt{a^۲-۴b}}{۲}=۴+۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow -a+\sqrt{a^۲-۴b}=۸+۴\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{۴\sqrt{۲}=\sqrt{۳۲}} -a+\sqrt{a^۲-۴b}=۸+\sqrt{۳۲}$$

پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}-a=۸ \Rightarrow a=-۸\\ a^۲-۴b=۳۲\end{cases} \xrightarrow{a=-۸} ۶۴-۴b=۳۲$$

$$\Rightarrow ۴b=۳۲ \Rightarrow b=۸$$

روش دوم: فرض می‌کنیم $\sqrt{۲-\sqrt{۲}}+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}$ ریشهٔ یک معادلهٔ درجه ۱ است. پس اگر $x=\sqrt{۲-\sqrt{۲}}+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}$ باشد، با به توان ۲ رساندن دو طرف تساوی یک معادلهٔ درجه‌دوم ایجاد می‌شود که یک ریشهٔ قرینهٔ این عدد نیز دارد:

$$x^۲=۲-\sqrt{۲}+۲+\sqrt{۲}+۲\sqrt{\underbrace{(۲-\sqrt{۲})(۲+\sqrt{۲})}_{۴-۲}}$$

$$\Rightarrow x^۲=۴+۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow x^۲-۴=۲\sqrt{۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۴-۸x^۲+۱۶=۸$$

$$\Rightarrow x^۴-۸x^۲+۸=۰ \Rightarrow b=۸$$

۳۸۸- [۲] اگر $x=-۱$ ریشهٔ معادلهٔ زیر باشد، در معادله صدق می‌کند؛ در نتیجه:

$$(m-x)(mx+۱)=-۳ \xrightarrow{x=-۱} (m+۱)(-m+۱)=-۳$$

$$\Rightarrow ۱-m^۲=-۳ \Rightarrow m^۲=۴ \Rightarrow m=\pm ۲$$

اگر $m=۲$ باشد، داریم:

$$(۲-x)(۲x+۱)=-۳ \Rightarrow -۲x^۲+۳x+۲=-۳$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۳x-۵=۰ \Rightarrow \overbrace{(x+۱)(۲x-۵)}^{p}=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=-۱\\ x=\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

چون عبارت یک ریشهٔ -۱ دارد، حتماً بر $x+۱$ بخش‌پذیر است.

اگر $m=-۲$ باشد، داریم:

$$(-۲-x)(-۲x+۱)=-۳ \Rightarrow ۲x^۲+۳x-۲=-۳$$

$$\Rightarrow \underbrace{۲x^۲+۳x+۱}_{q}=۰ \Rightarrow (x+۱)(۲x+۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=-۱\\ x=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

تذکر چون می‌دانیم $x=-۱$ یک ریشهٔ هر یک از معادلات است، پس $x+۱$ یک عامل هر یک از عبارات p و q است. پس لازم به حل معادلات به کمک Δ نیست.

تذکر اگر $x=-۱$ یک ریشهٔ معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ باشد، $(a+c=b)$ ریشهٔ دیگر $-\frac{c}{a}$ است. پس چون $x=-۱$ یک ریشهٔ عبارات p و q است، پس به ترتیب ریشهٔ دیگر آن‌ها $\frac{۵}{۲}$ و $-\frac{۱}{۲}$ است.

۳۸۹- [۴] **روش اول**: اولاً چون $x=-\frac{۳}{۲}$ ریشهٔ معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$۴(-\frac{۳}{۲})(-\frac{۳}{۲}-a)=b \Rightarrow -۶(-\frac{۳}{۲}-a)=b$$

$$\Rightarrow ۹+۶a=b$$

ثانیاً چون این معادله تنها یک ریشه دارد، $\Delta=۰$ است:

$$۴x^۲-۴ax-b=۰ \Rightarrow \Delta=۱۶a^۲+۱۶b=۰$$

$$\xrightarrow{\div ۱۶} a^۲+b=۰$$

پس:

$$\begin{cases}۶a+۹=b\\ a^۲+b=۰\end{cases} \Rightarrow a^۲+۶a+۹=۰ \Rightarrow (a+۳)^۲=۰$$

$$\Rightarrow a=-۳ \Rightarrow b=-۹ \Rightarrow a+b=-۱۲$$

روش دوم: چون معادله دارای ریشهٔ مضاعف $x=-\frac{۳}{۲}$ است، پس به صورت $k(x+\frac{۳}{۲})^۲=۰$ است:

$$۴x^۲-۴ax-b=۴(x+\frac{۳}{۲})^۲=۰ \Rightarrow ۴(x^۲+۳x+\frac{۹}{۴})=۰$$

$$\Rightarrow ۴x^۲+۱۲x+۹=۰ \Rightarrow ۴x^۲+۱۲x+۹=۴x^۲-۴ax-b$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-۴a=۱۲ \Rightarrow a=-۳\\ -b=۹ \Rightarrow b=-۹\end{cases} \Rightarrow a+b=-۱۲$$

۳۹۰- [۴] ابتدا به کمک مربع‌سازی معادلهٔ $x^۲+۲ax+b=۰$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^۲+۲ax+b=(x+a)^۲-a^۲+b=۰$$

چون مربع‌سازی‌شدهٔ معادلهٔ فوق به صورت $(x+a)^۲+b+۴a$ است، داریم:

$$(x+a)^۲+b+۴a=(x+a)^۲-a^۲+b$$

$$\Rightarrow b+۴a=-a^۲+b \Rightarrow a^۲+۴a=۰$$

$$a(a+۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases}a=۰\\ a=-۴\end{cases}$$

۳۹۱- [۲] اگر x,y,z سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، داریم $xz=y^۲$؛ در نتیجه:

$$a,b-۲a,b \Rightarrow ab=(b-۲a)^۲ \Rightarrow ab=b^۲+۴a^۲-۴ab$$

$$\Rightarrow ۴a^۲-۵ab+b^۲=۰ \Rightarrow (۴a-b)(a-b)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a=b \quad \text{غ‌ق‌ق}\\ b=۴a\end{cases}$$

چون $۰<a<b$ است، پس $b=۴a$ است و داریم:

$$a,b-۲a,b \xrightarrow{b=۴a} a,۲a,۴a \Rightarrow r=\frac{۲a}{a}=۲$$

۳۹۲- [۴] **روش اول:** می‌دانیم هر عددی که در یک معادله صدق کند (یعنی باعث تساوی دو طرف شود) یک ریشهٔ آن معادله است.
چون $a-2b+4c=0$ است، پس $x=-\frac{1}{2}$ یک ریشهٔ معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ است، زیرا:

$$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow a(-\frac{1}{2})^2+b(-\frac{1}{2})+c$$
$$=\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b+c=\frac{1}{4}\underbrace{(a-2b+4c)}_{0}=0$$

پس یک ریشهٔ این معادله $-\frac{1}{2}$ است.
از طرفی می‌دانیم اگر α ریشهٔ یک چندجمله‌ای باشد، آن چندجمله‌ای بر $x-\alpha$ بخش‌پذیر است. پس اگر $-\frac{1}{2}$ و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشند، داریم:

$$ax^2+bx+c=a(x+\frac{1}{2})(x-\beta)\quad (a\neq 0)$$

اگر دو طرف تساوی بالا را بر a تقسیم کنیم، داریم:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x+\frac{1}{2})(x-\beta)$$
$$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2+(\frac{1}{2}-\beta)x-\frac{1}{2}\beta$$

چون تساوی فوق همواره باید برقرار باشد، پس:

$$-\frac{1}{2}\beta=\frac{c}{a}\Rightarrow \beta=-\frac{2c}{a}$$

روش دوم: می‌دانیم ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ در صورت وجود برابر $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ هستند. از حاصل‌ضرب این دو ریشه داریم:

$$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}$$
$$=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

پس حاصل‌ضرب دو ریشه برابر $\frac{c}{a}$ است. پس اگر یکی از دو ریشه $-\frac{1}{2}$ باشد، ریشهٔ دیگر $-\frac{2c}{a}$ است، زیرا:

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}\xrightarrow{\alpha=-\frac{1}{2}}-\frac{\beta}{2}=\frac{c}{a}\Rightarrow \beta=-\frac{2c}{a}$$

تذکر در هر معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$، حاصل‌ضرب ریشه‌ها در صورت وجود برابر $\frac{c}{a}$ است؛ در نتیجه اگر k یک ریشهٔ این معادلهٔ درجه‌دوم باشد، ریشهٔ دیگر $\frac{c}{ka}$ است.

۳۹۳- [۱] از کم کردن دو معادله از هم مقدار x برحسب m به دست می‌آید:

$$-\begin{cases}x^2+3x+m=0\\ x^2-x-m=0\end{cases}\Rightarrow 4x+2m=0\Rightarrow x=-\frac{m}{2}$$

پس ریشهٔ مشترک $-\frac{m}{2}$ است. چون این ریشه در هر دو معادله صدق می‌کند، داریم:

$$x^2-x-m=0\xrightarrow{x=-\frac{m}{2}}(-\frac{m}{2})^2-(-\frac{m}{2})-m=0$$
$$\Rightarrow \frac{m^2}{4}+\frac{m}{2}-m=0\xrightarrow{\times 4}m^2+2m-4m=0$$
$$\Rightarrow m^2-2m=0\Rightarrow m(m-2)=0\Rightarrow\begin{cases}m=0\\ m=2\end{cases}$$

اگر $m=0$ باشد، ریشهٔ مشترک $x=0$ است و اگر $m=2$ باشد، ریشهٔ مشترک $x=-1$ است. در نتیجه حاصل‌جمع m و ریشهٔ مشترک یا صفر است یا ۱ که در [۱] عدد ۱ وجود دارد.

۳۹۴- [۲] از کم کردن دو معادله از هم می‌توانیم ریشهٔ مشترک را پیدا کنیم:

$$\begin{array}{r} x^2-3x+a=0\\ -\quad x^2-ax+3=0\\ \hline (a-3)x+a-3=0\end{array}$$
$$\Rightarrow (a-3)x=-(a-3)\xrightarrow{a\neq 3}x=-1$$

۳۹۵- [۱] در معادلهٔ درجه‌دوم $Ax^2+Bx+C=0$ اگر $A+B+C=0$ باشد، یک ریشهٔ معادله برابر ۱ و ریشهٔ دیگر $\frac{C}{A}$ است.
با دقت در دو معادله متوجه می‌شویم $x=1$ ریشهٔ هر دو معادله است، زیرا مجموع ضرایب هر دو معادله برابر صفر است:

$$x^2-ax+a-1=0\xrightarrow{x=1}1-a+a-1=0$$
$$x=\frac{C}{A}=a-1$$
$$x^2-(a+1)x+a=0\xrightarrow{x=1}1-a-1+a=0$$
$$\Rightarrow x=\frac{C}{A}=a$$

پس ریشه‌های دیگر دو معادله $a-1$ و a هستند که اختلاف آن‌ها برابر ۱ است.

۳۹۶- [۳] **روش اول:** اگر k ریشهٔ مشترک دو معادله باشد، داریم:

$$\begin{cases}k^2-6k+a=0\\ k^2-2k-3a=0\end{cases}\xrightarrow{\text{تفاضل}}-4k+4a=0\Rightarrow k=a$$

پس ریشهٔ مشترک همان a است. در نتیجه به ازای $x=a$ داریم:

$$a^2-2a-3a=0\Rightarrow a^2-5a=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a=0\Rightarrow \text{غ‌ق‌ق}\\ a=5\Rightarrow \text{ریشهٔ مشترک}\end{cases}\quad(\text{با توجه به فرض})$$

پس معادلات زیر را داریم:

$$\begin{cases}x^2-2x-15=0\Rightarrow (x-5)(x+3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=5\\ x=-3\end{cases}\\ x^2-6x+5=0\Rightarrow (x-5)(x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=5\\ x=1\end{cases}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ اختلاف ریشه‌های غیرمشترک $=1-(-3)=4$

روش دوم: در معادلهٔ $(a\neq 0)\; ax^2+bx+c=0$ می‌دانیم $S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ است. پس اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^2-6x+a=0$، α و β و ریشه‌های معادلهٔ $x^2-2x-3a=0$، α و γ باشند، داریم:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=6\\ \alpha+\gamma=2\end{cases}\Rightarrow \beta-\gamma=4$$

۳۹۷- [۲] اگر α و β ریشه‌های یک معادلهٔ درجه‌دوم باشد، این معادلهٔ درجه‌دوم به صورت مقابل است: $a(x-\alpha)(x-\beta)=0\quad (a\neq 0)$

پس اگر $\tan 30^\circ$ و $\cot 30^\circ$ ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دومی باشند، داریم:

$$a(x-\tan 30^\circ)(x-\cot 30^\circ)=0 \qquad (a\neq 0)$$

که در معادلهٔ قبل a ضریب دلخواه غیرصفری است که در جواب معادله اثری ندارد. در نتیجه با توجه به آن‌که $\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $\cot 30^\circ=\sqrt{3}$، داریم:

$$a(x-\frac{\sqrt{3}}{3})(x-\sqrt{3})=0 \Rightarrow a(x^2-\frac{4\sqrt{3}}{3}x+1)=0$$

با توجه به گزینه‌ها اگر $a=3$ باشد، داریم: (چون ضریب x^2 در گزینه‌ها ۳ و ۱ است، $a=3$ را انتخاب کردیم.)

$$3x^2-4\sqrt{3}x+3=0$$

۳۹۸- [۳] **روش اول:** به کمک اتحاد جمله‌مشترک عبارت $4y^2-4xy-3x^2$ را تجزیه می‌کنیم:

$$4y^2-4xy-3x^2=(2y-3x)(2y+x)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y-3x=0 \Rightarrow 2y=3x \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{3}{2} \\ 2y+x=0 \Rightarrow 2y=-x \Rightarrow \frac{y}{x}=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

پس مقدار مثبت $\frac{y}{x}$ برابر $\frac{3}{2}$ است.

روش دوم: اگر دو طرف نامعادله را بر x^2 تقسیم کنیم، داریم:

$$4y^2-4xy-3x^2=0 \xrightarrow{\div x^2} 4(\frac{y}{x})^2-4(\frac{y}{x})-3=0$$

اگر $t=\frac{y}{x}$ باشد، داریم: $4t^2-4t-3=0 \Rightarrow (2t-3)(2t+1)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2t-3=0 \Rightarrow t=\frac{3}{2} \\ 2t+1=0 \Rightarrow t=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

پس ریشهٔ مثبت معادله برابر $\frac{3}{2}$ است.

۳۹۹- [۲] به کمک تغییر متغیر $t=x-\sqrt{x}$ داریم:

$$t=x-\sqrt{x} \Rightarrow 10t^2-11t+1=0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=\frac{1}{10} \end{cases}$$

معادلهٔ فوق برحسب t یک معادلهٔ درجه ۲ است که ریشه‌های آن ۱ و $\frac{1}{10}$ است؛ پس:

$$\begin{cases} t=x-\sqrt{x}=1 \\ t=x-\sqrt{x}=\frac{1}{10} \end{cases}$$

حال اگر فرض کنیم $\sqrt{x}=\alpha$ است، معادلات فوق به معادلات زیر تبدیل می‌شوند:

$$\alpha=\sqrt{x} \Rightarrow x=\alpha^2$$

$$\begin{cases} x-\sqrt{x}=1 \xrightarrow{\sqrt{x}=\alpha} \alpha^2-\alpha=1 \Rightarrow \alpha^2-\alpha-1=0 \\ \Rightarrow \alpha=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ x-\sqrt{x}=\frac{1}{10} \Rightarrow \alpha^2-\alpha=\frac{1}{10} \Rightarrow \alpha^2-\alpha-\frac{1}{10}=0 \\ \Rightarrow \alpha=\frac{1\pm\sqrt{\frac{7}{5}}}{2} \end{cases}$$

اما α باید نامنفی باشد، زیرا $\alpha=\sqrt{x}$ است و $\sqrt{x}$ همواره مقداری نامنفی دارد.

از بین ۴ ریشهٔ به‌دست آمده $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{1-\sqrt{\frac{7}{5}}}{2}$ منفی هستند، پس قابل‌قبول نیستند. در نتیجه برای α، دو مقدار $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{1+\sqrt{\frac{7}{5}}}{2}$ وجود دارد.

در نتیجه برای x دو جواب زیر که مربع این دو عدد است، وجود دارد:

$$\sqrt{x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2$$

$$\sqrt{x}=\frac{1+\sqrt{\frac{7}{5}}}{2} \Rightarrow x=(\frac{1+\sqrt{\frac{7}{5}}}{2})^2$$

پس معادله دارای ۲ جواب است.

۴۰۰- [۳] به کمک تغییر متغیر $t=x^2-x+1$ داریم:

$$\underbrace{x^2-x+2}_{t+1}+\frac{3}{\underbrace{x^2-x+1}_{t}}=5 \Rightarrow t+1+\frac{3}{t}=5$$

$$\Rightarrow t+\frac{3}{t}=4 \xrightarrow[t\neq 0]{\times t} t^2+3=4t \Rightarrow t^2-4t+3=0$$

$$\Rightarrow (t-1)(t-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=3 \end{cases}$$

چون $t=x^2-x+1$ است، پس:

$$\begin{cases} x^2-x+1=1 \Rightarrow x^2-x=0 \\ \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0\,,\,x=1 \\ x^2-x+1=3 \Rightarrow x^2-x-2=0 \\ \Rightarrow (x-2)(x+1)=0 \Rightarrow x=2\,,\,x=-1 \end{cases}$$

پس معادلهٔ فوق دارای ۴ ریشهٔ ۲، ۱، ۰ و ۱− است.

۴۰۱- [۳] ابتدا به کمک اتحاد جمله‌مشترک و به صورت زیر معادله را ساده می‌کنیم:

$$(x-1)(x+2)(x-3)(x-6)=16$$

$$\underbrace{(x-1)(x-3)}_{(x^2-4x+3)}\underbrace{(x+2)(x-6)}_{(x^2-4x-12)}=16$$

$$\Rightarrow (x^2-4x+3)(x^2-4x-12)=16$$

حال به کمک تغییر متغیر $t=x^2-4x$ داریم:

$$(t+3)(t-12)=16 \Rightarrow t^2-9t-36=16$$

$$\Rightarrow t^2-9t-\underset{(4\times 13)}{52}=0 \Rightarrow (t-13)(t+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=13 \\ t=-4 \end{cases}$$

پس با توجه به آن‌که $t=x^2-4x$ است، داریم:

$$\begin{cases} x^2-4x=13 \Rightarrow x^2-4x-13=0 \Rightarrow x=2\pm\sqrt{17} \\ x^2-4x=-4 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow (x-2)^2=0 \\ \qquad \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

پس ۲ و $2+\sqrt{17}$ و $2-\sqrt{17}$ ریشه‌های این معادله‌اند که جمع آن‌ها برابر ۶ است.

تذکر: در معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ اگر $\Delta>0$ باشد، حاصل‌جمع ریشه‌های حقیقی برابر $-\frac{b}{a}$ است. پس در معادلهٔ $x^2-4x-13=0$ حاصل‌جمع ریشه‌ها برابر ۶ است.

۴۰۲- $\boxed{2}$ اگر فرض کنیم $x^2=t$ است، داریم:

$$t^2-4t-1=0 \Rightarrow t=\frac{4\pm\sqrt{20}}{2}=2\pm\sqrt{5}$$

پس:

$$\begin{cases} x^2=2+\sqrt{5} \\ x^2=2-\sqrt{5}<0 \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow x^2=2+\sqrt{5}$$

$$\xrightarrow{\alpha<\beta} \begin{cases} \beta=\sqrt{2+\sqrt{5}} \\ \alpha=-\sqrt{2+\sqrt{5}} \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\alpha^2=2+\sqrt{5}$$
$$\beta^2=2+\sqrt{5}$$
$$\alpha\beta=-(2+\sqrt{5})$$
$$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\alpha\beta=2+\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2-\sqrt{5}=2+\sqrt{5}$$

۴۰۳- $\boxed{3}$ اگر در معادلهٔ زیر $2^x=t$ باشد، $4^x=t^2$ است، پس:

$$4^x=3\times \underbrace{2^{x+1}}_{2\times 2^x}-8 \Rightarrow t^2=6t-8$$

$$\Rightarrow t^2-6t+8=0 \Rightarrow (t-2)(t-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=4 \end{cases}$$

چون $t=2^x$ است، پس داریم:

$$\begin{cases} 2^x=2 \Rightarrow x=1 \\ 2^x=4 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

در نتیجه مجموع جواب‌های معادلهٔ فوق برابر ۳ است.

۴۰۴- $\boxed{1}$

$$\frac{x-2}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{8}{x^2-4}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2+x(x+2)}{x^2-4}=\frac{8}{x^2-4}$$

با شرط آن‌که $x\neq \pm 2$ باشد، داریم:

$$(x-2)^2+x(x+2)=8 \Rightarrow x^2-4x+4+x^2+2x=8$$

$$\Rightarrow 2x^2-2x-4=0 \Rightarrow x^2-x-2=0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

اما $x=2$ مخرج کسرهای گویای $\frac{x}{x-2}$ و $\frac{8}{x^2-4}$ را صفر می‌کند، پس $x=2$ قابل‌قبول نیست. در نتیجه $\alpha=-1$ است؛ پس: $||-1|-2|=1$

۴۰۵- $\boxed{4}$ چون $x-2$ یکی از عوامل چندجمله‌ای x^3-7x+a است، پس این چندجمله‌ای به ازای $x=2$ (ریشهٔ معادلهٔ $x-2=0$) برابر صفر است. در نتیجه:

$$x=2 \Rightarrow 2^3-(7\times 2)+a=0$$

$$\Rightarrow 8-14+a=0 \Rightarrow a=6$$

چون $x-2$ یک عامل چندجمله‌ای است پس با تقسیم این چندجمله‌ای بر $x-2$ آن را تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{array}{rrr|l} x^3 & -7x & +6 & x-2 \\ \hline -\,x^3 & -2x^2 & & x^2+2x-3 \\ \hline 2x^2 & -7x & +6 & \\ -\,2x^2 & -4x & & \\ \hline & -3x & +6 & \\ -\, & -3x & +6 & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3-7x+6=(x-2)(x^2+2x-3)$$

برای پیداکردن ریشه‌های عبارت P باید معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$P=(x-2)(x^2+2x-3)=0 \Rightarrow (x-2)(x+3)(x-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

پس بزرگ‌ترین ریشهٔ P برابر ۲ و کوچک‌ترین آن ۳- است؛ پس اختلاف آن‌ها برابر ۵ است.

۴۰۶- $\boxed{1}$

$$4\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$$

$$\Rightarrow 4\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2+\left(\frac{x^2+1}{x}\right)+1=0$$

اگر $t=\frac{x^2+1}{x}$ باشد، داریم $\frac{1}{t}=\frac{x}{x^2+1}$؛ پس به کمک این تغییر متغیر داریم:

$$\frac{4}{t^2}+t+1=0 \xrightarrow[t\neq 0]{\times t^2} t^3+t^2+4=0$$

یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجه‌سوم فوق $t=-2$ است؛ پس عبارت t^3+t^2+4 بر $t+2$ بخش‌پذیر است و به کمک تقسیم می‌توانیم این عبارت را تجزیه کنیم: $t^3+t^2+4=(t+2)(t^2-t+2)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=-2 \\ t^2-t+2=0 \Rightarrow \Delta=1-8=-7<0 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

پس $t=-2$ است؛ در نتیجه:

$$\frac{x^2+1}{x}=-2 \Rightarrow x^2+1=-2x \Rightarrow x^2+2x+1=0$$

$$(x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1$$

تذکر به کمک گزینه‌ها هم می‌توان نتیجه گرفت $x=-1$ است.

۴۰۷- $\boxed{2}$ دو طرف معادلهٔ زیر را بر x^2 تقسیم می‌کنیم:

$$2x^4+x^3-11x^2+x+2=0$$

$$\xrightarrow[x^2\neq 0]{\div x^2} 2x^2+x-11+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$

$$\Rightarrow 2x^2+\frac{2}{x^2}+x+\frac{1}{x}-11=0$$

$$\Rightarrow 2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-11=0$$

می‌دانیم $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$ پس $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$؛

در نتیجه:

$$2\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-11=0$$

$$\Rightarrow 2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-15=0$$

اگر فرض کنیم $x+\frac{1}{x}=t$ است؛ داریم:

$$2t^2+t-15=0$$

$$\Rightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{1+120}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{121}}{4}$$

$$\Rightarrow t=\frac{-۱\pm۱۱}{۴} \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{-۱-۱۱}{۴}=-۳ \\ t=\frac{-۱+۱۱}{۴}=\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

پس $x+\frac{۱}{x}=-۳$ است یا $x+\frac{۱}{x}=\frac{۵}{۲}$، در نتیجه:

$$x+\frac{۱}{x}=-۳ \xrightarrow[x\neq ۰]{\times x} x^۲+۱=-۳x$$

$$\Rightarrow x^۲+۳x+۱=۰ \Rightarrow x=\frac{-۳\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-۳+\sqrt{۵}}{۲}\\ x=\frac{-۳-\sqrt{۵}}{۲}\end{cases}$$

$$x+\frac{۱}{x}=\frac{۵}{۲} \xrightarrow[x\neq ۰]{\times ۲x} ۲x^۲+۲=۵x$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۵x+۲=۰ \Rightarrow x-\frac{۵\pm\sqrt{۹}}{۴}=-\frac{۵\pm۳}{۴}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۲\\ x=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

پس بزرگ‌ترین ریشهٔ معادله ۲ است.

۴۰۸- [۲] در معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲+bx+c=۰$، حاصل‌ضرب ریشه‌ها $\frac{c}{a}$ و حاصل‌جمع ریشه‌ها $-\frac{b}{a}$ است؛ پس در معادلهٔ درجه‌دوم $x^۲-۲x+m=۰$ داریم:

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}=m$$

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۲$$

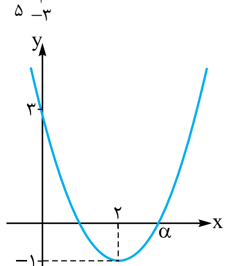
در نتیجه:

$$\alpha\beta+\alpha^۲=۱۰ \Rightarrow \alpha\underbrace{(\alpha+\beta)}_{۲}=۱۰\Rightarrow \alpha=۵$$

پس یکی از ریشه‌ها ۵ است. از آن‌جا که جمع ریشه‌ها ۲ است؛ پس ریشهٔ دیگر برابر ۳− است؛ در نتیجه:

$$\underset{۵}{\alpha}\,\underset{-۳}{\beta}=m \Rightarrow m=-۱۵$$

۴۰۹- [۱] **روش اول:** در حالت کلی معادلهٔ یک سهمی به صورت $y=a(x-x_s)^۲+y_s$ است که در آن x_s طول رأس سهمی و y_s عرض رأس سهمی است؛ پس در سهمی روبه‌رو با توجه به آن‌که مختصات رأس $(۲,-۱)$ است، داریم:



$$y=a(x-۲)^۲-۱$$

با توجه به نمودار سهمی در نقطه‌ای به عرض ۳ با محور yها برخورد کرده است؛ پس اگر $x=۰$ باشد، $y=۳$ است؛ در نتیجه مقدار a را می‌توان تعیین کرد:

$$y=a(x-۲)^۲-۱ \xrightarrow{x=۰} a(۰-۲)^۲-۱=۳$$

$$\Rightarrow ۴a-۱=۳\Rightarrow ۴a=۴\Rightarrow a=۱$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $y=(x-۲)^۲-۱$ است. حال ریشه‌های این معادله را به دست می‌آوریم:

$$(x-۲)^۲-۱=۰\Rightarrow (x-۲)^۲=۱$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-۲=۱\Rightarrow x=۳\\ x-۲=-۱\Rightarrow x=۱\end{cases}$$

پس ریشهٔ بزرگ‌تر سهمی برابر ۳ است.

روش دوم: می‌دانیم در هر معادلهٔ سهمی $y=ax^۲+bx+c$، مختصات رأس سهمی به صورت $(-\frac{b}{۲a},-\frac{\Delta}{۴a})$ است. از طرفی c عرض محل برخورد سهمی با محور عرض‌ها است؛ پس:

$$\begin{cases} c=۳\\ -\frac{b}{۲a}=۲ \Rightarrow b=-۴a\\ -\frac{\Delta}{۴a}=-۱ \Rightarrow \Delta=۴a \Rightarrow b^۲-۴ac=۴a\\ \xrightarrow{c=۳} b^۲-۱۲a=۴a \Rightarrow b^۲=۱۶a\end{cases}$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} b=-۴a \Rightarrow b^۲=۱۶a^۲\\ b^۲=۱۶a\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۱۶a^۲=۱۶a \xrightarrow{a\neq ۰} a=۱ \Rightarrow b=-۴$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $y=x^۲-۴x+۳$ است. به کمک تجزیه، ریشه‌های معادلهٔ سهمی را به دست می‌آوریم:

$$x^۲-۴x+۳=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۱\\ x=۳\end{cases}$$

پس ریشهٔ بزرگ‌تر سهمی برابر ۳ است.

۴۱۰- [۳] با توجه به آن‌که نقطهٔ A یک نقطه از سهمی است؛ پس در معادلهٔ آن صدق می‌کند:

$$\begin{cases}x=-۳\\ y=۵\end{cases} \Rightarrow ۲(\underset{-۳}{\underset{\downarrow}{x}}+۱)^۲+k=۵ \Rightarrow ۲\times۴+k=۵$$

$$\Rightarrow k=-۳$$

از طرفی در هر سهمی به معادلهٔ $y=a(x+\alpha)^۲+\beta$، β همان عرض رأس سهمی است؛ پس در سهمی $y=۲(x+۱)^۲-۳$، ۳−، عرض رأس سهمی است.

۴۱۱- [۴] اضلاع مستطیل مطابق شکل سؤال، یکی فاصلهٔ بین نقاط برخورد سهمی با محور xها و دیگری به اندازهٔ عرض رأس سهمی است.

ابتدا طول محل‌های برخورد سهمی را با محور xها پیدا می‌کنیم:

$$y=۰ \Rightarrow ۴x-x^۲=۰ \Rightarrow x(۴-x)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۰\\ x=۴\end{cases}$$

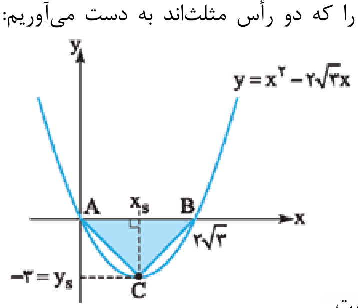
پس یکی از اضلاع مستطیل برابر ۴ است.

حال y رأس سهمی را پیدا می‌کنیم:

$$x_{\text{رأس}}=-\frac{b}{۲a}=\frac{-۴}{-۲}=۲ \Rightarrow y_{\text{رأس}}=۴(۲)-۲^۲=۴$$

پس طول و عرض هر دو برابر ۴ است؛ پس مساحت این مربع برابر ۱۶ است.

۴۱۲- [۱] نقطهٔ A و B محل برخورد سهمی با محور xها است. با قراردادن $y=۰$ مختصات این نقاط را که دو رأس مثلثاند به دست می‌آوریم:



$$y=۰$$

$$\Rightarrow x^۲-۲\sqrt{۳}x=۰$$

$$\Rightarrow x(x-۲\sqrt{۳})=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=۰\\ x=۲\sqrt{۳}\end{cases}$$

پس طول AB برابر $۲\sqrt{۳}$ است.

از طرفی طول ارتفاع مثلث ABC برابر قدرمطلق y رأس سهمی است:

$$x_{\text{رأس}} = -\frac{b}{۲a} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow y_{\text{رأس}} = \sqrt{۳}^۲ - ۲\sqrt{۳}\times\sqrt{۳} = ۳-۶=-۳$$

پس ارتفاع وارد بر ضلع AB در مثلث ABC برابر ۳ است؛ در نتیجه:

$$S=\frac{۱}{۲}AB\times CH = \frac{۱}{۲}\times ۲\sqrt{۳}\times ۳ = ۳\sqrt{۳}$$

۴۱۳- [۲] محور تقارن سهمی $y=ax^۲+bx+c$ خط $x=-\frac{b}{۲a}$ است؛ در نتیجه:

$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{b}{۶}\Rightarrow -\frac{b}{۶}=۲\Rightarrow b=-۱۲$$

در نتیجه معادلهٔ این سهمی به صورت $y=۳x^۲-۱۲x+۱$ است که y رأس آن به ازای $x=-\frac{b}{۲a}=\frac{۱۲}{۶}=۲$ به دست می‌آید: $x_{\text{رأس}}=۲$

$$\Rightarrow y_{\text{رأس}} = ۳(۲)^۲-۱۲(۲)+۱=۱۲-۲۴+۱=-۱۱$$

۴۱۴- [۲] می‌دانیم در سهمی به معادلهٔ $y=Ax^۲+Bx+C$، معادلهٔ محور تقارن برابر $x=-\frac{B}{۲A}$ است؛ پس در سهمی $y=\frac{۱}{۲}x^۲+ax+b$ داریم:

معادلهٔ محور تقارن: $x=-\frac{a}{۲\times\frac{۱}{۲}}=-a \xrightarrow{x=۲} -a=۲$

$\Rightarrow a=-۲$

برای آن‌که معادلهٔ درجه‌دوم دارای ریشهٔ مضاعف باشد، باید $\Delta=۰$ باشد؛ پس:

$$y=۰\Rightarrow \frac{۱}{۲}x^۲-۲x+b=۰\Rightarrow \Delta=(-۲)^۲-۴(\frac{۱}{۲})b=۰$$

$$\Rightarrow ۴-۲b=۰\Rightarrow b=۲$$

۴۱۵- [۲] چون نمودار سهمی بر محور xها مماس است، پس دارای ریشهٔ مضاعف است. یکی از ریشه‌های معادلهٔ $(۲x-۱)(ax+۳)=۰$، برابر $\frac{۱}{۲}$ است، پس ریشهٔ دیگر نیز باید $\frac{۱}{۲}$ باشد:

$$(۲x-۱)(ax+۳)=۰ \begin{cases} x=\frac{۱}{۲} \\ x=-\frac{۳}{a}\end{cases} \Rightarrow -\frac{۳}{a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=-۶$$

در نتیجه معادلهٔ سهمی $y=x^۲+ax-a$ به صورت زیر است و داریم:

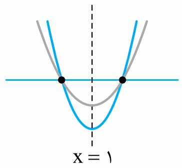
$$y=x^۲-۶x+۶\Rightarrow x_S=\frac{-b}{۲a}=۳$$

$$\Rightarrow y_S=۹-۱۸+۶=-۳$$

۴۱۶- [۱] محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=Ax^۲+Bx+C$، $x=\frac{-B}{۲A}$ است. پس:

$$\left.\begin{array}{l} y=x^۲-۲x+a\Rightarrow x=\frac{۲}{۲}=۱ \\ y=۲x^۲+bx-۵\Rightarrow x=\frac{-b}{۴}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{-b}{۴}=۱\Rightarrow b=-۴$$

چون خط $y=۱$ از محل‌هایی با عرض یکسان روی دو سهمی می‌گذرد، پس در آن دو نقطه، دو سهمی متقاطع‌اند (به شکل دقت کنید). پس اگر محل برخورد سهمی $y=۲x^۲-۴x-۵$ را با خط $y=۱$ به دست آوریم، نقاط برخورد دو سهمی را به دست آورده‌ایم:



$$۲x^۲-۴x-۵=۱\Rightarrow ۲x^۲-۴x-۶=۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲} x^۲-۲x-۳=۰\Rightarrow x^۲-۲x=۳$$

$$x^۲-۲x+a=۱\Rightarrow x^۲-۲x=۱-a$$

پس باید $۱-a=۳$ باشد؛ در نتیجه $a=-۲$ است. پس $a+b=-۶$ خواهد بود.

۴۱۷- [۱] مختصات رأس سهمی را برحسب k به دست می‌آوریم:

$$x_{\text{رأس}}=\frac{۴}{۲k}=\frac{۲}{k}, y_{\text{رأس}}=\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{-(۱۶-۱۲k)}{۴k}=\frac{۳k-۴}{k}$$

$$\Rightarrow S(\frac{۲}{k},\frac{۳k-۴}{k})$$

پس مختصات این نقطه باید در معادلهٔ خط $y=-x+۲$ صدق کند:

$$\frac{۳k-۴}{k}=\frac{-۲}{k}+۲\Rightarrow \frac{۳k-۴}{k}+\frac{۲}{k}=۲\Rightarrow\frac{۳k-۲}{k}=۲$$

$$\Rightarrow ۳k-۲=۲k\Rightarrow k=۲\Rightarrow y_{\text{رأس}}=\frac{۳k-۴}{k}=\frac{۶-۴}{۲}=۱$$

۴۱۸- [۱] چون سهمی رو به پایین است؛ پس ضریب $x^۲$ باید منفی باشد. در نتیجه $a^۲-۳<۰$. از طرفی چون a طبیعی است، پس فقط $a=۱$ می‌تواند باشد؛ پس معادلهٔ سهمی به صورت زیر خواهد بود:

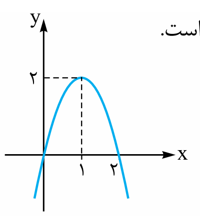
$$y=-۲x^۲+۴x+۱-۲b$$

از طرفی سهمی مبدأگذر است؛ پس اگر $x=۰$ باشد، $y=۰$ است؛ در نتیجه: $۱-۲b=۰$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $y=-۲x^۲+۴x$ است.

در نتیجه xرأس سهمی برابر $x=-\frac{۴}{۲\times -۲}=۱$ است و داریم: $y_{\text{رأس}}=-۲(۱)^۲+۴(۱)=۲$

پس مختصات رأس به صورت $(۱,۲)$ است.



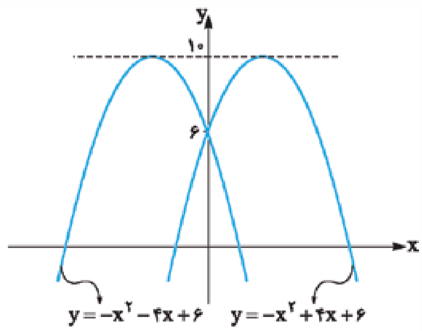
۴۱۹- [۴] می‌دانیم در هر سهمی به معادلهٔ $y=Ax^۲+Bx+C$، عرض رأس سهمی برابر $-\frac{\Delta}{۴A}$ است. از طرفی C برابر محل برخورد سهمی با محور yها است؛ پس در سهمی $y=-x^۲+bx+c$ داریم:

$$\begin{cases} x=۰ \\ y=۶\end{cases}\Rightarrow ۶=۰+۰+c\Rightarrow c=۶$$

$$-\frac{\Delta}{۴A}=-\frac{(B^۲-۴AC)}{۴A}=۱۰\Rightarrow -\frac{b^۲+۴c}{-۴}=۱۰$$

$$\xrightarrow{c=۶} b^۲+۲۴=۴۰\Rightarrow b^۲=۱۶\Rightarrow b=\pm۴$$

اما $b=-۴$ غیر قابل قبول است؛ زیرا x رأس سهمی عددی مثبت است و اگر $b=-۴$ باشد، $x_{\text{رأس}}=-\frac{-۴}{-۲}=-۲$ است؛ پس $b=۴$ است.



۴۲۰- [۴] با توجه به شکل، سهمی محور xها را در نقطهٔ ۳ قطع می‌کند؛ پس نقطهٔ (۳,۰)، نقطه‌ای است که در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند:

$$y=-x^{۲}+ax+b \xrightarrow[y=۰]{x=۳} -۹+۳a+b=۰$$

$$\Rightarrow ۳a+b=۹ \quad (۱)$$

می‌دانیم در سهمی به معادلهٔ $Ax^{۲}+Bx+C=۰$، عرض رأس سهمی برابر $-\frac{\Delta}{۴A}$ است. با توجه به شکل، عرض رأس سهمی داده‌شده برابر ۴ است؛

پس: $-\frac{B^{۲}-۴AC}{۴A}=۴ \xrightarrow[C=b,A=-۱]{B=a} -\frac{a^{۲}+۴b}{-۴}=۴$

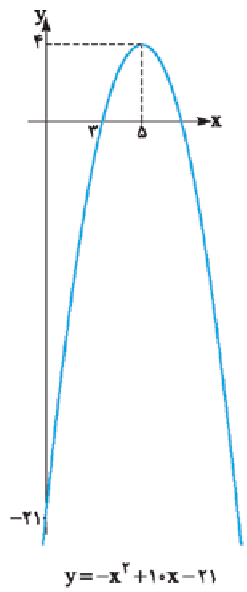
$$\Rightarrow a^{۲}+۴b=۱۶ \quad (۲)$$

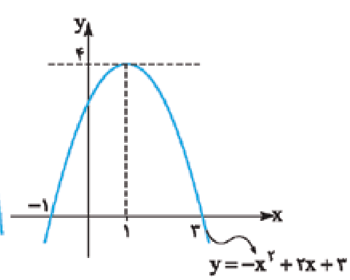
از معادلهٔ (۱) داریم $b=۹-۳a$؛ پس در معادلهٔ (۲) به جای b قرار می‌دهیم $۹-۳a$ و در نتیجه: $a^{۲}+۴(۹-۳a)=۱۶ \Rightarrow a^{۲}-۱۲a+۳۶=۱۶$

$$\Rightarrow a^{۲}-۱۲a+۲۰=۰ \quad (a-۲)(a-۱۰)=۰ \Rightarrow \begin{cases}a=۲\\ a=۱۰\end{cases}$$

اگر $a=۲$ باشد، آن‌گاه بر طبق معادلهٔ $۳a+b=۹$ داریم $b=۳$ و اگر $a=۱۰$ باشد، داریم $b=-۲۱$. اما با توجه به آن‌که محل برخورد این سهمی با محور yها نقطه‌ای با عرض مثبت است $a=۱۰$ و $b=-۲۱$ غیر قابل قبول‌اند؛ زیرا اگر $a=۱۰$ و $b=-۲۱$ باشد، سهمی $y=-x^{۲}+۱۰x-۲۱$ در نقطه‌ای به عرض منفی محورyها را قطع می‌کند. در زیر دو سهمی $y=-x^{۲}+۲x+۳$ و $y=-x^{۲}+۱۰x-۲۱$ رسم شده است:

پس: $ab=۲\times۳=۶$





بنابراین $a=۲$، $b=۳$ و $ab=۶$ است.

۴۲۱- [۱] مطابق شکل سهمی در نقطه‌ای به طول ۱− $x=-۱$ با محورxها برخورد دارد؛ پس در معادلهٔ $y=ax^{۲}+bx+c$ به ازای $x=-۱$، y برابر صفر است؛ در نتیجه:

$$a(-۱)^{۲}+b(-۱)+c=۰ \Rightarrow a-b+c=۰ \Rightarrow a+c=b$$

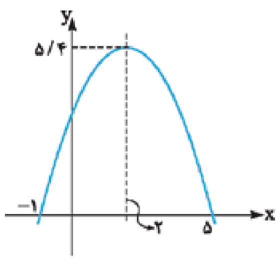
پس $a+c$ برابر b است.

تذکر در هر معادلهٔ درجه‌دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ اگر $x=-۱$ یک ریشهٔ معادله باشد، داریم $a+c=b$ و ریشهٔ دیگر برابر $-\frac{c}{a}$ است.

۴۲۲- [۳] **روش اول:** سهمی در دو نقطه به طول $x=۵$ و $x=-۱$ با محور xها برخورد کرده است؛ پس y بر $x+۱$ و $x-۵$ بخش‌پذیر است و معادلهٔ آن به صورت روبه‌رو است: $y=a(x+۱)(x-۵)$

از طرفی این سهمی در $y=۳$ با محور عرض‌ها برخورد کرده است؛ پس به ازای $x=۰$ برابر ۳ است: $a(۰+۱)(۰-۵)=۳ \Rightarrow a=-\frac{۳}{۵}$

از طرفی طول رأس سهمی برابر میانگین طول نقاط برخورد سهمی با محور xها است؛ پس $x_{\text{رأس}}=\frac{۵+(-۱)}{۲}=۲$ است. در نتیجه عرض نقطهٔ رأس برابر است با:



$$y=-\frac{۳}{۵}(x+۱)(x-۵)$$

$$\xrightarrow{x=۲} y_{\text{رأس}}=-\frac{۳}{۵}(۲+۱)(۲-۵)=\frac{۲۷}{۵}=۵/۴$$

روش دوم: اگر $y=ax^{۲}+bx+c$ معادلهٔ سهمی باشد، با توجه به آن‌که نقاط (۰,۳)، (۵,۰) و (۱,۰−) روی سهمی هستند؛ پس داریم:

$$\begin{cases}x=۰\\ y=۳\end{cases} \Rightarrow ۰+۰+c=۳ \Rightarrow c=۳$$

$$\begin{cases}x=-۱\\ y=۰\end{cases} \Rightarrow a-b+c=۰ \xrightarrow{c=۳} a-b=-۳$$

$$\begin{cases}x=۵\\ y=۰\end{cases} \Rightarrow ۲۵a+۵b+c=۰ \xrightarrow{c=۳} ۲۵a+۵b=-۳$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a-b=-۳\\ ۲۵a+۵b=-۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}۵a-\cancel{۵b}=-۱۵\\ ۲۵a+\cancel{۵b}=-۳\\ \hline ۳۰a=-۱۸ \Rightarrow a=-۰/۶ \Rightarrow b=۲/۴\end{cases}$$

در نتیجه عرض رأس سهمی به ازای $x=-\frac{b}{۲a}=\frac{-۲/۴}{-۱/۲}=۲$ به دست می‌آید:

$$y_{\text{رأس}}=-۰/۶\times۲^{۲}+۲/۴\times۲+۳=۵/۴$$

۴۲۳- [۲] محل برخورد سهمی به معادلهٔ $y=x^{۲}-ax+b$ با محور عرض‌ها در نقطه‌ای به عرض ۱− است؛ پس اگر $x=۰$ باشد، $y=-۱$ است: $x=۰ \Rightarrow y=۰-۰+b=-۱ \Rightarrow b=-۱$

از طرفی یک ریشهٔ سهمی ۳ است؛ پس اگر $x=۳$ باشد، $y=۰$ است:

$$۳^{۲}-۳a+b=۰ \xrightarrow{b=-۱} ۹-۳a-۱=۰ \Rightarrow ۳a=۸$$

$$\Rightarrow a=\frac{۸}{۳}$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $y=x^۲-\frac{۸}{۳}x-۱$ است. ریشه‌های این سهمی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$x^۲-\frac{۸}{۳}x-۱=۰ \xrightarrow{\times ۳} ۳x^۲-۸x-۳=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{۸\pm\sqrt{۶۴+۳۶}}{۶} \Rightarrow x=\frac{۸\pm ۱۰}{۶} \Rightarrow \begin{cases}x=۳\\ x=-\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

پس ریشهٔ کوچک‌تر $-\frac{۱}{۳}$ است.

تذکر چون می‌دانیم یک ریشهٔ معادلهٔ $۳x^۲-۸x-۳=۰$ برابر ۳ است، می‌توانیم عبارت $۳x^۲-۸x-۳$ را به صورت زیر تجزیه کنیم و سپس ریشهٔ دیگر را به دست آوریم:

$$۳x^۲-۸x-۳=۰ \Rightarrow (x-۳)(۳x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۳\\ x=-\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

تذکر در هر معادلهٔ درجه‌دوم $Ax^۲+Bx+C=۰$ اگر یکی از ریشه‌ها K باشد، چون ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{C}{A}$ است، ریشهٔ دیگر $\frac{C}{KA}$ است؛ پس در این معادله چون یک ریشه ۳ است؛ پس ریشهٔ دیگر $\frac{C}{۳A}$ است؛ در نتیجه ریشهٔ کوچک‌تر برابر $-\frac{۱}{۳\times ۱}=-\frac{۱}{۳}$ است.

۴۲۴- **۴** **روش اول**: محل برخورد سهمی با محور xها دارای طول‌های ۳a و $-a$ است؛ پس به ازای $x=۳a$ و $x=-a$، y برابر صفر است:

$$x=۳a \Rightarrow ۳(۳a)^۲-۴(۳a)+c=۰ \Rightarrow ۲۷a^۲-۱۲a+c=۰ \quad (۱)$$

$$x=-a \Rightarrow ۳(-a)^۲-۴(-a)+c=۰ \Rightarrow ۳a^۲+۴a+c=۰ \quad (۲)$$

اگر دو معادلهٔ (۱) و (۲) را از هم کم کنیم، c حذف می‌شود و داریم:

$$۲۴a^۲-۱۶a=۰ \Rightarrow ۸a(۳a-۲)=۰ \Rightarrow a=\frac{۲}{۳}$$

اگر در معادلهٔ $۳a^۲+۴a+c=۰$ به جای a قرار دهیم $\frac{۲}{۳}$، داریم:

$$۳(\frac{۲}{۳})^۲+۴(\frac{۲}{۳})+c=۰ \Rightarrow \frac{۴}{۳}+\frac{۸}{۳}+c=۰ \Rightarrow c+۴=۰$$
$$\Rightarrow c=-۴$$

روش دوم: چون عبارت $۳x^۲-۴x+c$ به ازای $x=۳a$ و $x=-a$ صفر است؛ پس این عبارت بر $(x-۳a)$ و $(x+a)$ بخش‌پذیر است و معادلهٔ سهمی به صورت زیر خواهد بود:

$$y=k(x-۳a)(x+a)=۳x^۲-۴x+c$$

با توجه به تساوی فوق، چون ضریب $x^۲$ برابر ۳ است؛ پس $k=۳$ است.

در نتیجه: $۳(x-۳a)(x+a)=۳x^۲-۴x+c$

$$\Rightarrow ۳(x^۲-۲ax-۳a^۲)=۳x^۲-۴x+c$$

$$\Rightarrow ۳x^۲-۶ax-۹a^۲=۳x^۲-۴x+c$$

پس باید:
$$\begin{cases}-۶a=-۴ \Rightarrow a=\frac{۲}{۳} \Rightarrow c=-۹(\frac{۲}{۳})^۲=-۴\\ -۹a^۲=c\end{cases}$$

۴۲۵- **۳** با توجه به نمودار سهمی در دو نقطهٔ $a+۳$ و a با محور xها برخورد کرده است؛ در نتیجه به ازای $x=a+۳$ و $x=a$، مقدار y صفر است:

$$\begin{cases}x=a+۳\\ y=۰\end{cases}$$
$$\Rightarrow (a+۳)^۲+a+۳+m+۱=۰ \Rightarrow a^۲+۷a+m+۱۳=۰$$

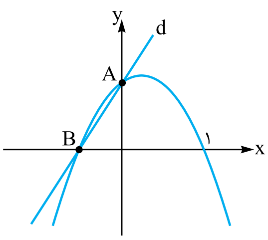
$$\begin{cases}x=a\\ y=۰\end{cases} \Rightarrow a^۲+a+m+۱=۰$$

اگر دو معادلهٔ فوق را از هم کم کنیم، داریم:

$$\begin{cases}a^۲+۷a+m+۱۳=۰\\ a^۲+a+m+۱=۰\end{cases} \Rightarrow ۶a+۱۲=۰ \Rightarrow a=-۲$$

اگر $a=-۲$ باشد، مقدار m را از معادلهٔ $a^۲+a+m+۱=۰$ به دست می‌آوریم:
$$۴-۲+m+۱=۰ \Rightarrow m=-۳$$

۴۲۶- **۲** مطابق شکل، محل برخورد خط و سهمی با محور yها (نقطهٔ A)، یکسان است. سهمی $y=ax^۲+۳x+c$ در نقطه‌ای به عرض c با محور yها برخورد می‌کند:



$$x=۰ \Rightarrow y=۰+۰+c=c$$

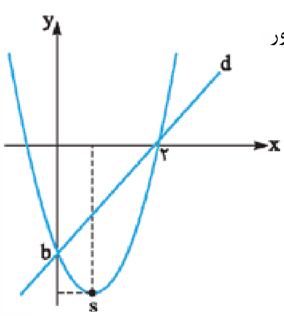
پس عرض از مبدأ خط گذرنده از A و B برابر c است.

از طرفی سهمی در نقطه‌ای به طول ۱ با محور xها برخورد دارد؛ پس به ازای $x=۱$، y برابر صفر است یعنی $x=۱$ یک ریشهٔ معادلهٔ $ax^۲+۳x+c=۰$ است.

می‌دانیم اگر $x=۱$ یک ریشهٔ معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشد، ریشهٔ دیگر $\frac{c}{a}$ است؛ پس ریشهٔ دیگر معادلهٔ $ax^۲+۳x+c=۰$ برابر $\frac{c}{a}$ است؛ یعنی طول نقطهٔ B برابر $\frac{c}{a}$ است؛ پس از دو نقطهٔ $A(۰,c)$ و $B(\frac{c}{a},۰)$ عبور می‌کند، در نتیجه:
$$\text{شیب } d=\frac{c-۰}{۰-\frac{c}{a}}=-a$$

پس شیب d برابر $-a$ و عرض از مبدأ آن c است؛ در نتیجه معادلهٔ آن به صورت $y=-ax+c$ است.

۴۲۷- **۳** عرض از مبدأ خط $y=۲x+b$ و محل برخورد سهمی $y=۲x^۲+ax+b$ با محور yها هر دو برابر b است. با توجه به شکل خط d از دو نقطهٔ $(۲,۰)$ و $(۰,b)$ عبور می‌کند، پس شیب آن برابر است با:



$$\text{شیب } d=\frac{b-۰}{۰-۲}=-\frac{b}{۲}$$

از طرفی شیب خط به معادلهٔ $y=۲x+b$ برابر ۲ است؛ پس:

$$-\frac{b}{۲}=۲ \Rightarrow b=-۴$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $y=۲x^۲+ax-۴$ است. چون سهمی در نقطه‌ای به طول ۲ با محور xها برخورد می‌کند، پس به ازای $x=۲$، y برابر صفر است:
$$y=۲x^۲+ax-۴ \xrightarrow{x=۲} ۲(۲)^۲+a(۲)-۴=۰$$

$\Rightarrow ۸+۲a-۴=۰ \Rightarrow ۲a=-۴ \Rightarrow a=-۲$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $y=۲x^۲-۲x-۴$ است که مختصات رأس آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x_{\text{رأس}}=-\frac{b}{۲a}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow y_{\text{رأس}}=۲(\frac{۱}{۲})^۲-۲(\frac{۱}{۲})-۴$$

$$=\frac{۱}{۲}-۱-۴=-\frac{۹}{۲} \Rightarrow S(\frac{۱}{۲},-\frac{۹}{۲})$$

۴۲۸- **۱** عرض از مبدأ خط d برابر ۹- است، اگر شیب خط را m فرض کنیم، معادلهٔ خط d به صورت $y=mx-۹$ خواهد بود.

چون محل برخورد سهمی و خط تنها یک نقطه است، پس معادلهٔ زیر باید فقط یک ریشه داشته باشد:

$$۴x^۲-۸x=mx-۹ \Rightarrow ۴x^۲-(۸+m)x+۹=۰$$

پس باید $\Delta=۰$ باشد: $\Delta=(۸+m)^۲-۱۴۴=۰$

$$\Rightarrow (۸+m)^۲=۱۴۴ \Rightarrow \begin{cases}۸+m=۱۲ \Rightarrow m=۴\\ ۸+m=-۱۲ \Rightarrow m=-۲۰\end{cases}$$

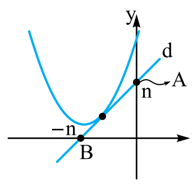
اگر $m=۴$ و $m=-۲۰$ باشد، داریم:

$$۴x^۲-۱۲x+۹=۰ \Rightarrow (۲x-۳)^۲=۰ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

$$۴x^۲+۱۲x+۹=۰ \Rightarrow (۲x+۳)^۲=۰ \Rightarrow x=-\frac{۳}{۲}$$

چون $\alpha>۰$ است پس $\alpha=\frac{۳}{۲}$ خواهد بود.

۴۲۹- **۱** با توجه به شکل، عرض از مبدأ خط، n و شیب آن برابر ۱ است، در نتیجه:



$A\left|\begin{matrix}۰\\n\end{matrix}\right.$ $\quad B\left|\begin{matrix}-n\\۰\end{matrix}\right.$ $\quad$ شیب $=\frac{n-۰}{۰-(-n)}=۱ \Rightarrow y=x+n$

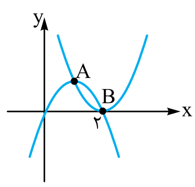
چون محل برخورد سهمی $y=x^۲+۳x+m$ و خط $y=x+n$ یک نقطه است، پس معادلهٔ زیر ۱ ریشه دارد:

$$x^۲+۳x+m=x+n \Rightarrow x^۲+۲x+(m-n)=۰$$

پس معادله به صورت زیر است:

$$(x+۱)^۲=x^۲+۲x+(m-n) \Rightarrow m-n=۱$$

۴۳۰- **۲** ریشه‌های سهمی $y=-x^۲+۲x$، ۰ و ۲ است. از طرفی طول رأس سهمی میانگین دو ریشهٔ آن یعنی $x_A=۱$ است. در نتیجه:



$$y_A=-۱+۲=۱ \Rightarrow A(۱,۱)$$

با توجه به شکل، رأس سهمی دیگر نقطهٔ $B(۲,۰)$ است و از نقطهٔ $A(۱,۱)$ عبور می‌کند، در نتیجه معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$$y=a(x-۲)^۲ \xrightarrow{(۱,۱)} a(۱-۲)^۲=۱ \Rightarrow a=۱$$

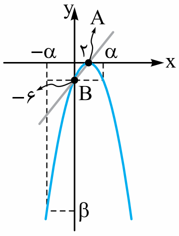
درنتیجه: $y=(x-۲)^۲=ax^۲+bx+c$

$$\Rightarrow x^۲-۴x+۴=ax^۲+bx+c \Rightarrow b=-۴,c=۴$$

$$\Rightarrow b-c=-۸$$

۴۳۱- **۴** خط $y=۳x-۶$ دارای عرض از مبدأ ۶- و طول از مبدأ ۲ است. پس رأس سهمی نقطهٔ $A(۲,۰)$ است و سهمی از نقطهٔ $(۰,-۶)$ عبور می‌کند.

می‌دانیم اگر $A(x_S,y_S)$ مختصات رأس سهمی باشد، معادلهٔ آن به صورت $y=a(x-x_S)^۲+y_S$ است؛ پس: $y=a(x-۲)^۲$



$$\xrightarrow[\text{روی سهمی}]{(۰,-۶)} a(۰-۲)^۲=-۶ \Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $y=-\frac{۳}{۲}(x-۲)^۲$ است.

حال با توجه به شکل طول نقاطی را باید بیابیم که عرض آن‌ها برابر ۶- است:

$$-\frac{۳}{۲}(x-۲)^۲=-۶ \Rightarrow (x-۲)^۲=۴ \Rightarrow \begin{cases}x-۲=۲ \Rightarrow x=۴\\ x-۲=-۲ \Rightarrow x=۰\end{cases}$$

پس $\alpha=۴$ است و با توجه به شکل نقطهٔ $(-\alpha,\beta)$ نقطه‌ای از سهمی است:

$$y=-\frac{۳}{۲}(x-۲)^۲ \xrightarrow[\text{روی سهمی}]{(-۴,\beta)} -\frac{۳}{۲}\times(-۴-۲)^۲=\beta$$

$$\Rightarrow \beta=-۵۴$$

۴۳۲- **۳** اگر $y_۱=ax^۲+bx+c$ و $y_۲=a'x^۲+b'x+c'$ معادلات دو سهمی باشد، معادلهٔ $y_۳=y_۲-y_۱=(a'-a)x^۲+(b'-b)x+c'-c$ نیز معادلهٔ یک سهمی است $(a'\neq a)$. با این اطلاعات با توجه به آن‌که عرض دو نقطه با طول‌های ۲ و ۴ در دو سهمی رسم‌شده یکسان است، پس معادلهٔ سهمی‌ای که از تفاضل دو معادلهٔ سهمی داده‌شده به دست می‌آید به صورت مقابل است: $y_۳=k(x-۲)(x-۴)$

از طرفی اگر $x=۰$ باشد، مقدار تفاضل مقادیر $y_۲$ و $y_۱$ برابر ۴ است. پس به ازای $x=۰$ مقدار $y_۳$ باید ۴ باشد:

$$x=۰ \Rightarrow k(۰-۲)(۰-۴)=۴ \Rightarrow k=\frac{۱}{۲}$$

پس: $y_۳=\frac{۱}{۲}(x-۲)(x-۴)$

از طرفی با توجه به شکل به ازای $x=۵$، طول AB برابر اختلاف عرض دو نقطهٔ A و B است که برابر است با:

$$x=۵ \Rightarrow y_۳=\frac{۱}{۲}(۵-۲)(۵-۴)=\frac{۳}{۲}$$

۴۳۳- **۱** در معادلهٔ سهمی کم‌ترین مقدار y اگر $a>۰$ باشد، به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ ایجاد می‌شود؛ پس:

$$x_{\text{رأس}}=-\frac{۳}{۲a} \Rightarrow y_{\text{رأس}}=a(-\frac{۳}{۲a})^۲+۳(-\frac{۳}{۲a})+۵=-۱$$

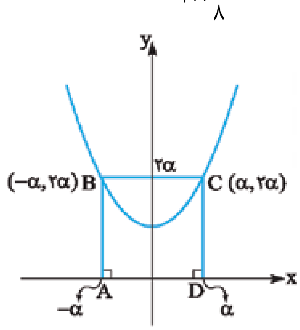
$$\frac{۹}{۴a}-\frac{۹}{۲a}+۵=-۱ \Rightarrow -\frac{۹}{۴a}+۵=-۱ \Rightarrow \frac{۹}{۴a}=۶ \Rightarrow a=\frac{۳}{۸}$$

در نتیجه طول رأس سهمی برابر است با:

$$x_{\text{رأس}}=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۳}{۲\times\frac{۳}{۸}}=-۴$$

۴۳۴- **۱** با توجه به آن‌که محور yها محور تقارن سهمی داده‌شده است؛ پس طول رأس سهمی برابر صفر است؛ در نتیجه $b=۰$ است، زیرا:

$$x_{\text{رأس}}=-\frac{b}{۲a}=۰ \Rightarrow b=۰$$



از طرفی اگر مختصات طول نقطهٔ C، برابر α $(\alpha > 0)$ باشد، مختصات طول نقطهٔ B برابر $-\alpha$ است. در نتیجه BC برابر 2α است. چون ۴ضلعی ABCD مربع است، پس باید $AB = CD = 2\alpha$ باشد؛ پس عرض نقاط B و C، برابر 2α است. در نتیجه مساحت مربع برابر $4\alpha^2$ خواهد بود؛ پس:

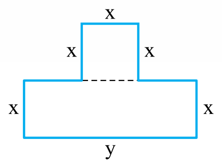
$$S = 4\alpha^2 = 16 \Rightarrow \alpha^2 = 4 \Rightarrow \alpha = \pm 2 \xrightarrow{\alpha>0} \alpha = 2$$

پس $C(2,4)$ است. چون نقطهٔ C بر روی سهمی است؛ پس اگر $x = 2$ باشد، $y = 4$ است:

$$y = ax^2 + bx + 2 \xrightarrow{x=2} 4a + 2b + 2 = 4$$

$$\xrightarrow{b=0} 4a + 2 = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

۴۳۵- [۲] محیط شکل زیر برابر $2y + 4x$ و مساحت آن برابر $xy + x^2$ است، در نتیجه:



محیط: $P = 2y + 4x = 12$

$$\Rightarrow y = 6 - 2x$$

مساحت: $S = x^2 + xy$

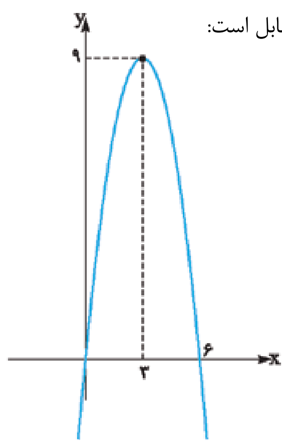
پس در معادلهٔ مساحت، مقدار y را برحسب x جای‌گذاری می‌کنیم:

$$S = x^2 + x(6 - 2x) = x^2 + 6x - 2x^2 \Rightarrow S = -x^2 + 6x$$

معادلهٔ S برحسب x یک معادلهٔ سهمی است که بیشترین مقدار این سهمی برابر عرض نقطهٔ رأس سهمی است. می‌دانیم y نقطهٔ رأس سهمی به معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ برابر $-\frac{\Delta}{4a}$ است؛ در نتیجه:

$$S_{max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{6^2 - 0}{-4} = \frac{36}{4} = 9$$

نمودار مساحت برحسب x به صورت مقابل است:

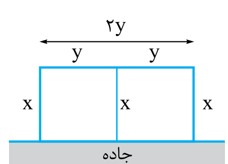


۴۳۶- [۴] **روش اول:** مطابق شکل محیط برابر $3x + 2y$ است؛ پس با توجه به آن‌که طول طناب برابر ۴۸ متر است، داریم:

$$3x + 2y = 48$$

از طرفی اگر S مساحت دو مستطیل باشد، داریم:

$$S = 2xy$$



از طرفی چون $3x + 2y = 48$ است y را برحسب x به دست می‌آوریم، در معادلهٔ $S = 2xy$ جای‌گذاری می‌کنیم تا مساحت برحسب x به دست آید:

$$2y = 48 - 3x$$

$$S = 2yx = (48 - 3x)x = 48x - 3x^2$$

نمودار S برحسب x یک سهمی است. بیشترین مساحت برابر عرض نقطهٔ رأس سهمی است که به ازای x رأس به دست می‌آید:

$$S = -3x^2 + 48x \Rightarrow x_{\text{رأس}} = -\frac{b}{2a} = \frac{-48}{-6} = 8$$

اگر $x = 8$ باشد، بر طبق معادلهٔ $3x + 2y = 48$، y برابر ۱۲ است پس بیشترین مقدار مساحت زمانی است که $x = 8$ و $y = 12$ باشد؛ پس:

$$S = 2xy = 2 \times 8 \times 12 = 192$$

روش دوم: اگر حاصل‌جمع دو عدد مثبت برابر مقدار ثابت k باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها زمانی بیشترین مقدار است که آن دو عدد با هم برابر و برابر $\frac{k}{2}$ باشند. در این مسئله $3x + 2y = 48$ است. اگر $3x = m$ و $2y = n$ باشد؛ پس $m + n = 48$ است. در نتیجه mn زمانی بیشترین است که $m = n = 24$ باشد.

در نتیجه بیشترین مقدار mn برابر 24^2 است. از طرفی چون $m = 3x$ و $n = 2y$ است، بیشترین مقدار 2xy نیز محاسبه می‌شود:

$$mn = 24^2 \Rightarrow 3x \times 2y = 24^2 \Rightarrow 6xy = 24 \times 24$$

$$\Rightarrow 2xy = 24 \times 8 = 192$$

۴۳۷- [۱] اگر فرض کنیم $A = x^2 + y^2$، با توجه به تساوی $2x + y = 10$، عبارت A را برحسب x می‌نویسیم:

$$2x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - 2x$$

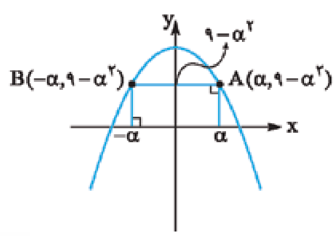
$$\Rightarrow A = x^2 + (10 - 2x)^2 = 5x^2 - 40x + 100$$

می‌دانیم در یک سهمی به معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ اگر $a > 0$ باشد، y به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ کم‌ترین مقدار است. در نتیجه عبارت A به ازای $x = \frac{40}{10} = 4$ کم‌ترین مقدار را دارد:

$$A_{min} = 5(4)^2 - 40(4) + 100 = 80 - 160 + 100 = 20$$

پس کم‌ترین مقدار A برابر ۲۰ است.

۴۳۸- [۱] اگر طول نقطهٔ A واقع بر منحنی، α باشد، با توجه به آن‌که $y = 9 - x^2$ است، پس عرض این نقطه برابر $9 - \alpha^2$ است. مطابق شکل طول مستطیل برابر 2α و عرض آن برابر $9 - \alpha^2$ است. در نتیجه محیط مستطیل برحسب α به صورت زیر به دست می‌آید:



محیط: $P = 2(2\alpha + 9 - \alpha^2) = -2\alpha^2 + 4\alpha + 18$

نمودار P برحسب α یک سهمی است، پس زمانی P بیشترین مقدار را دارد که $\alpha = -\frac{b}{2a}$ (b ضریب α و a ضریب α^2 است) باشد. در نتیجه:

$$\alpha_{\text{رأس}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times -2} = 1$$

$$\Rightarrow P_{max} = -2(1)^2 + 4(1) + 18 = 20$$

۴۳۹- [۳] فرض می‌کنیم نقطه‌ای با طول α بر روی منحنی $y = \sqrt{2x + 6}$ قرار دارد. در نتیجه عرض این نقطه برابر $\sqrt{2\alpha + 6}$ است. حال فاصلهٔ این نقطه را از نقطهٔ $(2,0)$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} (\alpha, \sqrt{2\alpha + 6}) \\ (2, 0) \end{cases} \Rightarrow d = \sqrt{(\alpha - 2)^2 + (\sqrt{2\alpha + 6} - 0)^2}$$

$$= \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 4 + 2\alpha + 6} \Rightarrow d = \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 10}$$

معادلهٔ $y=\alpha^2-2\alpha+10$ معادلهٔ یک سهمی است که کم‌ترین مقدار آن به ازای $\alpha=1$ (طول رأس سهمی) رخ می‌دهد؛ پس کم‌ترین y برابر است با:

$$y_{\text{رأس}}=1^2-2\times1+10=9$$

پس کم‌ترین مقدار d برابر $\sqrt{9}=3$ است.

۴۴۰- [۲] ابتدا نامعادلهٔ درجه‌اول $a^2x+3<x-4a$ را به صورت روبه‌رو می‌نویسیم: $a^2x+3<x-4a$

$$\Rightarrow a^2x-x<-3-4a \Rightarrow (a^2-1)x<-3-4a$$

این نامعادلهٔ درجه‌اول زمانی همواره برقرار است که ضریب x صفر و عبارت سمت راست نامساوی مثبت باشد. اگر ضریب x صفر باشد و عبارت سمت راست منفی شود، نامعادله هیچ‌گاه برقرار نیست؛ پس:

$$a^2-1=0 \Rightarrow a=\pm1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \Rightarrow 0<-3-4 \Rightarrow \text{هیچ‌گاه برقرار نیست} \\ a=-1 \Rightarrow 0<\underbrace{-3+4}_{1} \Rightarrow \text{همواره برقرار است} \end{cases}$$

پس اگر $a=-1$ باشد، این نامساوی همواره برقرار است.

۴۴۱- [۳]

$$\underbrace{x^2-4}_{p}<0 \Rightarrow$$

x		-2		2	
p	+	0	−	0	+

$$\Rightarrow x\in(-2,2) \Rightarrow A=(-2,2)$$

$$\underbrace{x^2-3x}_{q}<0 \Rightarrow$$

x		0		3	
q	+	0	−	0	+

$$\Rightarrow x\in(0,3) \Rightarrow B=(0,3)$$

$$\Rightarrow A\cap B=(-2,2)\cap(0,3)=(0,2)$$

نقطهٔ میانی بازهٔ $(0,2)$ عدد ۱ است.

۴۴۲- [۴] اگر در یک عبارت درجه‌دوم به صورت $p=ax^2+bx+c$، $\Delta>0$ باشد، عبارت p، ۲ ریشهٔ متمایز دارد که به ازای xهای بین این دو ریشه، p علامتی مخالف علامت a (ضریب x^2) و به ازای xهای خارج از دو ریشه، علامتی موافق a دارد: $(\alpha<\beta)$

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
p	موافق علامت a	مخالف علامت a	موافق علامت a	

پس به دو روش زیر می‌توان a و b را به دست آورد:

روش اول: با توجه به جدول صورت سؤال، ریشه‌های عبارت $y=ax^2+bx+6$، -2 و ۳ و علامت a منفی است؛ در نتیجه مقدار y به ازای $x=-2$ و $x=3$ صفر است و داریم:

$$\begin{matrix} x=-2 \Rightarrow y=4a-2b+6=0 \\ x=3 \Rightarrow y=9a+3b+6=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 4a-2b=-6 \\ 9a+3b=-6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a-b=-3 \\ 3a+b=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5a=-5 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow b=1 \Rightarrow a+b=0$$

روش دوم: چون ۳ و -2 ریشه‌های عبارت‌اند؛ پس تجزیهٔ y به صورت زیر است:

$$y=a(x+2)(x-3)$$

$$\Rightarrow a(x+2)(x-3)=ax^2+bx+6$$

$$\Rightarrow a(x^2-x-6)=ax^2+bx+6$$

پس با توجه به آن‌که باید همواره تساوی قبل برقرار باشد، $a=-1$ است:

$$-(x^2-x-6)=ax^2+bx+6$$

$$\Rightarrow -x^2+x+6=-x^2+bx+6$$

$$\Rightarrow b=1 \Rightarrow a+b=0$$

۴۴۳- [۴] اگر جدول متعلق به یک عبارت درجه‌دوم باشد، باید ضریب x^2 منفی باشد (چون بین دو ریشه علامت عبارت مثبت است) پس [۱] و [۲] حذف خواهند شد. از طرفی اگر 2α و $-\alpha$ ریشه‌های معادله باشند، عبارت به صورت زیر است:

$$P=a(x+\alpha)(x-2\alpha)=a(x^2-\alpha x-2\alpha^2)$$

اگر $a=-1$ باشد (با توجه به گزینه‌ها) داریم:

$$P=-x^2+\alpha x+2\alpha^2$$

با توجه به جدول $\alpha>0$ است و [۳] نیز حذف خواهد شد و اگر $\alpha=2$ باشد، داریم:

$$P=-x^2+2x+8$$

۴۴۴- [۲] اولاً $x=1$ یک ریشهٔ عبارت است:

$$a(1)^2+2(1)+a^2-4=0 \Rightarrow a^2+a-2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-2 \quad \text{غ ق ق} \\ a=1 \end{cases}$$

چون علامت عبارت بین دو ریشه منفی است پس ضریب x^2 مثبت است؛ در نتیجه $a=1$ است و داریم:

$$P=x^2+2x-3=(x-1)(x+3) \Rightarrow b=-3$$

$$\Rightarrow a+b=-2$$

۴۴۵- [۴] اگر در یک عبارت درجه‌دوم به صورت $p=Ax^2+Bx+C$، $\Delta=0$ باشد، عبارت p، ۱ ریشه دارد که در آن ریشه، مقدار p برابر صفر است و در بقیهٔ اعداد علامتی موافق علامت A (ضریب x^2) دارد:

		α	
p	موافق علامت A	0	موافق علامت A

پس به دو روش زیر می‌توانیم a و b را محاسبه کنیم:

روش اول: پس با توجه به جدول داده‌شده عبارت $y=ax^2+4x+b$ یک ریشهٔ مضاعف ۱ دارد. یعنی به ازای ۱، عبارت صفر می‌شود و Δ آن نیز برابر صفر است:

$$\begin{matrix} \Delta=4^2-4ab=0 \Rightarrow ab=4 \\ x=1 \Rightarrow a+b+4=0 \Rightarrow a+b=-4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a-b=0$$

روش دوم: چون $\Delta=0$ است و عبارت y، ۱ ریشه دارد؛ پس به صورت $y=a(x-1)^2$ خواهد بود. در نتیجه:

$$a(x-1)^2=ax^2+4x+b \Rightarrow a(x^2-2x+1)=ax^2+4x+b$$

چون ضریب x در سمت راست تساوی ۴ است؛ پس در سمت چپ باید a را برابر -2 انتخاب کنیم تا ضریب x در سمت چپ نیز ۴ گردد، پس:

$$-2(x^2-2x+1)=-2x^2+4x+b$$

$$\Rightarrow -2x^2+4x-2=-2x^2+4x+b$$

و با توجه به تساوی بالا $b=-2$ است؛ در نتیجه $a-b=0$ است.

۴۴۶- ۳ ابتدا همهٔ عبارت را به یک سمت نامساوی می‌بریم تا به صورت $p>۰$ درآید و سپس به کمک تعیین علامت p، جواب نامعادله را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۲-x^{۲}}{x}>۱ \Rightarrow \frac{۲-x^{۲}}{x}-۱>۰ \Rightarrow \frac{۲-x^{۲}-x}{x}>۰$$

$$\underbrace{\frac{-x^{۲}-x+۲}{x}}_{p}>۰ \Rightarrow \begin{cases}-x^{۲}-x+۲=۰\\ x=۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=۱\\ x=-۲\end{cases}$$

جدول تعیین علامت

		-۲		۰		۱	
$-x^{۲}-x+۲$	$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$
x	$-$		$-$	۰	$+$		$+$
p	$+$ ج	۰	$-$	ت	$+$ ج	۰	$-$

$$\Rightarrow x\in(-\infty,-۲)\cup(۰,۱)$$

تذکر با توجه به آن‌که ریشه‌های چندجمله‌ای‌های عبارت p همگی ساده‌اند، می‌توانیم به روش سریع تعیین علامت کنیم؛ به این ترتیب که همهٔ ریشه‌ها را در جدول قرار می‌دهیم و سپس یک عدد بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین ریشه، به p می‌دهیم. علامت p حاصل، علامت عبارت به ازای اعداد بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین ریشه است، سپس با حرکت از اعداد بیشتر از بزرگ‌ترین ریشه، به سمت ریشه‌ها، هرگاه به ریشهٔ ساده‌ای رسیدیم، علامت را عوض می‌کنیم:

		-۲		۰		۱	
p	$+$	۰	$-$	ت	$+$	۰	$-$
		تغییر		تغییر		تغییر	

$$x=۱۰۰ \Rightarrow p<۰$$

$$p>۰ \Rightarrow x\in(-\infty,-۲)\cup(۰,۱)$$

۴۴۷- ۳ عبارت p را تعیین علامت می‌کنیم:

$$p=\frac{\sqrt{x+۳}(۴-x)}{-۲x^{۲}+۵x-۳}$$

ریشه‌ها:
$$\begin{cases}x+۳=۰ \Rightarrow x=-۳\\ ۴-x=۰ \Rightarrow x=۴\\ -۲x^{۲}+۵x-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۱\\ x=\frac{۳}{۲}\end{cases}\end{cases}$$

پس جدول تعیین علامت به صورت زیر است:

x		-۳		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴	
$\sqrt{x+۳}$	تعریف نشده	۰	$+$		$+$		$+$		$+$
$۴-x$	$+$		$+$		$+$		$+$	۰	$-$
$-۲x^{۲}+۵x-۳$	$-$		$-$	۰	$+$	۰	$-$		$-$
p	تعریف نشده	۰	$-$	ت	$+$	ت	$-$	۰	$+$

چون زیر رادیکال نباید منفی باشد، عبارت به ازای $x<-۳$ تعریف نشده است. با توجه به جدول تعیین علامت، p به ازای $x=\frac{۵}{۴}$ مثبت است؛ زیرا $\frac{۵}{۴}\in(۱,\frac{۳}{۲})$.

۴۴۸- ۳ برای آن‌که نامساوی $-۴<\frac{۳x}{x-۱}<۶$ برقرار باشد، لازم است داشته باشیم:

$$\begin{cases}-۴<\frac{۳x}{x-۱} \Rightarrow \frac{۳x}{x-۱}+۴>۰ \Rightarrow \frac{۳x+۴x-۴}{x-۱}>۰\\ \Rightarrow \frac{۷x-۴}{x-۱}>۰\\ \frac{۳x}{x-۱}<۶ \Rightarrow \frac{۳x}{x-۱}-۶<۰ \Rightarrow \frac{۳x-۶x+۶}{x-۱}<۰\\ \Rightarrow \frac{-۳x+۶}{x-۱}<۰\end{cases}$$

$\frac{۷x-۴}{x-۱}>۰ \Rightarrow$

		$\frac{۴}{۷}$		۱	
$۷x-۴$	$-$	۰	$+$		$+$
$x-۱$	$-$		$-$	۰	$+$
	$+$	۰	$-$	ت	$+$

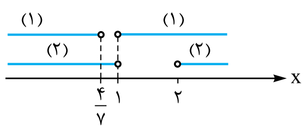
$$\Rightarrow x<\frac{۴}{۷} \text{ یا } x>۱ \quad (۱)$$

$\frac{-۳x+۶}{x-۱}<۰ \Rightarrow$

		۱		۲	
$-۳x+۶$	$+$		$+$	۰	$-$
$x-۱$	$-$	۰	$+$		$+$
	$-$	ت	$+$	۰	$-$

$$\Rightarrow x<۱ \text{ یا } x>۲ \quad (۲)$$

$$\Rightarrow (۱)\cap(۲)=x\in(-\infty,\frac{۴}{۷})\cup(۲,+\infty)=\mathbb{R}-[\frac{۴}{۷},۲]$$



پس $b-a=\frac{۱۰}{۷}$ است.

۴۴۹- ۲ می‌دانیم اگر عبارت درجه‌دومی ۱ ریشه داشته باشد، علامت عبارت قبل و بعد از آن موافق ضریب $x^{۲}$ است. پس جدول داده‌شده نمی‌تواند جدول تعیین علامت یک عبارت درجه‌دوم باشد. پس این جدول، جدول تعیین علامت یک چندجمله‌ای درجه‌اول است که ضریب x آن منفی است؛ زیرا علامت قبل از ریشه مثبت است و می‌دانیم در هر عبارت درجه‌اول، علامت عبارت قبل از ریشه مخالف علامت ضریب x است. پس:

$$p=ax^{۲}+bx+b-۲ \xrightarrow{\text{عبارت درجه‌اول است}} a=۰$$

$$\Rightarrow p=bx+b-۲ \xrightarrow{\text{قبل از ریشه مثبت است}} b<۰$$

از طرفی $x=۱$ ریشهٔ p است؛ پس:

$$x=۱ \Rightarrow b^{۲}+b-۲=۰ \Rightarrow (b+۲)(b-۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}b=-۲\\ b=۱\end{cases}$$

چون باید $b<۰$ باشد، پس $b=-۲$ است. در نتیجه $a+b=-۲$ است.

۴۵۰- ۳ در حالت کلی در جدول تعیین علامت یک چندجمله‌ای اگر اطراف یک ریشه، علامت عبارت تغییر نکند، آن ریشه، یک ریشهٔ مضاعف است. چون $\alpha<\beta$ است. پس گزینه‌ای پاسخ است که ریشهٔ مضاعف آن از ریشهٔ سادهٔ آن بزرگ‌تر باشد. از طرفی، عبارت به ازای $x>\beta$ منفی باشد.

در ۲ و ۴ ریشهٔ مضاعف از ریشهٔ ساده کوچک‌ترند؛ پس این گزینه‌ها پاسخ سؤال نیستند.

در ۱ مقدار عبارت به ازای $x > ۲$ مثبت است؛ پس این گزینه نیز پاسخ سؤال نمی‌باشد. در نتیجه ۳ صحیح است که اولاً ریشهٔ مضاعف آن یعنی ۲ از ریشهٔ سادهٔ آن یعنی ۱ بزرگ‌تر است و ثانیاً به ازای $x > ۲$ مقادیر عبارت منفی است.

$(۱-x)(x-۲)^۲ \Rightarrow$

x		۱		۲	
p	+	۰	−	۰	−

$x > ۱ \Rightarrow (۱-x)(x-۲)^۲ < ۰$

$x < ۱ \Rightarrow (۱-x)(x-۲)^۲ > ۰$

۴۵۱- ۲ در جدول تعیین علامت یک چندجمله‌ای اگر اطراف یک ریشه، علامت عبارت بدون تغییر بماند، پس آن ریشه، یک ریشهٔ مضاعف است.

در عبارت $p=(x-۲)(x^۲+ax+۶)$ یکی از ریشه‌ها ۲ است. پس یا عبارت $x^۲+ax+۶$ یک ریشهٔ ۲ دارد تا p عامل $(x-۲)^۲$ داشته باشد یا خود عبارت $x^۲+ax+۶$ یک ریشهٔ مضاعف دارد؛ پس:

الف) اگر $x=۲$ یک ریشهٔ $A=x^۲+ax+۶$ باشد، داریم:

$۲^۲+۲a+۶=۰ \Rightarrow ۲a=-۱۰ \Rightarrow a=-۵$

ب) اگر $x=۲$ ریشهٔ A نباشد و Δ عبارت A صفر باشد (A مربع کامل باشد):

$\Delta=a^۲-۲۴=۰ \Rightarrow a=\pm\sqrt{۲۴}=\pm ۲\sqrt{۶}$

اگر $a=-۵$ باشد $p=(x-۲)(x^۲-۵x+۶)$ است و ریشه‌های p به صورت زیرند:

$(x-۲)(x^۲-۵x+۶)=۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۲)(x-۳)=۰$

$\Rightarrow (x-۲)^۲(x-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ x=۳ \end{cases}$

پس جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x		۲		۳	
p	−	۰	−	۰	+

اما اگر $a=-۲\sqrt{۶}$ باشد، آن‌گاه $p=(x-۲)(x-\sqrt{۶})^۲$ است. چون ریشهٔ بزرگ‌تر معادله یعنی $\sqrt{۶}$ همان ریشهٔ مضاعف است، پس در اطراف $\sqrt{۶}$ تغییر علامت نداریم و جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x		۲		$\sqrt{۶}$	
p	−	۰	+	۰	+

پس a نمی‌تواند $-۲\sqrt{۶}$ باشد.

اگر $a=۲\sqrt{۶}$ باشد $p=(x-۲)(x+\sqrt{۶})^۲$ است. چون ریشهٔ بزرگ‌تر معادله ۲ است، پس جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x		$-\sqrt{۶}$		۲	
p	−	۰	−	۰	+

پس a می‌تواند مقادیر ۵− یا $۲\sqrt{۶}$ را اختیار کند که در بین گزینه‌ها ۵− وجود دارد.

۴۵۲- ۴ با توجه به جدول چون در همسایگی $x=b$ (اطراف $x=b$) عبارت تغییر علامت نداده است، پس $x=b$ یک ریشهٔ مضاعف برای P است. در این صورت دو حالت زیر را خواهیم داشت:

۱) عبارت $x^۲+ax+۱۶$ یک ریشهٔ یک داشته باشد:

$x^۲+ax+۱۶=۰ \xrightarrow{x=۱} ۱+a+۱۶=۰ \Rightarrow a=-۱۷$

در این صورت عبارت P به صورت زیر است:

$(x-۱)(x^۲-۱۷x+۱۶)=(x-۱)(x-۱)(x-۱۶)$

$=(x-۱)^۲(x-۱۶)$ که جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

		۱		۱۶	
	−	۰	−	۰	+

اما با توجه به صورت سؤال $b<۱$ است؛ پس این حالت مطلوب نیست.

۲) عبارت $x^۲+ax+۱۶$ خود یک ریشهٔ مضاعف b داشته باشد. در این صورت $\Delta=۰$ است: $\Delta=a^۲-۶۴=۰$

$\Rightarrow \begin{cases} a=۸ \Rightarrow x^۲+۸x+۱۶=(x+۴)^۲=۰ \Rightarrow b=-۴ \\ a=-۸ \Rightarrow x^۲-۸x+۱۶=(x-۴)^۲=۰ \Rightarrow b=۴ \end{cases}$

با توجه به آن‌که $b<۱$ است. پس $b=-۴$ و $a=۸$ خواهد بود و جدول تعیین علامت P به صورت زیر است: $P=(x-۱)(x+۴)^۲$

		−۴		۱	
	−	۰	−	۰	+

در نتیجه: $a+b=۸-۴=۴$

۴۵۳- ۳ عبارت را به صورت زیر ساده و سپس تعیین علامت می‌کنیم:

$P=۱+\dfrac{۱}{x^۲+۲x}=\dfrac{x^۲+۲x+۱}{x^۲+۲x}=\dfrac{(x+۱)^۲}{x(x+۲)}$

		−۲		−۱		۰	
	+	∄	−	۰	−	∄	+

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=-۲ \\ \beta=-۱ \end{cases} \Rightarrow \alpha+\beta=-۳$

تذکر: دقت کنید که چون $x=-۱$ یک ریشهٔ مضاعف برای عبارت است، عبارت اطراف $x=-۱$ تغییر علامت نمی‌دهد.

۴۵۴- ۱ برای آن‌که معادلهٔ درجه ۲ ریشه نداشته باشد، باید $\Delta<۰$ باشد؛ در نتیجه:

$۲x^۲+(m+۱)x+\dfrac{m}{۲}+۲=۰$

$\Delta=(m+۱)^۲-۸(\dfrac{m}{۲}+۲)=m^۲+۲m+۱-۴m-۱۶$

$\Rightarrow \Delta=m^۲-۲m-۱۵<۰ \Rightarrow \underset{\downarrow \atop ۵}{(m-۵)}\underset{\downarrow \atop -۳}{(m+۳)}<۰$

$\xrightarrow[\text{علامت}]{\text{تعیین}} m\in(-۳,۵)$

۴۵۵- ۱ باید $\Delta<۰$ باشد:

$\Delta=۶^۲-۴m(-۲m+۹)=۳۶+۸m^۲-۳۶m$

$\Rightarrow \Delta=۸m^۲-۳۶m+۳۶$

$\Delta=۴(۲m^۲-۹m+۹) \Rightarrow ۲m^۲-۹m+۹=۰$

$\Rightarrow (۲m-۳)(m-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=\dfrac{۳}{۲} \\ m=۳ \end{cases}$

		$\frac{۳}{۲}$		۳	
Δ	+	۰	−	۰	+

$\Rightarrow ۱/۵<m<۳$

که تنها عدد صحیح عضو بازهٔ $(۱/۵,۳)$ عدد ۲ است. پس به ازای یک مقدار صحیح معادله جواب ندارد.

۴۵۶- $\boxed{۱}$ زمانی یک معادلهٔ درجه‌دوم ریشهٔ مضاعف دارد که در آن $\Delta=۰$ باشد؛ پس معادلهٔ $x^۲+mx+n=۰$ زمانی ریشهٔ مضاعف دارد که:

$$m^۲-۴n=۰ \Rightarrow m^۲=۴n$$

در نتیجه گزینه‌ای دو ریشهٔ حقیقی دارد که با توجه به تساوی $m^۲=۴n$، دارای $\Delta>۰$ باشد:

$\boxed{۱}$ $x^۲-(m-۲)x-n=۰ \Rightarrow \Delta=(m-۲)^۲+۴n$

$$\xrightarrow{m^۲=۴n} \Delta=(m-۲)^۲+m^۲$$

چون $(m-۲)^۲+m^۲$ همواره مثبت است، پس این معادله همواره دو ریشهٔ حقیقی دارد.

$\boxed{۲}$ $x^۲+mx+n+۱=۰$

$$\Delta=m^۲-۴n-۴ \xrightarrow{۴n=m^۲} \Delta=\cancel{m^۲}-\cancel{m^۲}-۴<۰$$

چون $\Delta<۰$ در این معادله ریشه ندارد.

$\boxed{۳}$ $x^۲-nx+m+۱=۰ \Rightarrow \Delta=n^۲-۴m-۴$

$$\xrightarrow{n=\frac{m^۲}{۴}} \Delta=\frac{m^۴}{۱۶}-۴m-۴$$

Δ در این معادله مثلاً به ازای $m=۰$ منفی و به ازای $m=۵$ مثبت است؛ پس الزاماً این معادله ۲ ریشه ندارد.

$\boxed{۴}$ $x^۲+(n-۱)x-m=۰$

$$\Delta=(n-۱)^۲+۴m \xrightarrow{n=\frac{m^۲}{۴}} \Delta=(\frac{m^۲}{۴}-۱)^۲+۴m$$

Δ در این گزینه هم به ازای مثلاً $m=-۱$ منفی است و جواب ندارد.

۴۵۷- $\boxed{۱}$ چون معادله ریشهٔ حقیقی ندارد، باید $\Delta<۰$ باشد؛ پس:

$$\Delta=۶۴-\underbrace{۴\times۱۶}_{۶۴}(۲n+۱)<۰ \xrightarrow{\div۶۴} ۱-۲n-۱<۰$$

$$\Rightarrow ۲n>۰ \Rightarrow n>۰$$

پس حداقل مقدار طبیعی n برابر ۱ است.

۴۵۸- $\boxed{۱}$ به کمک اتحاد جمله‌مشترک، عبارت سمت چپ معادله را تجزیه می‌کنیم:

$$x^۴-(m+۳)x^۲+m+۲=۰$$

$$\Rightarrow (x^۲-۱)(x^۲-(m+۲))=۰$$

برای آن‌که معادلهٔ فوق ۴ جواب داشته باشد، باید هر یک از معادلات $x^۲-۱=۰$ و $x^۲-(m+۲)=۰$، دو ریشه داشته باشند. معادلهٔ $x^۲-۱=۰$ دارای ۲ ریشهٔ ۱- و ۱ است؛ پس لازم است معادلهٔ $x^۲-(m+۲)=۰$ دو ریشه داشته باشد.

$$x^۲-(m+۲)=۰ \Rightarrow x^۲=m+۲$$

برای آن‌که معادلهٔ فوق ۲ جواب داشته باشد، باید $m+۲$ مثبت باشد:

$$x^۲=\underbrace{m+۲}_{\text{مثبت}} \Rightarrow m+۲>۰ \Rightarrow m>-۲$$

$$\Rightarrow x=\pm\sqrt{m+۲}$$

۴۵۹- $\boxed{۱}$ یک عبارت درجه‌دوم زمانی همواره مثبت است که $\Delta<۰$ و $a>۰$ باشد؛ پس:

$$\begin{cases}\Delta=(۲m-۱)^۲-۴m^۲<۰ \Rightarrow ۴m^۲-۴m+۱-۴m^۲<۰ \\ \qquad \Rightarrow -۴m+۱<۰ \\ m>۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{۱}{۴}<m \\ ۰<m\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \frac{۱}{۴}<m$$

۴۶۰- $\boxed{۳}$ اگر دو طرف یک نامساوی را در یک عدد مثبت ضرب کنیم، جهت نامساوی عوض نمی‌شود. عبارت $x^۲+x+۱$ یک عبارت همواره مثبت است، زیرا دلتای آن منفی و ضریب $x^۲$ در آن مثبت است:

$$p=x^۲+x+۱$$

$$\begin{cases}\Delta=۱-۴=-۳<۰\\ a=۱>۰\end{cases} \Rightarrow p\ \text{همواره‌مثبت}$$

پس به ازای هر x، $x^۲+x+۱$ مثبت است. در نتیجه می‌توان دو طرف نامساوی زیر را در $x^۲+x+۱$ ضرب نمود:

$$\frac{۲x^۲-x+m}{x^۲+x+۱}>۱ \Rightarrow ۲x^۲-x+m>x^۲+x+۱$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^۲-۲x+m-۱}_{q}>۰$$

پس باید نامساوی فوق همواره برقرار باشد. برای آن‌که q همواره مثبت باشد، لازم است Δ منفی و ضریب $x^۲$ در آن مثبت باشد. ضریب $x^۲$ که ۱ است، پس کافی است $\Delta<۰$ باشد:

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۲)^۲-۴(m-۱)<۰ \Rightarrow ۴-۴m+۴<۰$$

$$\Rightarrow ۸<۴m \Rightarrow ۲<m$$

تذکر اگر عبارت درجه‌دوم $p=ax^۲+bx+c$ همواره مثبت باشد، $\Delta<۰$ و $a>۰$ است.

۴۶۱- $\boxed{۴}$ یک عبارت درجه‌دوم که در آن $\Delta>۰$، دو ریشه دارد و علامت عبارت بین دو ریشه، مخالف علامت ضریب $x^۲$ است.

اگر عبارت درجه‌دوم $۲x^۲+ax+۴$ به ازای اعداد عضو مجموعهٔ $\mathbb{R}-(b,۲)$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، پس دو ریشهٔ آن b و ۲ بوده‌اند که بین این دو ریشه، این عبارت منفی است. پس اگر b و ۲ ریشه‌های این عبارت باشند، داریم:

$$x=۲ \Rightarrow ۲(۲)^۲+۲a+۴=۰ \Rightarrow ۸+۲a+۴=۰$$

$$\Rightarrow ۲a=-۱۲ \Rightarrow a=-۶$$

برای محاسبهٔ b، ۲ روش زیر را داریم:

روش اول: پس اگر $a=-۶$ باشد، داریم:

$$۲x^۲-۶x+۴\ge۰ \xrightarrow{\div۲} x^۲-۳x+۲\ge۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)(x-۲)\ge۰ \Rightarrow x\in(-\infty,۱]\cup[۲,+\infty)=\mathbb{R}-(۱,۲)$$

پس $b=۱$ است. در نتیجه $a+b=-۵$ است.

روش دوم:

$$x=b \Rightarrow ۲b^۲+ab+۴=۰ \xrightarrow{a=-۶} ۲b^۲-۶b+۴=۰$$

$$\xrightarrow{\div۲} b^۲-۳b+۲=۰ \Rightarrow (b-۱)(b-۲)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=۱\\ b=۲\ \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

$b=۲$ غیرقابل‌قبول است، زیرا در این صورت مجموعه‌جواب نامعادله $\mathbb{R}$ خواهد بود. پس $b=۱$ است؛ در نتیجه $a+b=-۵$ است.

۴۶۲- [۲] مجموعه‌جواب عبارت $\frac{p}{q}>0$ و عبارت $pq>0$ با یکدیگر برابرند، زیرا اگر p و q هر دو هم‌علامت باشند، تقسیم و ضربشان همواره مثبت است. پس مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\frac{ax+6}{x+b}>0$ با نامعادلهٔ $\underbrace{(ax+6)(x+b)}_{A}>0$ یکسان است. عبارت A یک عبارت درجه‌دوم است. اگر مجموعه‌جواب آن بازهٔ $(-2,3)$ باشد، پس a قطعاً منفی است؛ زیرا زمانی بین دو ریشهٔ یک عبارت درجه‌دوم مثبت است که ضریب x^2 منفی باشد. از طرفی ۲- و ۳ نیز باید ریشه‌های این چندجمله‌ای باشند. چون باید $a<0$ باشد، پس ۳ ریشهٔ عبارت $ax+6$ و ۲- ریشهٔ $x+b$ است؛ پس:

$$ax+6=0 \xrightarrow{x=3} 3a+6=0 \Rightarrow a=-2$$

$$x+b=0 \xrightarrow{x=-2} -2+b=0 \Rightarrow b=2$$

در نتیجه $a-b=-4$ است.

تذکر: اگر $x=-2$ ریشهٔ عبارت $ax+6$ باشد، آن‌گاه $a=3$ است و در آن صورت علامت بین دو ریشه منفی خواهد بود.

۴۶۳- [۱] عبارت درجه‌دوم $p=x^2+ax-3$ به ازای اعداد بین دو ریشهٔ خود منفی و به ازای اعداد خارج دو ریشهٔ خود مثبت است. اگر α و β ریشه‌های معادله باشند و ۱ بین دو ریشه باشد، پس p به ازای ۱ باید منفی باشد؛ پس:

$$x=1 \Rightarrow p=1^2+a-3<0 \Rightarrow a-2<0 \Rightarrow a<2$$

		α		1		β	
p	+			−			+

چون ۱ بین دو ریشه است، پس به ازای آن p منفی است.

۴۶۴- [۳] نمودار سهمی $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$ در بازه‌ای بالای خط $y=\frac{7}{2}$ است که داشته باشیم:

$$-\frac{1}{2}x^2+2x+6>\frac{7}{2} \xrightarrow{\times 2} -x^2+4x+12>7$$

$$\Rightarrow x^2-4x-5<0 \Rightarrow \underbrace{(x-5)(x+1)}_{p}<0$$

$$\xrightarrow[\text{علامت}]{\text{تعیین}} x\in(-1,5)$$

بین ۲ ریشه p منفی است.

پس در بازهٔ $(-1,5)$ نمودار سهمی بالای خط داده شده است. در نتیجه حداکثر $\beta-\alpha=6$ است.

تذکر: این که در سؤال گفته شده است بیشترین مقدار $\beta-\alpha$ به این معنی است که در بین تمام بازه‌های زیرمجموعهٔ جواب، بزرگ‌ترین طول بازه چه‌قدر است.

۴۶۵- [۱] برای آن‌که سهمی به معادلهٔ $y=2x^2+mx+10$ بالاتر از خط $y=2$ قرار بگیرد، باید به ازای هر x داشته باشیم:

$$2x^2+mx+10>2 \Rightarrow 2x^2+mx+8>0$$

در نتیجه برای آن‌که عبارت $p=2x^2+mx+8$ همواره مثبت باشد، باید $\Delta<0$ و ضریب x^2 مثبت باشد. ضریب x^2 که برابر ۲ است، پس کافی است $\Delta<0$ باشد:

$$\Delta=m^2-64<0 \Rightarrow (m-8)(m+8)<0$$

$$\Rightarrow m\in(-8,8)$$

در بازهٔ $(-8,8)$، ۷ عدد طبیعی عضو هستند. پس به ازای ۷ عدد طبیعی نمودار سهمی فوق بالاتر از خط $y=2$ است.

۴۶۶- [۲] اگر نمودار سهمی $y=ax^2-ax$ همواره زیر خط $y=1$ باشد، باید به ازای هر x، $ax^2-ax<1$ برقرار باشد؛ یعنی باید نامعادلهٔ $ax^2-ax-1<0$ به ازای هر x برقرار باشد. برای آن‌که عبارت $p=ax^2-ax-1$ همواره منفی باشد، لازم است $\Delta<0$ و ضریب x^2 منفی باشد؛ در نتیجه:

$$\begin{cases}\Delta=a^2+4a<0 \Rightarrow a(a+4)<0 \Rightarrow a\in(-4,0) & (1)\\ a<0 \Rightarrow a\in(-\infty,0) & (2)\end{cases}$$

$$(1)\cap(2)=(-4,0)$$

۴۶۷- [۲] باید در بازهٔ $0<t<4$، $y>5$ باشد؛ یعنی:

$$-5t^2+18t+h>5$$

در نتیجه:

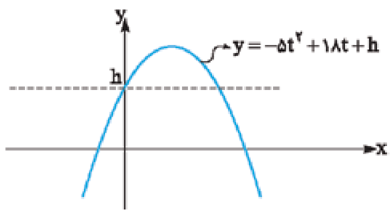
$$\underbrace{-5t^2+18t+h-5}_{p}>0$$

عبارت p بین دو ریشهٔ خود بزرگ‌تر از صفر است. (چون ضریب t^2 منفی است) پس اگر مجموعه‌جواب معادله $0<t<4$ باشد، حداقل مقدار h زمانی است که $t=0,4$ ریشه‌های p باشند؛ در نتیجه:

$$t=0 \Rightarrow h-5=0 \Rightarrow h=5$$

$$t=4 \Rightarrow \underbrace{-5(4)^2}_{-80}+\underbrace{18(4)}_{72}+h-5=0 \Rightarrow h=13$$

پس لازم است h حداقل ۱۳ باشد تا در این فاصله $y\geq 5$ باشد.



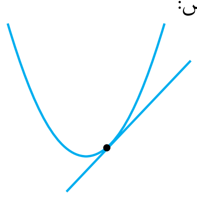
تذکر: اگر $h=5$ باشد، در لحظهٔ $t=4$ ارتفاع از سطح زمین برابر عددی منفی است و این امر امکان ندارد.

۴۶۸- [۲] یک خط زمانی بر یک سهمی مماس است که محل تلاقی خط و سهمی فقط ۱ نقطه باشد. در محل برخورد دو منحنی عرض و طول نقاط برابرند، پس باید معادلهٔ زیر ۱ جواب داشته باشد:

$$\begin{cases}y=x^2+mx+3\\ y=2x-1\end{cases} \Rightarrow x^2+mx+3=2x-1$$

$$\Rightarrow x^2+(m-2)x+4=0$$

معادلهٔ بالا زمانی ۱ ریشه دارد که $\Delta=0$ باشد. پس:

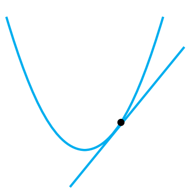


$$\Delta=(m-2)^2-16=0$$

$$\Rightarrow (m-2)^2=16$$

$$\Rightarrow \begin{cases}m-2=4 \Rightarrow m=6\\ m-2=-4 \Rightarrow m=-2\end{cases}$$

۴۶۹- [۱] مطابق شکل زیر، برای آن‌که خط بر سهمی مماس و خط زیر سهمی (به‌جز در نقطهٔ تماس) باشد، لازم است عرض همهٔ نقاط واقع بر سهمی (به‌جز نقطهٔ تماس) بیشتر از عرض نقاط واقع بر خط مماس باشند. پس باید به ازای هر x داشته باشیم:



$$ax^2-2x+a+2\geq 2x-1$$

$$\Rightarrow \underbrace{ax^2-4x+a+3}_{p}\geq 0$$

پس باید به ازای هر x به‌جز نقطهٔ تماس سهمی با خط، p نامنفی باشد:

$$\begin{cases}\Delta \le ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۶ - ۴a(a+۳) \le ۰ \\ \xrightarrow{\div ۴} ۴ - a(a+۳) \le ۰ \\ a > ۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow -a^۲ - ۳a + ۴ \le ۰ \Rightarrow a^۲ + ۳a - ۴ \ge ۰$$

$$\Rightarrow (a+۴)(a-۱) \ge ۰$$

$$\Rightarrow a \le -۴ \text{ یا } ۱ \le a \Rightarrow \begin{cases} \Delta \le ۰ \Rightarrow a \le -۴ \text{ یا } ۱ \le a \\ a > ۰\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} ۱ \le a$$

پس اگر $a = ۱$ باشد، $\Delta = ۰$ است و $a > ۰$ و در نتیجه سهمی بالای خط $y = ۲x - ۱$ است (به‌جز در نقطهٔ مماس).

۴۷۰- [۱] باید به ازای هر x نامعادلهٔ زیر برقرار باشد:

$$\frac{x^۲+ax+۳}{x^۲+x+۱} > ۱$$

با توجه به آن‌که Δ عبارت $x^۲+x+۱$ منفی است و ضریب $x^۲$ در آن مثبت است، پس این عبارت همواره مثبت است. از طرفی می‌دانیم دو طرف یک نامساوی را می‌توان در هر عدد مثبت ضرب کرد بدون آن‌که جهت نامساوی عوض شود. پس با توجه به همواره مثبت‌بودن مخرج کسر، دو طرف نامساوی را در $x^۲+x+۱$ ضرب می‌کنیم:

$$x^۲+ax+۳ > x^۲+x+۱ \Rightarrow ax+۳ > x+۱$$

$$\Rightarrow (a-۱)x > -۲$$

برای آن‌که نامعادلهٔ بالا به ازای هر x برقرار باشد، لازم است ضریب x صفر باشد. اگر $a = ۱$ باشد، داریم: $۰ \times x > -۲$

که نامساوی بالا به ازای هر x همواره برقرار است، زیرا صفر ضرب در هر عددی همواره از -۲ بزرگ‌تر است.

۴۷۱- [۴] اولاً باید $x^۲-۵x+۶<۰$ باشد، پس $x \in A = (۲,۳)$ باشد. از طرفی چون $x^۲-۵x+۶<۰$ است، پس اگر دو طرف تساوی زیر را در $x^۲-۵x+۶$ ضرب کنیم جهت تساوی عوض می‌شود و داریم:

$$-۲ < \frac{۲}{x^۲-۵x+۶} \xrightarrow{x^۲-۵x+۶<۰} -۲(x^۲-۵x+۶) > ۲$$

$$\Rightarrow x^۲-۵x+۶ < -۱ \Rightarrow x^۲-۵x+۷ < ۰$$

عبارت $x^۲-۵x+۷$ همواره مثبت است. پس: $x \in B = \varnothing$

از اشتراک دو مجموعهٔ A و B داریم: $A \cap B = \varnothing$

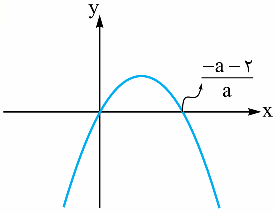
۴۷۲- [۲] اگر $a = ۰$ باشد $y = ۲x$ یک خط است که از ناحیهٔ دوم عبور نمی‌کند. اگر ضریب $x^۲$ یعنی a بزرگ‌تر از صفر باشد، تابع یک سهمی است که حتماً از ناحیهٔ دوم عبور می‌کند. پس لازم است $a < ۰$ باشد تا سهمی از ناحیهٔ دوم عبور نکند. از طرفی این سهمی مبدأ گذر است، زیرا به ازای $x = ۰$، y برابر صفر است. محل برخورد دیگر این سهمی با محور xها را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$y = ۰ \Rightarrow ax^۲+(a+۲)x = ۰ \Rightarrow x(ax+(a+۲)) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = \frac{-a-۲}{a}\end{cases}$$

مطابق شکل برای آن‌که سهمی از ناحیهٔ دوم عبور نکند، باید ریشهٔ دیگر آن یعنی $\frac{-a-۲}{a}$ نامنفی باشد؛ پس باید:

$$\frac{-a-۲}{a} \ge ۰$$



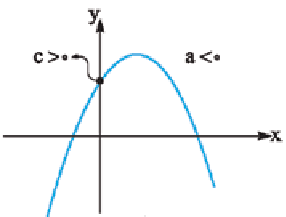
در نتیجه به کمک تعیین علامت داریم:

		-۲		۰	
$-a-۲$	+	۰	−		−
a	−		−	۰	+
$\frac{-a-۲}{a}$	−	۰	+	ت ن	−

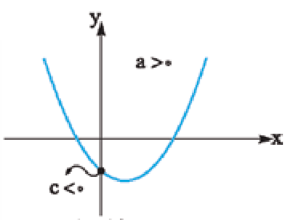
$$\Rightarrow -۲ \le a < ۰$$

با توجه به آن‌که $a = ۰$ نیز می‌تواند باشد، پس باید $-۲ \le a \le ۰$ باشد.

۴۷۳- [۳] **روش اول:** هر سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲+bx+c$ اگر $a > ۰$ باشد و $c < ۰$ (محل برخورد سهمی با محور yها) مطابق شکل (۱) سهمی از ۴ ناحیه عبور می‌کند و اگر $a < ۰$ باشد، مطابق شکل (۲) باید $c > ۰$ باشد تا سهمی از ۴ ناحیه بگذرد:



شکل (۲)



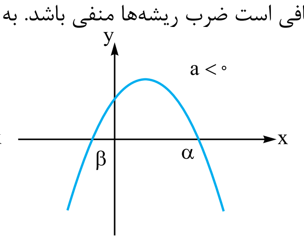
شکل (۱)

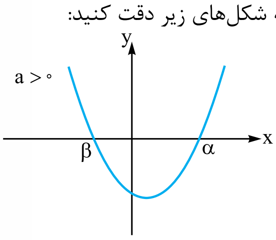
پس اگر $ac < ۰$ باشد، سهمی از چهار ناحیه می‌گذرد؛ در نتیجه در سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲-۳x+a-۴$ باید:

$$a(a-۴) < ۰ \Rightarrow a \in (۰,۴)$$

پس برای a سه مقدار طبیعی ۱، ۲ و ۳ یافت می‌شود که به ازای آن مقادیر a، سهمی از ۴ ناحیهٔ مختصات عبور کند.

روش دوم: در هر سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲+bx+c$ ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است. اگر سهمی بخواهد از هر ۴ ناحیهٔ صفحهٔ مختصات عبور کند، کافی است ضرب ریشه‌ها منفی باشد. به شکل‌های زیر دقت کنید:





$$\alpha\beta < ۰ \Rightarrow \frac{c}{a} < ۰$$

پس برای آن‌که سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲-۳x+a-۴$ از ۴ ناحیهٔ صفحهٔ مختصات عبور کند، باید:

$$\frac{c}{a} = \frac{a-۴}{a} < ۰ \Rightarrow a \in (۰,۴)$$

۴۷۴- [۲] عبارت را به صورت زیر ساده می‌کنیم و سپس تعیین علامت می‌کنیم:

$$\frac{۳}{x^۲} - \frac{۴}{x} + ۱ < ۰ \Rightarrow \frac{۳-۴x+x^۲}{x^۲} = \frac{x^۲-۴x+۳}{x^۲} < ۰$$

$$\Rightarrow \frac{(x-۳)(x-۱)}{x^۲} < ۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \\ x-۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ x^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۰\end{cases}$$

	0		1		3	
P	$+$	‖	$+$	$\vert$ $-$	$\vert$	$+$

$\xrightarrow{P<0} x \in (1,3)$

۴۷۵- ۲ عبارت P را به صورت زیر ساده و سپس تعیین علامت می‌کنیم:

$$P = 3+\frac{4}{x}-\frac{2x}{x-2}=\frac{3(x^2-2x)+4(x-2)-2x^2}{x(x-2)}$$

$$=\frac{3x^2-6x+4x-8-2x^2}{x(x-2)}=\frac{x^2-2x-8}{x(x-2)}$$

$$=\frac{(x-4)(x+2)}{x(x-2)}$$

		-2		0		2		4	
P	$+$	$\vert$	$-$	‖	$+$	‖	$-$	$\vert$	$+$

$$\xrightarrow{P<0} x \in (-2,0)\cup(2,4)$$

در نتیجه به ازای دو عدد صحیح ۱− و ۳ مقدار P منفی است.

۴۷۶- ۱ نامعادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{3\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{3}\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{\sqrt{x}-2+\sqrt{x}+2}{x-4}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{3}<\frac{2\sqrt{x}}{x-4}$$

چون باید $x>0$ باشد و $\sqrt{x}>0$ است، دو طرف نامعادله را بر $\sqrt{x}$ تقسیم می‌کنیم و جهت تساوی عوض نمی‌شود:

$$\frac{1}{3}<\frac{2}{x-4} \Rightarrow \frac{2}{x-4}-\frac{1}{3}>0$$

$$\Rightarrow \frac{6-x+4}{3(x-4)}=\frac{-x+10}{3(x-4)}>0$$

		4		10	
P	$-$	‖	$+$	$\vert$	$-$

$$\xrightarrow{P>0} x\in(4,10)$$

$$\xrightarrow{x\in\mathbb{N}} x\in\{5,6,7,8,9\} \Rightarrow 5+6+7+8+9=35$$

۴۷۷- ۲ می‌دانیم $x^2=|x|^2$ است؛ پس در معادلهٔ زیر داریم:

$$2x^2-2=3|x| \xrightarrow{x^2=|x|^2} 2|x|^2-2=3|x|$$

$$\Rightarrow 2|x|^2-3|x|-2=0$$

اگر فرض کنیم $t=|x|$، داریم:

$$2t^2-3t-2=0 \Rightarrow t=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm5}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}t=2\\ t=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

اما $t=-\frac{1}{2}$ قابل قبول نیست، زیرا $t=|x|$ است و $|x|$ همواره نامنفی است، در نتیجه:

$$\begin{cases}t=|x|=2 \Rightarrow x=\pm2\\ t=|x|=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow \text{جواب‌ندارد.}\end{cases}$$

پس بزرگ‌ترین ریشه ۲ و کوچک‌ترین آن ۲− است و اختلاف آن‌ها برابر ۴ است.

۴۷۸- ۴ **روش اول**: می‌دانیم $|x|^2=x^2$؛ پس:

$$3\underset{\substack{\downarrow\\|x|^2}}{x^2}+1=4|x| \Rightarrow 3|x|^2+1=4|x|$$

$$\Rightarrow 3|x|^2-4|x|+1=0$$

اگر فرض کنیم $t=|x|$ است، داریم:

$$3t^2-4t+1=0 \Rightarrow \begin{cases}t=1\\ t=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

پس:

$$\begin{cases}|x|=1 \Rightarrow x=\pm1\\ |x|=\dfrac{1}{3} \Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

پس مجموع ریشه‌های معادله صفر است.

روش دوم: اگر در معادلهٔ $3x^2+1=4|x|$ ، α ریشه باشد، قطعاً $-\alpha$ نیز یک ریشه است؛ زیرا $-\alpha$ نیز در معادله صدق می‌کند:

$$\alpha \Rightarrow 3\alpha^2+1=4|\alpha|$$

$$-\alpha \Rightarrow 3(-\alpha)^2+1=4|-\alpha|$$

$$\xrightarrow[|-\alpha|=|\alpha|]{(-\alpha)^2=\alpha^2} 3\alpha^2+1=4|\alpha| \Rightarrow$$ هم ریشه است. $-\alpha$

پس مجموع ریشه‌های این معادله صفر است.

۴۷۹- ۱ اگر $x\ge0$ باشد، $|x|=x$ است و معادله به صورت زیر است:

$$x^2+2x=6-3x \Rightarrow x^2+5x-6=0$$

$$\Rightarrow (x+6)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=1\\ x=-6 \text{ غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

چون با شرط $x\ge0$ معادله را حل کردیم، پس $x=-6$ غیرقابل‌قبول است؛ پس در این بازه $x=1$ جواب است.

اگر $x<0$ باشد، $|x|=-x$ است و معادله به صورت زیر است:

$$x^2+2x=6+3x \Rightarrow x^2-x-6=0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=3 \text{ غ‌ق‌ق}\\ x=-2\end{cases}$$

چون با شرط $x<0$ معادله را حل کردیم، پس $x=3$ غیرقابل‌قبول است. پس در این بازه $x=-2$ جواب است.

پس این معادله دارای جواب‌های ۲− و ۱ است که مجموع آن‌ها برابر ۱− است.

۴۸۰- ۲ اگر $x\ge1$ باشد، $|x-1|=x-1$ است و داریم:

$$x^2-2|x-1|-10=0 \Rightarrow x^2-2(x-1)-10=0$$

$$\Rightarrow x^2-2x-8=0 \Rightarrow (x-4)(x+2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=4\\ x=-2 \text{ غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

با توجه به شرط $x\ge1$ ، $x=-2$ قابل‌قبول نیست. پس در این حالت $x=4$ جواب معادله است.

اگر $x<1$ باشد، $|x-1|=-x+1$ است و داریم:

$$x^2+2(x-1)-10=0 \Rightarrow x^2+2x-12=0$$

$$\Rightarrow x=-1\pm\sqrt{13}$$

با توجه به شرط $x<1$ ، $x=-1+\sqrt{13}$ قابل‌قبول نیست. پس در این حالت $x=-1-\sqrt{13}$ جواب معادله است. در نتیجه مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$4+(-1-\sqrt{13})=3-\sqrt{13}$$

۴۸۱- [۴] باید ببینیم در چه بازه‌ای $۲x^۲-x-۱۰$ منفی و عبارت $|\frac{x+۳}{۲}-۲|$ کوچک‌تر از ۱ است.

$$۲x^۲-x-۱۰<۰ \Rightarrow (۲x-۵)(x+۲)<۰ \Rightarrow x\in(-۲,\frac{۵}{۲})$$

$$|\frac{x+۳}{۲}-۲|<۱ \Rightarrow |\frac{x-۱}{۲}|<۱ \Rightarrow -۱<\frac{x-۱}{۲}<۱$$
$$\Rightarrow -۲<x-۱<۲ \Rightarrow -۱<x<۳ \Rightarrow x\in(-۱,۳)$$

از اشتراک دو بازهٔ فوق داریم: $(-۲,\frac{۵}{۲})\cap(-۱,۳)=(-۱,\frac{۵}{۲})$

پس بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{۵}{۲}-(-۱)=۳/۵$ است.

۴۸۲- [۲]

روش اول: می‌دانیم $|x-۱|^۲=(x-۱)^۲=x^۲-۲x+۱$؛ پس:

$$x^۲-۲x=|x-۱|^۲-۱$$

در نتیجه: $x^۲-۲x<|x-۱| \Rightarrow |x-۱|^۲-۱<|x-۱|$

$$\Rightarrow |x-۱|^۲-|x-۱|-۱<۰$$

اگر فرض کنیم $t=|x-۱|$؛ داریم: $t^۲-t-۱<۰$

		$\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$		$\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$	
$t^۲-t-۱$	+		−		+

$$\Rightarrow \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}<t<\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

چون $t=|x-۱|$؛ پس: $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}<|x-۱|<\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$

چون $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ عددی منفی است، پس همواره $|x-۱|$ از آن بزرگ‌تر است، پس برای برقراری نامساوی بالا کافی است:

$$|x-۱|<\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow \frac{-۱-\sqrt{۵}}{۲}<x-۱<\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\xrightarrow{+۱} \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}<x<\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}\\ a=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b=۲$$

روش دوم: اگر $x\ge۱$ باشد، داریم $|x-۱|=x-۱$؛ پس:

$$x^۲-۲x<x-۱ \Rightarrow x^۲-۳x+۱<۰$$

$$\Rightarrow \frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}<x<\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$$

اما چون $x\ge۱$ است؛ پس:

$$(x\ge۱)\cap(\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}<x<\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲})=۱\le x<\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}\quad(۱)$$

اگر $x<۱$ باشد، داریم $|x-۱|=-x+۱$؛ پس:

$$x^۲-۲x<-x+۱ \Rightarrow x^۲-x-۱<۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}<x<\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

اما چون $x<۱$ است پس:

$$(x<۱)\cap(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}<x<\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})=(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}<x<۱)\quad(۲)$$

پس از اجتماع (۱) و (۲) مجموعه‌جواب نامعادلهٔ زیر ایجاد می‌شود:

$$(۱)\cup(۲)=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}<x<\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow \begin{cases}a=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\\ b=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b=۲$$

۴۸۳- [۳] می‌دانیم $|x|^۲=x^۲$ است؛ پس معادلهٔ $x^۲-۴|x|+k+۲=۰$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$|x|^۲-۴|x|+k+۲=۰$$

اگر $|x|=t$، داریم: $t^۲-۴t+k+۲=۰\quad(*)$

اگر معادلهٔ فوق دارای دو جواب مثبت باشد، به ازای هر جواب مثبت t، معادلهٔ $|x|=t$ دو جواب دارد و در کل معادله چهار جواب دارد. به کمک مربع‌سازی در معادلهٔ (*) داریم:

$$(t-۲)^۲-۴+k+۲=۰ \Rightarrow (t-۲)^۲=۲-k$$

اگر $k<۲$ باشد، معادلهٔ بالا جواب دارد و داریم:

$$t-۲=\pm\sqrt{۲-k} \Rightarrow \begin{cases}t=۲+\sqrt{۲-k}\\ t=۲-\sqrt{۲-k}\end{cases}$$

اگر هر دو جواب بالا مثبت باشد، برای x، ۴ جواب وجود دارد. در نتیجه:

$$۲+\sqrt{۲-k}>۰ \Rightarrow k<۲$$

$$۲-\sqrt{۲-k}>۰ \Rightarrow ۲>\sqrt{۲-k} \Rightarrow -۲<k<۲$$

پس اگر $-۲<k<۲$ باشد، داریم $|k|<۲$.

تذکر برای آن‌که معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲+bx+c=۰$ دو جواب مثبت داشته باشد، باید $\Delta>۰$ و جمع و ضرب ریشه‌های معادله که برابر $-\frac{b}{a}$ و $\frac{c}{a}$ هستند، مثبت باشد. به کمک این مطلب نیز می‌توانیم حدود k را طوری بیابیم که معادله $t^۲-۴t+k+۲=۰$، ۴ ریشه داشته باشد:

$$\begin{cases}\Delta=۱۶-۴(k+۲)>۰ \xrightarrow{\div۴} ۴-(k+۲)>۰\\ \Rightarrow k+۲<۴ \Rightarrow k<۲\quad(۱)\\ S=-\frac{b}{a}=\frac{۴}{۱}>۰ \Rightarrow \text{همواره برقرار است.}\quad(۲)\\ P=\frac{c}{a}=\frac{k+۲}{۱}>۰ \Rightarrow k>-۲\quad(۳)\end{cases}$$

$$(۱)\cap(۲)\cap(۳)=-۲<k<۲$$

چون برای t دو جواب مثبت α و β وجود دارد، پس برای x چهار جواب $\pm\alpha$ و $\pm\beta$ وجود دارد.

۴۸۴- [۳] می‌دانیم اگر $a>۰$، معادلهٔ $|x|=a$ دارای ۲ جواب است و داریم $x=\pm a$.

پس در معادلهٔ $|۴-|x-۲||=k$ اگر $k>۰$ باشد، داریم:

$$۴-|x-۲|=\pm k$$

$$\Rightarrow \begin{cases}۴-|x-۲|=k \Rightarrow |x-۲|=۴-k\quad(۱)\\ ۴-|x-۲|=-k \Rightarrow |x-۲|=۴+k\quad(۲)\end{cases}$$

برای آن‌که معادله دارای ۴ جواب باشد، باید هر یک از معادلات (۱) و (۲) دو جواب داشته باشند. باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}|x-۲|=۴-k \Rightarrow ۴-k>۰ \Rightarrow k<۴\\ |x-۲|=۴+k \Rightarrow ۴+k>۰ \Rightarrow -۴<k\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} -۴<k<۴$$

از طرفی براساس معادلهٔ اولیه باید $k>۰$ باشد، پس:

$$\begin{cases}k>۰\\-۴<k<۴\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} ۰<k<۴$$

تذکر در معادلهٔ $|x|=a$ اگر $a=۰$ باشد، معادله تنها دارای ۱ جواب $x=۰$ است.

۴۸۵- $\boxed{۴}$ حاصلضرب دو عدد m و n زمانی منفی است که m و n مختلف‌العلامه باشند.

اگر فرض کنیم $m=|x|-۲$ و $n=|x|+۳$، باید $mn<۰$ باشد.

از طرفی چون $|x|\ge۰$ است؛ پس $n=|x|+۳>۰$ است؛ پس اگر بخواهیم $mn<۰$ باشد، کافی است $m<۰$ باشد:

$$(\underbrace{|x|-۲}_{m})(\underbrace{|x|+۳}_{n})<۰ \xrightarrow{b>۰} |x|-۲<۰ \Rightarrow |x|<۲$$

$$\Rightarrow -۲<x<۲ \Rightarrow x\in(-۲,۲) \Rightarrow b=۲,a=-۲$$

$$\Rightarrow b-a=۴$$

تذکر اگر $(a>۰)$ $|x|<a$ آن‌گاه داریم: $-a<x<a$.

۴۸۶- $\boxed{۲}$ می‌دانیم اگر $b>۰$ و $|a|<b$ داریم: $-b<a<b$. در نتیجه اگر فرض کنیم $|x-۲|-۲=a$ داریم:

$$|\underbrace{|x-۲|-۲}_{a}|<۲ \Rightarrow -۲<a<۲ \Rightarrow -۲<|x-۲|-۲<۲$$

$$\xrightarrow{+۲} ۰<|x-۲|<۴$$

پس باید همزمان نامعادلات زیر برقرار باشند:

$$\begin{cases}۰<|x-۲| \Rightarrow x\neq۲ \quad (۱)\\ \text{و}\\ |x-۲|<۴ \Rightarrow -۴<x-۲<۴ \xrightarrow{+۲} -۲<x<۶ \quad (۲)\end{cases}$$

عبارت $|x-۲|$ همواره نامنفی است، یعنی می‌تواند صفر نیز باشد. اما چون باید $|x-۲|>۰$، پس $x=۲$ جزء مجموعه‌جواب نامعادله نیست و به ازای بقیهٔ اعداد، نامساوی همواره برقرار است. پس، از اشتراک (۱) و (۲) داریم:

$$(۱)\cap(۲)=(\mathbb{R}-\{۲\})\cap(-۲,۶)=(-۲,۶)-\{۲\}$$

پس ۶ عدد صحیح $-۱,۰,۱,۳,۴,۵$ در نامعادله صدق می‌کنند.

۴۸۷- $\boxed{۳}$ می‌دانیم اگر $b>۰$ و $|a|<b$، داریم: $-b<a<b$. پس داریم:

$$|\underbrace{|x-۱|-۳}_{a}|<۲ \Rightarrow |a|<۲ \Rightarrow -۲<a<۲$$

$$\Rightarrow -۲<|x-۱|-۳<۲ \xrightarrow{+۳} ۱<|x-۱|<۵$$

پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}۱<|x-۱| \Rightarrow \begin{cases}x-۱>۱\Rightarrow x>۲\\ \text{یا}\\ x-۱<-۱\Rightarrow x<۰\end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty,۰)\cup(۲,+\infty) \quad (۱)\\ |x-۱|<۵ \Rightarrow -۵<x-۱<۵ \Rightarrow -۴<x<۶\\ \Rightarrow x\in(-۴,۶) \quad (۲)\end{cases}$$

پس از اشتراک (۱) و (۲) داریم:

$$(۱)\cap(۲)=((-\infty,۰)\cup(۲,+\infty))\cap(-۴,۶)$$
$$=(-۴,۰)\cup(۲,۶)$$

پس اعداد صحیح $-۳,-۲,-۱,۳,۴,۵$ در معادله صدق می‌کنند که جمع آن‌ها برابر ۶ است.

۴۸۸- $\boxed{۴}$ می‌دانیم اگر $c>۰$ و $|x|>c$ داریم $x>c$ یا $x<-c$.

پس اگر $\beta>۰$ و $|x-\alpha|>\beta$ باشد، داریم:

$$\begin{cases}x-\alpha>\beta\\ \text{یا}\\ x-\alpha<-\beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>\alpha+\beta\\ x<\alpha-\beta\end{cases}$$

پس با توجه به آن‌که مجموعه‌جواب معادله به صورت $(-\infty,-۲)\cup(۴,+\infty)$ است، پس:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=۴\\ \alpha-\beta=-۲\end{cases} \Rightarrow ۲\alpha=۲ \Rightarrow \alpha=۱ \Rightarrow \beta=۳$$

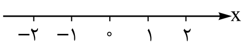
در نتیجه $۲\beta-\alpha=۵$ است.

۴۸۹- $\boxed{۲}$ می‌دانیم: $|x|<k \xleftrightarrow{k>۰} -k<x<k$

پس: $|۲x+۱|<۳ \Leftrightarrow -۳<۲x+۱<۳ \Rightarrow -۴<۲x<۲$

$$\xrightarrow{\div۲} -۲<x<۱$$

در نتیجه قدرمطلق اعداد بازهٔ $(-۲,۱)$، اعداد عضو بازهٔ $[۰,۲)$ اند؛ پس حداقل a برابر ۲ است: $-۲<x<۱ \Rightarrow |x|<۲$



۴۹۰- $\boxed{۴}$ ابتدا مجموعه‌جواب معادلهٔ $|x+۲|<۳$ را به دست می‌آوریم:

$$|x+۲|<۳ \Rightarrow -۳<x+۲<۳ \xrightarrow{-۲} -۵<x<۱$$

پس مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $x^۲+ax+b<۰$ بازهٔ $(-۵,۱)$ است. در نتیجه -۵ و ۱ ریشه‌های عبارت $p=x^۲+ax+b$ هستند که در بین این دو ریشه علامت p منفی شده است. پس:

$$x^۲+ax+b=(x-۱)(x+۵)$$

$$\Rightarrow x^۲+ax+b=x^۲+۴x-۵ \Rightarrow \begin{cases}a=۴\\ b=-۵\end{cases} \Rightarrow a-b=۹$$

۴۹۱- $\boxed{۱}$ می‌دانیم اگر $c>۰$ و $|x|<c$ باشد، داریم $-c<x<c$

پس: $|x-۲|<a \xrightarrow{a>۰} -a<x-۲<a$

$$\Rightarrow ۲-a<x<۲+a$$

اگر مجموعه‌جواب بالا جواب نامعادلهٔ $x^۲+bx-۵<۰$ باشد، پس ریشه‌های عبارت $p=x^۲+bx-۵$، $۲-a$ و $۲+a$ هستند که بین این دو، ریشهٔ p منفی است (با توجه به مثبت‌بودن ضریب $x^۲$).

روش اول: اگر $۲-a$ و $۲+a$ ریشه‌های p باشند، داریم:

$$x^۲+bx-۵=۰ \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^۲+۲۰}}{۲}$$

پس:

$$\frac{-b+\sqrt{b^۲+۲۰}}{۲}=۲+a \xrightarrow{a>۰} -b+\sqrt{b^۲+۲۰}=۴+\underset{\sqrt{۴a^۲}}{\underset{\downarrow}{۲a}}$$

$$\frac{-b-\sqrt{b^۲+۲۰}}{۲}=۲-a \xrightarrow{a>۰} -b-\sqrt{b^۲+۲۰}=۴-\underset{\sqrt{۴a^۲}}{\underset{\downarrow}{۲a}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-b=۴ \Rightarrow b=-۴\\ b^۲+۲۰=۴a^۲ \xrightarrow{b=-۴} ۴a^۲=۳۶ \Rightarrow a^۲=۹\end{cases}$$

$$\xrightarrow{a>۰} a=۳$$

پس $a+b=-۱$ است.

روش دوم: می‌دانیم جمع ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $Ax^۲+Bx+C=۰$، $-\frac{B}{A}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها $\frac{C}{A}$ است. پس اگر $۲-a$ و $۲+a$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+bx-۵=۰$ باشند، داریم:

$$\text{جمع ریشه‌ها}=۲+a+۲-a=۴ \Rightarrow -\frac{B}{A}=۴$$

$$\Rightarrow -b=۴ \Rightarrow b=-۴$$

$$\text{ضرب ریشه‌ها}=(۲-a)(۲+a)=۴-a^۲ \Rightarrow \frac{C}{A}=-۵$$

$$\Rightarrow ۴-a^۲=-۵ \Rightarrow a^۲=۹ \xrightarrow{a>۰} a=۳$$

پس $a+b=-۱$.

۴۹۲- **۱** می‌دانیم $|a|<|b| \Leftrightarrow a^۲<b^۲$؛ پس دو طرف نامساوی زیر را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$|x+۳|<|x+a| \Leftrightarrow (x+۳)^۲<(x+a)^۲$$

$$\Rightarrow x^۲+۶x+۹<x^۲+۲ax+a^۲ \Rightarrow ۶x-۲ax<a^۲-۹$$

$$\Rightarrow (۶-۲a)x<a^۲-۹$$

اگر ضریب x منفی باشد، با تقسیم دو طرف نامساوی فوق بر $۶-۲a$ جهت نامساوی برمی‌گردد. مجموعه‌جواب به صورت $x>k$ خواهد بود. اما مجموعه‌جواب به صورت $x<-۲$ است. پس ضریب x در نامعادله مثبت است، بنابراین:

$$۶-۲a>۰ \xrightarrow{a<۳} x<\frac{a^۲-۹}{۶-۲a} \quad (*)$$

در نتیجه چون مجموعه‌جواب $x<-۲$ است، پس:

$$\frac{a^۲-۹}{۶-۲a}=-۲ \Rightarrow a^۲-۹=۴a-۱۲ \Rightarrow a^۲-۴a+۳=۰$$

$$\Rightarrow (a-۱)(a-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ a=۳ \ \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

اما باید $a<۳$ باشد تا نامعادله جوابی به صورت $x<k$ داشته باشد. اگر $a=۳$ باشد، $۶-۲a=۰$ است و نامعادله جواب ندارد؛ پس $a=۱$ است.

۴۹۳- **۳** اگر $A=x-۱$ و $B=|\frac{۳x+۱}{۲x-۱}|$ باشد، برای آن‌که $B<A$ باشد لازم است $A>۰$ باشد، زیرا B همواره نامنفی است. برای آن‌که $A>۰$ باشد، باید $x>۱$ باشد. اگر $x>۱$ باشد، $۳x+۱$ و $۲x-۱$ همواره مثبت‌اند و عبارت $\frac{۳x+۱}{۲x-۱}$ مثبت است و در نتیجه:

$$x>۱: |\underbrace{\frac{۳x+۱}{۲x-۱}}_{\text{مثبت}}|=\frac{۳x+۱}{۲x-۱}$$

در نتیجه:

$$|\frac{۳x+۱}{۲x-۱}|<x-۱ \xrightarrow{x>۱} \frac{۳x+۱}{۲x-۱}<x-۱$$

چون باید $x>۱$ باشد و $۲x-۱$ در این حالت مثبت است، می‌توان طرفین نامساوی بالا را در $۲x-۱$ ضرب کرد بدون آن‌که جهت نامساوی تغییری کند:

$$۳x+۱<(x-۱)(۲x-۱) \Rightarrow ۳x+۱<۲x^۲-۳x+۱$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۶x>۰ \xrightarrow{÷۲} x^۲-۳x>۰$$

$$\Rightarrow x(x-۳)>۰ \Rightarrow x<۰ \ \text{یا} \ x>۳$$

پس دو شرط زیر باید برقرار باشند:

$$\begin{cases} (۱) \quad x>۱ \\ (۲) \quad x<۰ \ \text{یا} \ x>۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x>۳$$

پس $a=۳$ است.

۴۹۴- **۲** می‌دانیم: $|\frac{a}{b}|=\frac{|a|}{|b|}$

پس $|\frac{۲x+۱}{x-۱}|=\frac{|۲x+۱|}{|x-۱|}$. از طرفی چون $|x-۱|\geq ۰$ است، می‌توان دو طرف نامساوی را با شرط آن‌که $x\neq ۱$ (که مخرج کسر صفر نباشد) در $|x-۱|$ ضرب کرد:

$$|\frac{۲x+۱}{x-۱}|>۳ \Rightarrow |۲x+۱|>۳|x-۱|$$

حال می‌توان با توجه به نامنفی بودن دو طرف تساوی، دو طرف را به توان ۲ رساند. در نتیجه به کمک خاصیت $|a|^۲=a^۲$ و اتحاد مزدوج داریم:

$$|۲x+۱|^۲>۹|x-۱|^۲ \Rightarrow (۲x+۱)^۲>۹(x-۱)^۲$$

$$\Rightarrow ۹(x-۱)^۲-(۲x+۱)^۲<۰$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (۳x-۳-۲x-۱)(۳x-۳+۲x+۱)<۰$$

$$(x-۴)(۵x-۲)<۰ \Rightarrow x\in(\frac{۲}{۵},۴)$$

از طرفی می‌دانستیم $x\neq ۱$ است، پس مجموعه‌جواب این نامعادله به صورت $(\frac{۲}{۵},۴)-\{۱\}$ است. بنابراین دو عدد صحیح ۲ و ۳ در نامعادله صدق می‌کنند.

۴۹۵- **۴** **روش اول:** $x+|۲x-۱|<۵ \Rightarrow |۲x-۱|<۵-x$

اگر $۵-x<۰$ باشد، نامعادله جواب ندارد، زیرا سمت راست نامعادلهٔ بالا منفی و سمت چپ آن مثبت خواهد بود.

پس با شرط این‌که $۵-x\geq ۰$ یعنی $x\leq ۵$، دو طرف نامساوی نامنفی‌اند و می‌توان دو طرف را به توان ۲ رساند.

$$|۲x-۱|^۲<(۵-x)^۲$$

$$\xrightarrow{|۲x+۱|^۲=(۲x-۱)^۲} (۲x-۱)^۲<(۵-x)^۲$$

$$\Rightarrow (۲x-۱)^۲-(۵-x)^۲<۰$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} ((۲x-۱)-(۵-x))((۲x-۱)+(۵-x))<۰$$

$$\Rightarrow (۳x-۶)(x+۴)<۰ \Rightarrow x\in(-۴,۲)$$

اگر دو شرط $x\leq ۵$ و $-۴<x<۲$ را اشتراک بگیریم، داریم:

$$(-\infty,۵]\cap(-۴,۲)=(-۴,۲)$$

۴۹۶- **۲** می‌دانیم $|\frac{a}{b}|=\frac{|a|}{|b|}$، در نتیجه:

$$|\frac{mx+۱}{۲x-۱}|<۱ \Rightarrow \frac{|mx+۱|}{|۲x-۱|}<۱$$

با توجه به آن‌که $|۲x-۱|\geq ۰$ است، می‌توان با فرض $x\neq\frac{۱}{۲}$ دو طرف نامساوی بالا را در $|۲x-۱|$ ضرب کرد بدون آن‌که جهت نامساوی عوض شود، پس: $|mx+۱|<|۲x-۱|$

از طرفی می‌دانیم اگر $|b|<|a|$ باشد، $b^۲<a^۲$ است:

$$(mx+۱)^۲<(۲x-۱)^۲ \Rightarrow (mx+۱)^۲-(۲x-۱)^۲<۰$$

به کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$((mx+۱)-(۲x-۱))((mx+۱)+(۲x-۱))<۰$$

$$\Rightarrow ((m-۲)x+۲)((m+۲)x)<۰$$

$$\Rightarrow \underbrace{(m^۲-۴)x^۲+۲(m+۲)x}_{p}<۰$$

می‌دانیم در هر معادلهٔ درجه‌دوم علامت عبارت بین دو ریشهٔ آن، مخالف علامت ضریب $x^۲$ است. چون مجموعه‌جواب نامعادله در بازهٔ (a,b) است، پس a و b ریشهٔ p و ضریب $x^۲$ مثبت است که بین دو ریشهٔ آن p منفی است:

$$m^۲-۴>۰ \Rightarrow m^۲>۴ \Rightarrow |m|>۲$$

۴۹۷- ۲

$$\left|\frac{x+1}{ax+3}\right|=\frac{|x+1|}{|ax+3|}<1 \xrightarrow{x\neq\frac{-3}{a}} |x+1|<|ax+3|$$

حال دو طرف تساوی را به‌توان ۲ می‌رسانیم:

$$(x+1)^2<(ax+3)^2 \Rightarrow x^2+2x+1<a^2x^2+6ax+9$$

$$\Rightarrow P=(a^2-1)x^2+(6a-2)x+8>0$$

چون جواب نامعادله به صورت $(b,+\infty)$ است، پس باید عبارت P درجه‌اول باشد. در نتیجه $a^2-1=0$ است:

$$a^2-1\Rightarrow \begin{cases} a=1 \Rightarrow P=4x+8>0 \Rightarrow x>-2 \\ a=-1 \Rightarrow P=-8x+8>0 \Rightarrow x<1 \end{cases}$$

در نتیجه $a=1$ قابل قبول است که به ازای آن مجموعه‌جواب به صورت $(-2,+\infty)$ است و $b=-2$ خواهد بود. در نتیجه $a+b=-1$ است.

۴۹۸- ۲ چون باید جواب را در محدودهٔ اعداد حقیقی منفی حساب کنیم، داریم: $|x|=-x$

$$-1<\frac{-4x-2}{x+2}<4 \Rightarrow \begin{cases} -1<\frac{-4x-2}{x+2} \Rightarrow \frac{4x+2}{x+2}-1<0 \\ \Rightarrow \frac{3x}{x+2}<0 \\ \frac{-4x-2}{x+2}<4 \Rightarrow \frac{4x+2}{x+2}+4>0 \\ \Rightarrow \frac{8x+10}{x+2}>0 \end{cases}$$

$$P_1=\frac{3x}{x+2}<0 \Rightarrow$$

		-2		0	
P_1	$+$	ت ن	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow C=(-2,0)$$

$$P_2=\frac{8x+10}{x+2}>0 \Rightarrow$$

		-2		$-\frac{5}{4}$	
P_2	$+$	ت ن	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow D=(-\infty,-2)\cup(-\frac{5}{4},+\infty) \Rightarrow C\cap D=(-\frac{5}{4},0)$$