مقدمه ناشر

تقدیم به

خـــودت

قطعاً بیشترین علامت‌هایی که در درس‌های ریاضی (به خصوص حسابان) دیده می‌شد ایناست؛ $=$، $\neq$، $<$ و $>$. یه جورایی می‌شه گفت ریاضی بیشتر دنبال اینه که بگه چی با چی مساویه، چی با چی مساوی نیست. تساوی‌های مطلقِ ریاضی، دقیق و براساس منطق جبریه و مو لای درزش نمی‌ره. به نظرم یکی از چیزایی که ریاضی رو جذاب کرده، همینه که برابریش واقعاً برابریه!

اما تساوی بازی‌ها، تساوی حقوق آدما، تساوی همگان در برابر قانون و ...!

برابری‌هایی که خیلی وقتا برابر نیستند! مثلاً می‌بینید که دو تیم با هم مساوی می‌کنن ولی یکیشون حذف می‌شه. اون یکی می‌ره مرحلهٔ بعد. می‌گن بازی با تساوی به پایان رسید ولی به دلیل گل زدهٔ بیشتر در خانهٔ حریف، فلان تیم می‌ره مرحلهٔ بعد! خب پس در واقع منظورشون اینه که این بازیِ مساوی، مساوی نشده! داوری و ناداوری و سلیقهٔ شخصی و ... رو هم اضافه کنید به این داستان. از این مثال تو بازی‌ها و مسابقات فراوونه. اوضاع توی تساوی آدم‌ها و حق و حقوقشون خیلی پیچیده‌تر و عجیب‌تره؛ به قول جورج اورول در کتاب قلعهٔ حیوانات (که کتابی بس جذاب است):

all animals are equal but some animals are more equal than others!

بی‌خیال تا گیج‌تر نشدم بریم سر همون ریاضی خودمون که لااقل راست و حسینی مساویش مساویه، نامساویش هم نامساوی!

ممنونم از مؤلفای بی‌نظیرمون میثم و علی عزیز که با نوشتن این کتاب فرصتی برای موفقیت بیشتر علاقه‌مندان به ریاضی فراهم کردند. ممنونم از کیوان صارمی که با پیشنهادهای دقیق و موشکافانه‌اش در بهترشدن کتاب مؤثر بود و ممنونم از خانم‌ها یگانه فلاحی، هدی ملک‌پور، زهرا جالینوسی، ریحانه محمدی‌نژاد و میترا حسامی. ممنونم از ویراستاران خوبمون که می‌دونم تمام تلاششون رو کردن تا کتاب بی‌غلط بشه، ممنونم از تیم منسجم و منظم تولیدمون که در خاورمیانه همتا ندارن!

ما دوستتون داریم $>$ آن‌چه فکر می‌کنید.

مقدمه مؤلف

ده سال تحصیلی گذشت. فقط دو سال مانده تا کنکور و بعدش هم دانشگاه. اصل داستان هم آخراشه!

رشته‌تان هم که ریاضی است، پس نتیجه می‌گیریم امسال باید شدیدن حسابان را دریابید! اصلن این کتاب برای همین نوشته شده که شما دوستان ریاضی یازدهمی، در حسابان به مرحلهٔ «دریابیدن» برسید! بیا تا بهت بگم چه‌طوری این کار رو براتون انجام دادیم.

- این کتاب شامل ۵ فصل و هر فصل شامل چندین درس‌نامهٔ پر و پیمون! به همراه کلی مثال و تست است.

تو درس‌نامه‌ها هر جا لازم شده که یک روش باحال یاد بدیم که کارتون رو راحت‌تر بکنه، با عنوان «تکنیک» مطرح شدند که البته این جدا از نکات تستی و مفهومی هستند که در کل درس‌نامه برای درک راحت‌تر آورده شده‌اند.

- و در آخر هر درس‌نامه، تست‌های آن درس‌نامه با ظرافت خاصی چیده شدن که دست شمارو بگیره گام‌به‌گام جلو ببره تا برسید به اونجا که باید.

- در بخش تست‌ها، بعضی از تست‌ها رنگی شده‌اند. اگر وقت کافی برای زدن همهٔ تست‌ها ندارین، این تست‌های رنگی را در اولویت قرار بدین.

- تست‌های سری Z که در آخر هر بخش آمده، تست‌های جدی‌تر و قوی‌تری هستند که می‌توانید با آن‌ها خودتان را محک جدی‌تری بزنید. در پایان هر فصل هم یک آزمون جامع گذاشتیم که خودتون رو تو اون فصل محک بزنین.

پاسخ تست‌های هر فصل هم در آخر آن فصل آمده است و برای هر پاسخ آن‌قدر وسواس به خرج دادیم که بعد از خوندن هر پاسخ خودت بگی «ایول بابا دریابیده شدم»

- تازه یک چیز دیگه! چون هم نگران امتحان نهاییتون بودیم و هم کنکور، تو تعدادی از پاسخ‌ها چند راه‌حل نوشتیم؛ هم روش تشریحی (مطابق روش‌های کتاب) که به درد دنیاتون می‌خوره و هم روش‌های تستی که درد آخرتتون! خلاصه این‌که یک کتابی آماده کردیم که لذت فهمیدن ریاضی رو از ته اعماق وجودت درک کنی!

در آخر از تمام دوستان خیلی‌سبزی‌مان که چند سالی است با آن‌ها کار می‌کنیم تشکر می‌کنیم.

از دکتر کمیل نصری، ایمان سلیمان‌زاده و خانم‌ها زهرا جالینوسی، ریحانه محمدی‌نژاد و میترا حسامی که زحمت زیادی برای این کتاب کشیدند تشکر می‌کنیم.

از همکاران واحد تولید هم که خیلی اذیتشان کردیم تشکر می‌کنیم.

فهرست

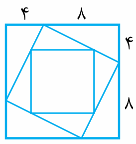
۶۹- مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ $۹,۹۹,۹۹۹,\cdots$ چندتا یک دارد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۷۰- مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ $\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۴},\frac{۷}{۸},\cdots$ چند برابر $\frac{۱}{۱۰۲۴}$ است؟

۱) ۹۱۷۲ ۲) ۹۷۱۲ ۳) ۹۲۱۷ ۴) ۹۲۷۱

۷۱- در شکل مقابل، طول ضلع مربع بزرگ‌تر برابر ۱۲ است. مطابق شکل مربع‌هایی با نسبت‌های ثابت روی اضلاع، در داخل مربع بزرگ‌تر رسم شده است. با رسم حداقل چند مربع، مجموع مساحت‌های مربع‌ها از ۲۹۷ بیشتر می‌شود؟ (مثل کنکور)



۱) ۷ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۶

۷۲- در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ اول ۳ واحد از جملهٔ دوم کم‌تر است. اگر مجموع n جملهٔ اول ۱۰ و مجموع ۲n جملهٔ اول ۶۸ باشد، جملهٔ اول دنباله کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) ۳

۷۳- حاصل مجموع $x+۲x^۲+۳x^۳+\cdots+۱۵x^{۱۵}-۲$ به ازای $x=۲$ کدام است؟

۱) $۵(۲^{۱۷})$ ۲) $۵(۲^{۱۶})$ ۳) $۷(۲^{۱۷})$ ۴) $۷(۲^{۱۶})$

۷۴- در یک دنبالهٔ هندسی جملهٔ $(n-m)$ام برابر ۲۰ و جملهٔ $(n+m)$ام آن برابر ۵ است. اگر بین جملهٔ nام دنباله و عدد ۱۶۰، هفت واسطهٔ هندسی مثبت قرار دهیم، مجموع کل نه عدد حاصل کدام است؟

۱) $۲۸۰+۷۰\sqrt{۲}$ ۲) $۳۲۰+۱۲۰\sqrt{۲}$ ۳) $۲۹۰+۱۴۰\sqrt{۲}$ ۴) $۳۱۰+۱۵۰\sqrt{۲}$

۷۵- مجموع شش جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی برابر ۱۵/۷۵ و مجموع معکوس‌های آن‌ها برابر ۷/۸۷۵ است. حاصل‌ضرب این شش جمله کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

درس ۲: معادلات درجه‌دوم

معادلهٔ درجه‌دوم و ریشه‌های آن

در کتاب ریاضی سال دهم روش‌های حل معادلهٔ درجه‌دوم به طور کامل بررسی شد. این روش‌ها را در این‌جا با هم مرور می‌کنیم.

روش فاکتورگیری این معادلات به فرم $ax^۲+bx=۰$ هستند که با فاکتورگیری در x می‌توانیم ریشه‌ها را بیابیم.

مثال:

$$۲x^۲-۳x=۰ \Rightarrow x(۲x-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ ۲x-۳=۰ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

روش تجزیه فرض کنید معادلهٔ $x^۲+ax+b=۰$ به راحتی قابل تجزیه باشد، در این حالت باید دوتا عدد پیدا کنیم که مجموع آن‌ها a و حاصل‌ضرب آن‌ها b است و این دو عدد را در عبارت تجزیه‌شده قرار دهیم.

مثال:

$$x^۲\underbrace{-۲}_{\text{مجموع}}x\underbrace{-۸}_{\text{حاصل‌ضرب}}=۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۴ \\ x=-۲ \end{cases}$$

نکته: اگر ضریب $x^۲$ عددی غیر از یک باشد، از دوتا تکنیک زیر می‌توانید استفاده کنید:

۱ **ضریب $x^۲$ مربع کامل باشد:** در این حالت جزر جملهٔ اول را از جملهٔ دوم جدا کن.

$$۴x^۲+۸x-۲۱=۰ \Rightarrow ۴x^۲+۴(۲x)-۲۱=۰$$

حالا باید دوتا عدد پیدا کنید به طوری که مجموع آن‌ها ۴ و حاصل‌ضرب آن‌ها -۲۱ باشد، که این دو عدد ۷ و -۳ خواهند بود؛ پس تجزیه به صورت زیر انجام می‌شود: (حواست باشه در تجزیه، عبارت‌های شامل ۲x داریم!)

$$۴x^۲+۸x-۲۱=۰ \Rightarrow (۲x+۳)(۲x-۷)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{۳}{۲} \\ x=\frac{۷}{۲} \end{cases}$$

۲ **ضریب $x^۲$ مربع کامل نباشد:** گام‌به‌گام این موضوع را جلو می‌بریم.

$$۳x^۲+۴x-۴=۰$$

گام اول: ضریب $x^۲$ را در عدد ثابت انتهایی ضرب کن:

$$۳x^۲+۴x-۴=۰ \xrightarrow{\times ۳} x^۲+۴x-۱۲=۰$$

گام دوم: عبارت حاصل را تجزیه کن:

$$(x+۶)(x-۲)=۰$$

گام سوم: ضریب $x^۲$ را در تجزیهٔ انجام‌شده برمی‌گردانیم، به این صورت که یکی از اعداد ثابت را تقسیم بر ۳ و ضریب x پرانتز دیگر را ۳ قرار می‌دهیم:

$$(x+\frac{۶}{۳})(۳x-۲)=۰ \Rightarrow (x+۲)(۳x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۲ \\ x=\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

تذکر: اگر با این تکنیک‌ها عبارت درجه‌دوم قابل تجزیه نبود، باید از روش کلی حل معادله برای محاسبهٔ ریشه‌ها استفاده کنید.

روش کلی حل معادلهٔ درجه‌دوم فرمول کلی حل معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲+bx+c=۰$ به صورت $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$ است که در آن $\Delta=b^۲-۴ac$ است.

مثال: معادلات درجه‌دوم زیر را حل کنید.

الف) $۳x^۲-۴x-۳=۰$ ب) $۲x^۲+۴x+۳=۰$

پاسخ: **الف** دلتای معادله برابر است با:

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۴)^۲-۴(۳)(-۳)=۱۶+۳۶=۵۲$$

پس جواب‌های معادله برابر است با:

$$۳x^۲-۴x-۳=۰\Rightarrow x=\frac{-(-۴)\pm\sqrt{۵۲}}{۲(۳)}=\frac{۴\pm۲\sqrt{۱۳}}{۶}\Rightarrow\begin{cases}x_۱=\dfrac{۴+۲\sqrt{۱۳}}{۶}=\dfrac{۲+\sqrt{۱۳}}{۳}\\ x_۲=\dfrac{۴-۲\sqrt{۱۳}}{۶}=\dfrac{۲-\sqrt{۱۳}}{۳}\end{cases}$$

ب

$$\Delta=b^۲-۴ac=۴^۲-۴(۲)(۳)=-۸<۰$$

چون دلتای معادله منفی شده، در تساوی $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$، زیر رادیکال منفی می‌شود. *رادیکالم هر چی زور میزنه! نمی‌تونه فروبی بده!* پس در این حالت معادله جواب حقیقی ندارد.

یادآوری: در حل معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲+bx+c=۰$ سه حالت زیر را داریم:

ریشه‌ها	ویژگی	شرط
$x_۱=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\ ,\ x_۲=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$	معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.	$\Delta>۰$
$x=\dfrac{-b}{۲a}$	معادله یک ریشهٔ مضاعف دارد.	$\Delta=۰$
ـــــ	معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.	$\Delta<۰$

تست: اگر $x=-۲$ یک جواب معادلهٔ $۴x^۲+kx-k=۷$ باشد، جواب دیگر معادله کدام است؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱/۷۵ ۳) ۱/۲۵- ۴) ۱/۷۵-

پاسخ ۱: $x=-۲$ یک ریشهٔ معادله است پس در آن صدق می‌کند:

$$۴(-۲)^۲+k(-۲)-k=۷\Rightarrow ۳k=۹\Rightarrow k=۳$$

$$\Rightarrow \text{معادله}: ۴x^۲+۳x-۳=۷\Rightarrow ۴x^۲+۳x-۱۰=۰$$

برای یافتن ریشهٔ دیگر معادله از روش کلی حل معادلهٔ درجه‌دوم استفاده می‌کنیم:

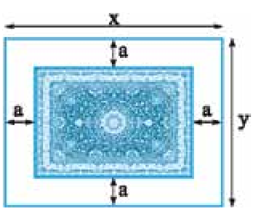
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۳\pm\sqrt{۹-۴(۴)(-۱۰)}}{۲(۴)}=\frac{-۳\pm\sqrt{۱۶۹}}{۸}\Rightarrow\begin{cases}x_۱=\dfrac{-۳+۱۳}{۸}=\dfrac{۵}{۴}=۱/۲۵\\ x_۲=\dfrac{-۳-۱۳}{۸}=-۲\end{cases}$$

گاهی وقت‌ها در حل یک مسئله به یک معادلهٔ درجه‌دوم می‌رسیم که باید با حل آن به جواب مسئله برسیم.

تست: فاصلهٔ هر طرف قالی از کنار دیوار یک اتاق مستطیل‌شکل، ثابت و یکسان است. اگر مساحت اتاق ۲۴ محیط اتاق ۲۰ و محیط قالی ۱۲ باشد، فاصلهٔ هر طرف قالی از کنار دیوار اتاق چه‌قدر است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

پاسخ ۲: شکل مسئله به صورت مقابل است:



با توجه به اندازه‌های روی شکل طول قالی $(x-۲a)$ و عرض آن $(y-۲a)$ است. مساحت اتاق برابر ۲۴ است، پس:

$$xy=۲۴\quad(*)$$

محیط اتاق هم برابر ۲۰ است:

$$۲(x+y)=۲۰\Rightarrow x+y=۱۰\Rightarrow y=۱۰-x$$

با جای‌گذاری تساوی $y=۱۰-x$ در $(*)$ طول و عرض اتاق را می‌یابیم:

$$x(۱۰-x)=۲۴\Rightarrow ۱۰x-x^۲=۲۴\Rightarrow x^۲-۱۰x+۲۴=۰\Rightarrow (x-۶)(x-۴)=۰\Rightarrow x=۶,۴$$

چون طول اتاق از عرض آن بیشتر است، پس طول اتاق برابر ۶ و عرض آن برابر ۴ است. حالا با توجه به این‌که محیط قالی برابر ۱۲ است، فاصلهٔ هر طرف قالی از کنار دیوار اتاق یعنی a را می‌یابیم:

$$۲((x-۲a)+(y-۲a))=۱۲\xrightarrow{x=۶,y=۴}۲(۶-۲a+۴-۲a)=۱۲\Rightarrow ۱۰-۴a=۶\Rightarrow ۴a=۴\Rightarrow a=۱$$

ریشهٔ مشترک دو معادلهٔ درجه‌دوم ریشهٔ مشترک دو معادله، ریشه‌ای است که در هر دو معادله صدق می‌کند. مثلاً در معادلات $x^2+2x-3=0$ و $x^2+x-6=0$، $x=-3$ ریشهٔ مشترک دو معادله است.

برای یافتن ریشهٔ مشترک دو معادله کافیست ابتدا همهٔ عبارت‌ها را در هر معادله به یک طرف ببریم و سپس دو عبارت درجه‌دوم را برابر قرار دهیم، به طوری که x^2ها حذف شوند؛ سپس معادلهٔ خطی حاصل را حل می‌کنیم. اگر جواب این معادله در معادلات صدق کند، ریشهٔ مشترک دو معادله است.

تذکر: اگر ضریب x^2 در معادله‌های درجه‌دوم یکسان نباشد، اول باید ضرایب را یکسان کنید.

تست: اگر $x=2+\sqrt{3}$ ریشهٔ مشترک معادلات $x^2+mx+3=0$ و $2x^2+2x+m=0$ باشد، **m** کدام است؟

۱) $\frac{6-2\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\frac{18+10\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{18-10\sqrt{3}}{3}$

پاسخ۴: معادلهٔ اول را در ۲ ضرب می‌کنیم تا ضریب x^2ها یکی شوند:

$$x^2+mx+3=0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2+2mx+6=0$$

حالا طرف چپ معادلات را برابر قرار می‌دهیم:

$$2x^2+2mx+6=2x^2+2x+m \Rightarrow 2mx+6=2x+m \Rightarrow (2m-2)x=m-6 \ (*)$$

چون ریشهٔ مشترک معادلات، $2+\sqrt{3}$ است، پس $x=2+\sqrt{3}$ در معادلهٔ (*) صدق می‌کند:

$$(2m-2)(2+\sqrt{3})=m-6 \Rightarrow (4+2\sqrt{3})m-4-2\sqrt{3}=m-6 \Rightarrow (3+2\sqrt{3})m=2\sqrt{3}-2$$

$$\Rightarrow m=\frac{(2\sqrt{3}-2)}{2\sqrt{3}+3} \overset{\text{گویا}}{=} \frac{(2\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}-3)}{12-9}=\frac{12-10\sqrt{3}+6}{3}=\frac{18-10\sqrt{3}}{3}$$

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم در حالتی که معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$ دو ریشه دارد، ریشه‌ها عبارت‌اند از:

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

پس روابط بین ریشه‌ها که سه حالت اساسی دارد، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

الف **مجموع ریشه‌ها** که با حرف **S** نمایش داده می‌شود، برابر است با:

$$\text{مجموع ریشه‌ها}=\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}}$$

ب **حاصل‌ضرب ریشه‌ها** که با حرف **P** نمایش داده می‌شود، برابر است با:

$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}=\alpha.\beta=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\frac{b^2-\Delta}{4a^2} \xrightarrow{\Delta=b^2-4ac} \alpha.\beta=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a} \Rightarrow \boxed{P=\alpha\beta=\frac{c}{a}}$$

پ **قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها** که با حرف **M** نمایش داده می‌شود برابر است با:

$$\text{قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها}=|\alpha-\beta|=\left|\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right|=\left|\frac{2\sqrt{\Delta}}{2a}\right|=\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow \boxed{M=|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}$$

تست: در معادلهٔ $(k+1)x^2+kx=2k-1$، حاصل‌ضرب ریشه‌ها نصف حاصل‌جمع آن‌ها است. **k** کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ۴: ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم:

$$\underbrace{(k+1)}_{a}x^2\underbrace{+k}_{b}x\underbrace{-2k+1}_{c}=0$$

بنابراین:

$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}=\frac{c}{a}=\frac{-2k+1}{k+1} \qquad \text{حاصل‌جمع ریشه‌ها}=-\frac{b}{a}=-\frac{k}{k+1}$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها نصف حاصل‌جمع آن‌ها است بنابراین:

$$\frac{-2k+1}{k+1}=\frac{1}{2}\left(-\frac{k}{k+1}\right) \xrightarrow{k+1\neq 0} -2k+1=\frac{1}{2}(-k) \Rightarrow -4k+2=-k \Rightarrow 3k=2 \Rightarrow k=\frac{2}{3}$$

تست: اگر ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-(a+1)x+2a=0$ دو عدد فرد طبیعی و متوالی باشند، آن‌گاه به ازای کدام مقدار **b** ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(a-1)x+b=0$ دو عدد زوج متوالی است؟ (مثل کنکور)

۱) ۱۲۰ ۲) ۸۰ ۳) ۴۸ ۴) ۲۴

پاسخ۳: چون ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-(a+1)x+2a=0$ دو عدد فرد متوالی است، پس فاصلهٔ آن‌ها برابر ۲ واحد است، در نتیجه:

$$|\alpha-\beta|=2 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=2 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{2}=2 \Rightarrow \Delta=16 \Rightarrow (a+1)^2-16a=16 \quad a^2+2a+1-16a=16 \Rightarrow a^2-14a-15=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} a=-1 \\ a=15 \end{cases}$$

اگر $a=-1$ باشد: معادله: $2x^2-2=0 \Rightarrow x=\pm 1$

پس یکی از ریشه‌ها -1 خواهد شد که طبیعی نیست؛ بنابراین $a=15$ قابل قبول است. این مقدار را در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم: $x^2-14x+b=0$

این معادله دارای دو ریشهٔ زوج متوالی است؛ پس با توجه به این‌که جمع ریشه‌ها برابر ۱۴ است، در نتیجه دو ریشه برابر ۶ و ۸ هستند؛ بنابراین:

$$\text{ضرب ریشه‌ها}=b \Rightarrow (8)(6)=b \Rightarrow b=48$$

در سایر مواردی که رابطهٔ بین ریشه‌ها را می‌خواهند، باید رابطه را به ترکیبی از P، S یا M تبدیل کنیم. در این موارد به حالت‌های زیر توجه کنید:

۱ در حالت‌های کسری معمولاً مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}$$

۲ در حالت‌هایی که α و β توان‌های یکسان دارند، معمولاً از اتحادها استفاده می‌کنیم:

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^3-3PS$$

همچنین با فرض $\alpha>\beta$ داریم:

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)=\underbrace{(\alpha-\beta)}_{M}(S^2-2P+P)=M(S^2-P)$$

دقت کنید اگر $\alpha<\beta$ باشد آن‌گاه:

$$\alpha^3-\beta^3=-M(S^2-P)$$

۳ در حالت‌هایی که α و β رادیکال دارند، معمولاً از توان‌رسانی استفاده می‌کنیم تا رادیکال‌ها حذف شوند:

$$A=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \Rightarrow A^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=S+2\sqrt{P} \Rightarrow A=\sqrt{S+2\sqrt{P}}$$

مثال: **اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-4x+1=0$ باشند، حاصل مقادیر زیر را محاسبه کنید.**

الف) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ ب) $\alpha^3+\beta^3$ پ) $|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}|$ ت) $|\alpha^2-\beta^2|$

پاسخ: در معادلهٔ $2x^2-4x+1=0$ داریم:

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-4}{2}=2 \\ P=\alpha.\beta=\frac{c}{a}=\frac{1}{2} \\ M=|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{16-4(2)}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2} \end{cases}$$

الف $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{S^2-2P}{P}=\frac{2^2-2(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}}=6$

ب $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^3-3PS=2^3-3(\frac{1}{2})(2)=5$

پ عبارت را برابر A قرار داده و طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A=|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}| \Rightarrow A^2=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}=S-2\sqrt{P}=2-2\sqrt{\frac{1}{2}}=2-2\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A=\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

ت $|\alpha^2-\beta^2|=|\alpha-\beta||\alpha+\beta|=M\times S=\sqrt{2}\times 2=2\sqrt{2}$

در حالتی که توان‌های α و β یکسان نیست، باید با کمک معادله توان‌های آن‌ها را یکسان کنیم و سپس رابطه را به ترکیبی از P، S و M تبدیل کنیم:

تست: **اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-6x+3=0$ باشند، حاصل $\alpha^2(2\beta-1)$ کدام است؟**

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ۴: توان‌های α و β یکسان نیست، بنابراین ابتدا باید توان‌ها را یکی کنیم. α ریشهٔ معادله است پس در معادله صدق می‌کند:

$$\text{معادله}: 2\alpha^2-6\alpha+3=0 \Rightarrow 2\alpha^2=6\alpha-3 \Rightarrow \alpha^2=\frac{6\alpha-3}{2}$$

پس در عبارت $\alpha^2(2\beta-1)$ داریم:

$$\text{عبارت}=\frac{6\alpha-3}{2}(2\beta-1)=\frac{12\alpha\beta-6\beta-6\alpha+3}{2}=\frac{12\alpha\beta-6(\beta+\alpha)+3}{2}=\frac{12P-6S+3}{2} \quad (*)$$

حالا مقادیر S و P را از معادلهٔ $2x^2-6x+3=0$ می‌یابیم:

$$2x^2-6x+3=0 \Rightarrow \begin{cases} S=-\frac{b}{a}=-\frac{-6}{2}=3 \\ P=\frac{c}{a}=\frac{3}{2} \end{cases} \xrightarrow{(*)} \text{عبارت}=\frac{12(\frac{3}{2})-6(3)+3}{2}=\frac{3}{2}$$

می‌توانید به صورت زیر هم عمل کنید:

$\beta: 2\beta^2-6\beta+3=0 \Rightarrow 6\beta-3=2\beta^2 \xrightarrow{\div 3} 2\beta-1=\frac{2\beta^2}{3} \quad (**)$ ریشهٔ معادله است

حالا حاصل عبارت $\alpha^2(2\beta-1)$ را می‌یابیم:

$\xrightarrow{(**)}$ عبارت $=\alpha^2(\frac{2\beta^2}{3})=\frac{2\alpha^2\beta^2}{3}=\frac{2P^2}{3}\overset{P=\frac{3}{2}}{=\!=}\frac{2(\frac{3}{2})^2}{3}=\frac{2(\frac{9}{4})}{3}=\frac{3}{2}$

حالا بعضی وقت‌ها هست که توان‌ها یکسان‌اند ولی ضرایب نابرابرند. در این حالت مطابق تست زیر عمل کنید:

تست: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2+2x-2=0$ باشند که $x_1>x_2$، حاصل $3x_1^2+x_2^2$ کدام است؟

۱) $8+4\sqrt{3}$ ۲) $8-4\sqrt{3}$ ۳) $16+4\sqrt{3}$ ۴) $16-4\sqrt{3}$

پاسخ۴: *وقتی ریشه‌ها توان یکسان دارن اما ضرایبشون با هم فرق داره باید این‌طوری بریم جلو!*

$$3x_1^2+x_2^2=(\frac{\text{جمع ضرایب}}{2})(x_1^2+x_2^2)+(\frac{\text{تفاضل ضرایب}}{2})(x_1^2-x_2^2) \Rightarrow 3x_1^2+x_2^2=(\frac{3+1}{2})(x_1^2+x_2^2)+(\frac{3-1}{2})(x_1^2-x_2^2)$$

$$\Rightarrow 3x_1^2+x_2^2=2(x_1^2+x_2^2)+(x_1^2-x_2^2)=2(x_1^2+x_2^2)+(x_1-x_2)(x_1+x_2)$$

$x_1>x_2$ است پس $x_1-x_2>0$، در نتیجه: $x_1-x_2=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

$x_1^2+x_2^2$ که S^2-2P و x_1+x_2 هم که S است، پس: عبارت $=2(S^2-2P)+\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}(S)$

S، P، a و Δ باید از معادله محاسبه شود:

$$x^2+2x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} S=-2\,,\,P=-2 \\ a=1\,,\,\Delta=12 \end{cases} \Rightarrow \text{عبارت}=2((-2)^2-2(-2))+\frac{\sqrt{12}}{1}(-2)=2(4+4)+2\sqrt{3}(-2)=16-4\sqrt{3}$$

نکته: در معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$:

۱ اگر $a+b+c=0$، آن‌گاه یک جواب معادله ۱ و جواب دیگر $\frac{c}{a}$ است.

۲ اگر $a+c=b$، آن‌گاه یک جواب معادله -1 و جواب دیگر $-\frac{c}{a}$ است.

تست: اگر $\alpha=1$ یک ریشهٔ معادلهٔ $3x^2-ax-5=0$ باشد، ریشهٔ دیگر کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $-\frac{5}{3}$

پاسخ۴: **روش۱** چون یک جواب معادله $\alpha=1$ است، جواب دیگر $\frac{c}{a}$ است. پس: ریشهٔ دیگر $=\frac{-5}{3}=-\frac{5}{3}$

روش۲ $\alpha=1$ یک جواب معادله است. از طرفی: حاصل‌ضرب ریشه‌ها: $P=\alpha.\beta=\frac{c}{a} \Rightarrow (1)\beta=\frac{-5}{3} \Rightarrow \beta=-\frac{5}{3}$

تست: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $\sqrt{2}x^2+(\sqrt{2}-1)x=1$ باشند، حاصل $\frac{x_2^2}{x_2^2+1}+\frac{x_1^2}{x_1^2+1}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{7}{6}$ ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ۲: اول معادله را مرتب می‌کنیم: $\underbrace{\sqrt{2}}_{a}x^2+\underbrace{(\sqrt{2}-1)}_{b}x\underbrace{-1}_{c}=0$

با توجه به معادله، $a+c=b$ است، پس یک ریشهٔ معادله برابر -1 و ریشهٔ دیگر برابر $\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{c}{a}$ است. در نتیجه:

$$\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2+1}+\frac{x_2^2}{x_2^2+1}=\frac{1}{1+1}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

بعضی وقت‌ها رابطهٔ داده‌شده فقط برحسب یکی از ریشه‌ها است. در این حالت باید با کمک جمع ریشه‌ها یا ضرب ریشه‌ها، رابطهٔ داده‌شده را برحسب دو ریشه بنویسیم و سپس آن را برحسب S، P، M نوشته و حاصل را محاسبه کنیم.

تست: اگر α ریشهٔ معادلهٔ $2x^2 + x = 2$ باشد، حاصل $\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3}$ کدام است؟

۱) $\frac{15}{8}$ ۲) $-\frac{15}{8}$ ۳) $\frac{13}{8}$ ۴) $-\frac{13}{8}$

پاسخ۳: رابطهٔ خواسته‌شده فقط برحسب یکی از ریشه‌هاست پس نمی‌توانیم آن را برحسب S و P بنویسیم. در این حالت از جمع یا ضرب ریشه‌ها کمک می‌گیریم:

$$\text{معادله}: 2x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2} - \alpha \\ P = \alpha\beta = -1 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

اگر خوب دقت کنید متوجه میشید که رابطهٔ ضرب ریشه‌ها یک جورایی با $\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3}$ رابطه دارد نگاه کن!

$$\beta = -\frac{1}{\alpha} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}} \beta^3 = -\frac{1}{\alpha^3} \Rightarrow \frac{1}{\alpha^3} = -\beta^3$$

حالا این رابطه را در $\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3}$ جای‌گذاری می‌کنیم و حاصل را می‌یابیم:

$$\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3} = \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS = (-\frac{1}{2})^3 - 3(-1)(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8} - \frac{3}{2} = \frac{-1-12}{8} = -\frac{13}{8}$$

در برخی سؤالات هم دیده شده که مقدار رابطه بین ریشه‌ها را می‌دهند و در عوض از ما می‌خواهند یکی از ضرایب معادلهٔ درجه‌دوم را که مجهول است محاسبه کنیم. این مسائل در دو تیپ قابل بررسی هستند.

تست: به ازای کدام مجموعه مقادیر m مجموع معکوس مربعات ریشه‌های $x^2 + (3m+1)x + m + 1 = 0$ برابر ۳ است؟

۱) ۱ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) ۱ و $-\frac{2}{3}$ ۴) $\varnothing$

پاسخ۱: مجموع معکوس مربعات ریشه‌ها برابر ۳ است؛ یعنی:

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = 3 \Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = 3 \Rightarrow \frac{S^2 - 2P}{P^2} = 3 \quad (*)$$

با توجه به معادلهٔ $x^2 + (3m+1)x + m + 1 = 0$ داریم:

$$S = -(3m+1), \ P = m+1$$

در نتیجه:

$$\xrightarrow{(*)} \frac{(-(3m+1))^2 - 2(m+1)}{(m+1)^2} = 3 \Rightarrow \frac{9m^2 + 6m + 1 - 2m - 2}{m^2 + 2m + 1} = 3 \Rightarrow 9m^2 + 4m - 1 = 3m^2 + 6m + 3$$

$$\Rightarrow 6m^2 - 2m - 4 = 0 \xrightarrow{\div 2} 3m^2 - m - 2 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب} = 0} \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{c}{a} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

اما به ازای $m = -\frac{2}{3}$ معادله به صورت $x^2 - x + \frac{1}{3} = 0$ تبدیل می‌شود و با توجه به این‌که دلتای این معادله منفی است، بنابراین معادله ریشهٔ حقیقی نخواهد داشت. در نتیجه تنها $m = 1$ قابل قبول است.

تست: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2 - 6x + a = 0$ باشند و $2\alpha^2 + \beta^2 - 3\alpha = 5$ باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{7}{3}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

پاسخ۲: رابطهٔ بین ریشه‌ها را به فرم بهتری تبدیل می‌کنیم که بتوانیم آن را برحسب S و P بنویسیم:

$$2\alpha^2 + \beta^2 - 3\alpha = 5 \Rightarrow \alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 3\alpha = 5 \Rightarrow (\alpha^2 - 3\alpha) + (\alpha^2 + \beta^2) = 5 \ (*)$$

$x = \alpha$ ریشهٔ معادلهٔ $2x^2 - 6x + a = 0$ است؛ پس در معادله صدق می‌کند. با توجه به معادله، داریم:

$$2\alpha^2 - 6\alpha + a = 0 \Rightarrow 2\alpha^2 - 6\alpha = -a \Rightarrow \alpha^2 - 3\alpha = -\frac{a}{2}$$

حالا می‌توانیم در معادلهٔ $(*)$ به $\alpha^2 + \beta^2$ بنویسیم $S^2 - 2P$ و به جای $\alpha^2 - 3\alpha$ بنویسیم $-\frac{a}{2}$:

$$-\frac{a}{2} + S^2 - 2P = 5 \ (**)$$

با توجه به معادله، S و P را می‌یابیم:

$$2x^2 - 6x + a = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = 3 \\ P = \frac{a}{2} \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\xrightarrow{(**)} -\frac{a}{2} + 9 - 2(\frac{a}{2}) = 5 \Rightarrow -\frac{3a}{2} = -4 \Rightarrow a = \frac{8}{3}$$

تست: به ازای کدام مقدار m یکی از ریشه‌های معادلهٔ $2x^2 - 5x + m = 0$ از دو برابر ریشهٔ دیگر ۷ واحد بیشتر است؟ (مثل کنکور)

۱) -4 ۲) -6 ۳) -8 ۴) -12

پاسخ۴: یکی از ریشه‌ها (α) از دو برابر دیگری (β)، ۷ واحد بیشتر است، پس:

$$\alpha = 2\beta + 7 \quad (*)$$

این رابطه بر حسب S و P قابل نوشتن نیست. در این جور مواقع به معادله رجوع می‌کنیم. با توجه به معادله، مقدار مجموع ریشه‌ها را داریم:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2} \xrightarrow{(*)} 2\beta + 7 + \beta = \frac{5}{2} \Rightarrow 3\beta = -\frac{9}{2} \Rightarrow \beta = -\frac{3}{2} \xrightarrow{(*)} \alpha = 2(-\frac{3}{2}) + 7 = 4$$

حالا با توجه به معادله برای محاسبهٔ مقدار m از حاصل‌ضرب ریشه‌ها استفاده می‌کنیم: $P=\alpha\beta=\frac{m}{2}\Rightarrow (4)(-\frac{3}{2})=\frac{m}{2}\Rightarrow m=-12$

تست: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(a^2+2a-4)x+a^3=0$ باشند، به طوری که $x_1=\sqrt{x_2}$، آن‌گاه حاصل $x_1+\frac{x_2}{a-2}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

پاسخ ۱: مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $\underset{A}{\underbrace{1}}x^2\underset{B}{\underbrace{-(a^2+2a-4)}}x+\underset{C}{\underbrace{a^3}}=0$ را می‌نویسیم: $S=\frac{-B}{A}=a^2+2a-4\,,\,P=\frac{C}{A}=a^3$

از رابطهٔ بین ریشه‌ها یعنی $x_1=\sqrt{x_2}$ نتیجه می‌گیریم $x_1^2=x_2$ (و هر دو ریشه مثبت‌اند)؛ پس ریشه‌ها را x_1 و x_1^2 می‌گیریم.

از P کمک می‌گیریم. $x_1.x_1^2=a^3\Rightarrow x_1^3=a^3\Rightarrow x_1=a$

پس ریشه‌های معادله a و a^2 هستند.

حالا سراغ S می‌رویم. مجموع a و a^2 (یعنی ریشه‌ها) برابر با S یعنی a^2+2a-4 است: $a+\cancel{a^2}=\cancel{a^2}+2a-4\Rightarrow a=4$

پس با توجه به مقدار a، ریشه‌ها برابرند با: $\begin{cases}x_1=a=4\\x_2=a^2=4^2=16\end{cases}$

در نتیجه: $x_1+\frac{x_2}{a-2}=4+\frac{16}{4-2}=4+8=12$

تعیین علامت ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم

در حالتی که $\Delta>0$، معادلهٔ درجه‌دوم دو ریشه دارد. می‌توانیم بدون محاسبهٔ ریشه‌ها در مورد علامت آن‌ها بحث کنیم:

$\Delta>0\Rightarrow$ معادله دو ریشهٔ حقیقی و متمایز دارد $\Rightarrow$

- $\frac{c}{a}>0$: دو ریشه با علامت‌های یکسان دارد $\Rightarrow$
  - $\frac{-b}{a}>0$: دو ریشهٔ مثبت
  - $\frac{-b}{a}<0$: دو ریشهٔ منفی
- $\frac{c}{a}<0$: دو ریشه با علامت‌های مخالف دارد $\Rightarrow$
  - $-\frac{b}{a}>0$: ریشهٔ مثبت < |ریشهٔ منفی|
  - $-\frac{b}{a}<0$: ریشهٔ مثبت > |ریشهٔ منفی|

نکته: در حالتی‌که $\Delta=0$ است، معادله یک ریشهٔ مضاعف به صورت $x=-\frac{b}{2a}$ دارد.

مثال: در مورد علامت جواب‌های معادلهٔ $3x^2+4x-\sqrt{2}=0$ نظر دهید.

پاسخ: اول باید Δ محاسبه شود: $\Delta=b^2-4ac=16+4(\sqrt{2})(3)>0$

پس معادله دو ریشه دارد. از طرفی: $\frac{c}{a}=\frac{-\sqrt{2}}{3}<0$ پس معادله دو ریشهٔ با علامت‌های مخالف دارد. هم‌چنین: $-\frac{b}{a}=-\frac{4}{3}<0$

در نتیجه ریشهٔ مثبت از قدرمطلق ریشهٔ منفی کوچک‌تر است.

نکته: وقتی $\frac{c}{a}<0$ (یا $ac<0$) به‌طور قطع $\Delta>0$ است.

تعیین نوع ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم

برای تعیین نوع ریشه‌ها می‌توانید از جدول زیر کمک بگیرید:

شرایط Δ، $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$	نوع ریشه(ها)
$\Delta=0$ و $-\frac{b}{a}>0$	یک ریشهٔ مضاعف مثبت
$\Delta=0$ و $-\frac{b}{a}<0$	یک ریشهٔ مضاعف منفی
(چون جمع ریشه‌ها صفر است) $b=0$ و $\Delta>0$ (یا $ac<0$)	دو ریشهٔ قرینهٔ هم (α و $-\alpha$)
(چون ضرب ریشه‌ها یک است) $a=c$ و $\Delta>0$	دو ریشهٔ معکوس هم (α و $\frac{1}{\alpha}$)

تست: به ازای کدام مقدار m معادلهٔ $2x^2-x+m-1=0$ دو ریشهٔ حقیقی معکوس هم دارد؟

۱) ۳ ۲) -1 ۳) -2 ۴) هیچ مقدار m

پاسخ ۴: طبق جدول باید دو شرط $\Delta>0$ و $a=c$ برقرار باشد: $a=c\Rightarrow m-1=2\Rightarrow m=3$

با قراردادن $m=3$ در معادله، معادله به صورت $2x^2-x+2=0$ خواهد شد. چون دلتای معادله منفی است، پس $m=3$ قابل‌قبول نیست. در نتیجه هیچ مقداری برای m وجود ندارد.

معادلات درجه‌سوم با یک عامل $(x-a)$ تا این‌جا در مورد حل معادلات درجه‌دوم مفصل حرف زدیم. حالا می‌خواهیم *یک کوچولو!* در مورد حل معادلات درجه‌سوم هم بحث کنیم. قبل از شروع بحث اول به نکتهٔ زیر توجه کنید:

نکته: اگر $x=a$ یک ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=0$ باشد، آن‌گاه $f(x)$ یک عامل $(x-a)$ دارد و $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

به عنوان مثال $x=1$ یک ریشهٔ معادلهٔ $x^3-3x+2=0$ است. پس x^3-3x+2 یک عامل $(x-1)$ دارد. پس با تقسیم x^3-3x+2 بر $x-1$ آن را تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x+2 & x-1 \\ \cline{2-2} -(x^3-x^2) & x^2+x-2 \\ \cline{1-1} x^2-3x & \\ -(x^2-x) & \\ \cline{1-1} -2x+2 & \\ -(-2x+2) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \quad \Rightarrow x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)$$

حالا اگر قرار باشد سایر ریشه‌های معادله را هم بیابیم باید ریشه‌های معادلهٔ $x^2+x-2=0$ را محاسبه کنیم:
$$x^2+x-2=0 \Rightarrow (x-1)(x+2)=0 \Rightarrow x=1\ ,\ x=-2$$

بنابراین معادله $x^3-3x+2=0$ دارای دو ریشهٔ ۱ و -2 است.

تست: اگر $x=2$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $x^3+ax+2=0$ باشد، کوچک‌ترین ریشهٔ معادله کدام است؟

۱) $-2-\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}-1$ ۳) $-1-\sqrt{2}$ ۴) $2-\sqrt{2}$

پاسخ۳: چون ۲ یکی از ریشه‌های معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$(2)^3+a(2)+2=0 \Rightarrow a=-5 \Rightarrow \text{معادله}: x^3-5x+2=0$$

چون $x=2$ یک جواب معادله است، پس عبارت $P(x)=x^3-5x+2$ یک عامل $x-2$ دارد. پس با تقسیم $P(x)$ بر $x-2$ خواهیم داشت:

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x+2 & x-2 \\ \cline{2-2} -(x^3-2x^2) & x^2+2x-1 \\ \cline{1-1} 2x^2-5x & \\ -(2x^2-4x) & \\ \cline{1-1} -x+2 & \\ -(-x+2) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3-5x+2=(x-2)(x^2+2x-1) \xrightarrow{P(x)=0} (x-2)(x^2+2x-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x_1=2 \\ x^2+2x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{8}}{2} \end{cases}$$

پس جواب‌های دیگر معادله برابرند با:
$$x=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x_2=-1+\sqrt{2} \\ x_3=-1-\sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین $x_3=-1-\sqrt{2}$ کوچک‌ترین ریشهٔ معادله است.

نکته: در معادلهٔ درجه‌سوم $ax^3+bx^2+cx+d=0$:

۱ اگر $a+b+c+d=0$، آن‌گاه یک ریشهٔ ۱ است. پس عبارت درجه سوم یک عامل $x-1$ دارد.

۲ اگر $a+c=b+d$، آن‌گاه یک ریشهٔ -1 است. پس عبارت درجه سوم یک عامل $x+1$ دارد.

۳ معمولاً یکی از ریشه‌های معادله ۱ یا -1 یا ۲ یا -2 است، که با امتحان صدق‌کردن آن‌ها در معادله می‌توانید آن را بیابید.

۴ اگر معادله سه ریشهٔ حقیقی داشته باشد آن‌گاه مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $-\frac{d}{a}$ است.

تست: معادلهٔ $x^3-2x^2-5x-2=0$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ۳:

$$\underbrace{\overbrace{1x^3-2x^2}^{\text{جمع}=-4}-5x}_{\text{جمع}=-4}-2=0 \xrightarrow{a+c=b+d} \text{یک ریشه معادله } -1 \text{ است.}$$

برای محاسبهٔ سایر ریشه‌ها عبارت x^3-2x^2-5x-2 را بر $x+1$ تقسیم می‌کنیم که پس از تقسیم داریم:

$$x^3-2x^2-5x-2=(x+1)(x^2-3x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x^2-3x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

بنابراین معادله سه ریشهٔ حقیقی دارد.

نوشتن معادلهٔ درجه‌دوم با داشتن مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها فرض کنید ریشه‌های یک معادلهٔ درجه‌دوم α و β باشد، در این صورت معادله به صورت روبه‌رو خواهد بود.

$$\text{معادله}: (x-\alpha)(x-\beta)=0 \Rightarrow x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta=0 \Rightarrow x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

از آن‌جا که $\alpha+\beta=S$ و $\alpha\beta=P$ پس این معادله به صورت مقابل قابل نوشتن است:

$$\text{معادله}: x^2-Sx+P=0$$

نکته: معادلهٔ درجه‌دومی که مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن به ترتیب برابر S و P است به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ می‌باشد.

تست: اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + ax + b = 0$ برابر $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$ و $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) $-1/5$ ۲) $1/5$ ۳) $-2/5$ ۴) $2/5$

پاسخ۳: طبق نکتهٔ بالا معادله‌ای که ریشه‌های آن $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$ و $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$ است برابر است با:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{3-\sqrt{7}}{2} \\ \beta = \frac{3+\sqrt{7}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha+\beta = \frac{6}{2} = 3 \\ P = \alpha\beta = \frac{9-7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{معادله: } x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a+b = -3 + \frac{1}{2} = -2/5$$

نکته: اگر ضرایب معادلهٔ درجه‌دوم، گویا باشند و یک ریشه $a+\sqrt{b}$ باشد، ریشهٔ دیگر $a-\sqrt{b}$ است.

پس در تست بالا اگر طراح می‌گفت ضرایب گویا هستند، با داشتن فقط یکی از ریشه‌ها (مثلاً $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$) مشخص می‌شد که ریشهٔ دیگر $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$ است.

تست: یکی از ریشه‌های معادلهٔ $2x^2 + ax + b = 0$، $\sqrt{3}-1$ است. ریشهٔ بزرگ‌تر معادلهٔ $x^2 + \frac{a}{2}x + b + 1 = 0$ کدام است؟ $(a,b \in Q)$

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $1+\sqrt{2}$ ۴) $1+\sqrt{3}$

پاسخ۲: چون یکی از ریشه‌های معادله، $\sqrt{3}-1$ است و ضرایب معادله گویا هستند، پس ریشهٔ دیگر $-\sqrt{3}-1$ است و در نتیجه:

$$\begin{cases} S = (\sqrt{3}-1) + (-\sqrt{3}-1) = -2 \\ P = (\sqrt{3}-1)(-\sqrt{3}-1) = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{معادله: } x^2 + 2x - 2 = 0 \ (*)$$

اما چون در معادلهٔ داده‌شده ضریب x^2، برابر ۲ است، پس طرفین (*) را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \end{cases}$$

حالا معادلهٔ $x^2 + \frac{a}{2}x + b + 1 = 0$ را با توجه به مقادیر a و b، حل می‌کنیم:

$$\Rightarrow x^2 + \frac{4}{2}x - 4 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 4 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

پس ریشهٔ بزرگ‌تر معادله، $x = 1$ است.

در آخر هم یک مثال کاربردی ببینیم و تمام!

تست: محیط مستطیلی ۲۲ متر و مساحت آن ۲۴ متر مربع است. طول مستطیل چه‌قدر از عرض آن بیشتر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ۴: اگر طول مستطیل را x_1 و عرض آن را x_2 در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$$\text{محیط مستطیل} = 22 \Rightarrow 2(x_1 + x_2) = 22 \Rightarrow x_1 + x_2 = 11$$

$$\text{مساحت مستطیل} = 24 \Rightarrow x_1 x_2 = 24$$

برای محاسبهٔ x_1 و x_2 با توجه به تساوی‌های بالا می‌توانیم یک معادلهٔ درجه‌دوم با ریشه‌های x_1 و x_2 در نظر بگیریم. در این صورت:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 11 \\ P = x_1 x_2 = 24 \end{cases} \xrightarrow{x^2 - Sx + P = 0} \text{معادله: } x^2 - 11x + 24 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-8) = 0 \Rightarrow x = 3, 8$$

پس طول مستطیل برابر ۸ و عرض آن برابر ۳ است پس طول مستطیل ۵ واحد بیشتر از عرض آن است.

تشکیل معادلهٔ درجه‌دوم جدید

گاهی وقتا یه معادله میدن بعد میگن یه معادله‌ای بنویسید که با ریشه‌های معادلهٔ اولیه رابطهٔ خاصی! داشته باشه. برای این کار با یک مثال صفر تا صدشو بررسی می‌کنیم.

فرض کنید α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 6x + 3 = 0$ باشند و بخواهیم معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌های آن به صورت $\frac{2}{\beta}$ و $\frac{2}{\alpha}$ باشند.

یک روش این است که مجموع (S') و حاصل‌ضرب (P') ریشه‌های معادلهٔ جدید را بیابیم و سپس با توجه به رابطهٔ $x^2 - Sx + P = 0$ معادله را بنویسیم:

$$\begin{cases} S' = \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{2\beta + 2\alpha}{\alpha\beta} = \frac{2(\beta+\alpha)}{\alpha\beta} \\ P' = (\frac{2}{\alpha})(\frac{2}{\beta}) = \frac{4}{\alpha\beta} \end{cases} \quad (*)$$

α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-6x+3=0$ هستند، پس:

$$x^2-6x+3=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=6\\ \alpha\beta=3\end{cases} \xrightarrow{(*)} \begin{cases}S'=\frac{2(6)}{3}=4\\ P'=\frac{4}{3}\end{cases}$$

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید را داریم. پس معادلهٔ جدید برابر است با: $x^2-4x+\frac{4}{3}=0 \xrightarrow{(\times 3)} 3x^2-12x+4=0$:معادله

یک روش هم این است که ریشهٔ معادلهٔ اولیه را x و ریشهٔ معادلهٔ جدید را X در نظر بگیریم. با توجه به رابطهٔ بین ریشه‌ها داریم: $X=\frac{2}{x} \Rightarrow x=\frac{2}{X}$

با جای‌گذاری این تساوی در معادلهٔ داده‌شده یعنی $x^2-6x+3=0$، معادلهٔ جدید را پیدا می‌کنیم:

معادلهٔ جدید: $(\frac{2}{X})^2-6(\frac{2}{X})+3=0 \Rightarrow \frac{4}{X^2}-\frac{12}{X}+3=0 \xrightarrow{(\times X^2)} 4-12X+3X^2=0 \Rightarrow 3x^2-12x+4=0$

تست: اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^2+ax+b=0$، از مکعب ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x+2=0$ یک واحد بیشتر باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ۳: ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x+2=0$ را α و β در نظر می‌گیریم، پس: $S=\alpha+\beta=5\,,\,P=\alpha\beta=2$

چون ریشه‌های معادلهٔ جدید از مکعب ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x+2=0$ یک واحد بیشتر است، پس این ریشه‌ها را به صورت α^3+1 و β^3+1 در نظر می‌گیریم. مجموع و حاصل‌ضرب این ریشه‌ها برابر است با:

$$\begin{cases}S'=(\alpha^3+1)+(\beta^3+1)=\alpha^3+\beta^3+2=S^3-3PS+2=5^3-3(2)(5)+2=97\\ P'=(\alpha^3+1)(\beta^3+1)=\underbrace{\alpha^3\beta^3}+\underbrace{\alpha^3+\beta^3}+1=P^3+S^3-3PS+1=2^3+5^3-3(2)(5)+1=104\end{cases} \Rightarrow \text{معادله}: x^2\underbrace{-97}_{a}x+\underbrace{104}_{b}=0 \Rightarrow a+b=7$$

تست: ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-ax+b=0$ نیم واحد از ریشه‌های معادلهٔ $2ax^2+ax-6=0$ بیشتر است. مقدار $[\frac{ab}{4}]$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -3 ۳) -2 ۴) -1

پاسخ۳: ریشه‌های معادلهٔ $2ax^2+ax-6=0$ را α و β در نظر می‌گیریم؛ بنابراین:

$$\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\frac{1}{2}\ (*)\\ P=\alpha\beta=\frac{-3}{a}\ (**)\end{cases}$$

با توجه به رابطهٔ ریشه‌های دو معادله، ریشه‌های $2x^2-ax+b=0$، $\alpha+\frac{1}{2}$ و $\beta+\frac{1}{2}$ خواهد بود. مجموع و حاصل‌ضرب این ریشه‌ها را می‌یابیم:

$$S'=(\alpha+\frac{1}{2})+(\beta+\frac{1}{2}) \Rightarrow \frac{a}{2}=\alpha+\beta+1 \xrightarrow{(*)} \frac{a}{2}=-\frac{1}{2}+1 \Rightarrow a=1$$

$$P'=(\alpha+\frac{1}{2})(\beta+\frac{1}{2}) \Rightarrow \frac{b}{2}=\alpha\beta+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\frac{1}{4} \xrightarrow{(*),(**)} \frac{b}{2}=\frac{-3}{a}+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})+\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{b}{2}=\frac{-3}{a} \xrightarrow{a=1} b=-6$$

در نتیجه: $[\frac{ab}{4}]=[\frac{(1)(-6)}{4}]=-2$

حل معادله با تغییر متغیر

معادلاتی هم هستند که با کمک تغییر متغیر مناسب، به یک معادلهٔ درجه‌دوم تبدیل می‌شوند. برای حل این نوع معادلات، اول از یک تغییر متغیر مناسب استفاده می‌کنیم و معادلهٔ درجه‌دوم حاصل را حل می‌کنیم، بعد متغیر اولیه را برمی‌گردانیم و جواب‌های معادلهٔ اصلی را پیدا می‌کنیم.

تست: معادلهٔ $(x^2-1)^2-(x^2-1)-12=0$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ۲: با تغییر متغیر $x^2-1=t$ معادله را به یک معادلهٔ درجه‌دوم تبدیل می‌کنیم:

$$\text{معادله}: t^2-t-12=0 \Rightarrow (t-4)(t+3)=0 \Rightarrow \begin{cases}t=4 \xrightarrow{x^2-1=t} x^2-1=4\\ t=-3 \xrightarrow{x^2-1=t} x^2-1=-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2=5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}\\ x^2-1=-3 \Rightarrow x^2=-2\ \text{(جواب‌ندارد)}\end{cases}$$

مثال: تعداد و علامت جواب‌های معادلهٔ $x^4-6x^2-2=0$ را (بدون یافتن جواب‌ها) بیابید.

پاسخ: از تغییر متغیر $x^2=t$ استفاده می‌کنیم: $t^2-6t-2=0$:معادلهٔ جدید

در معادلهٔ جدید، $\Delta>0$ و $\frac{c}{a}<0$ است، پس معادله دو ریشه با علامت‌های مخالف دارد. یعنی برای مثال دو ریشهٔ $t_1>0$ و $t_2<0$.

در نتیجه:

$$\begin{cases}x^2=t_1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{t_1}\\ x^2=t_2\ \ \text{(منفی است و } x^2 \text{ هیچ‌وقت منفی نمی‌شود) جواب ندارد } t_2\end{cases}$$

پس معادله دو جواب قرینهٔ هم دارد.

تست: به ازای کدام مقادیر m معادلهٔ $mx^4-(2m-1)x^2+m+1=0$ چهار ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) $(-\frac{1}{2},0)$ ۲) $(-\infty,-\frac{1}{2})$ ۳) $(1,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-1)$

پاسخ۴: با فرض $x^2=t$ داریم: $mt^2-(2m-1)t+m+1=0 \quad (*)$: معادله

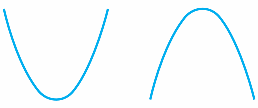
برای این‌که معادلهٔ اصلی چهار ریشهٔ حقیقی داشته باشد، باید معادلهٔ $(*)$ دو ریشهٔ مثبت داشته باشد. (فرض کنید ریشه‌ها $t_1, t_2>0$ باشند در این صورت ریشه‌های معادلهٔ اصلی $x=\pm\sqrt{t_1}$ و $x=\pm\sqrt{t_2}$ هستند.) برای این‌که معادلهٔ $(*)$ دو ریشهٔ مثبت داشته باشد باید:

$$\begin{cases}\Delta>0 \Rightarrow (-(2m-1))^2-4(m)(m+1)>0 \Rightarrow 4m^2-4m+1-4m^2-4m>0 \Rightarrow 8m<1 \Rightarrow m<\frac{1}{8} & (1)\\ \frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{m+1}{m}>0 \Rightarrow m>0 \text{ یا } m<-1 & (2)\\ -\frac{b}{a}>0 \Rightarrow -\frac{-(2m-1)}{m}>0 \Rightarrow \frac{2m-1}{m}>0 \Rightarrow m<0 \text{ یا } m>\frac{1}{2} & (3)\end{cases}$$

از اشتراک سه جواب (۱)، (۲) و (۳) داریم: m حدود $=(-\infty,-1)$

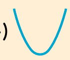
تابع درجه‌دوم

در این بخش قرار است به عبارت درجه‌دوم به چشم یک تابع نگاه کنیم. یک تابع درجه‌دوم به فرم کلی $f(x)=ax^2+bx+c$ نمایش داده می‌شود. تمام ویژگی‌های این تابع را از لحاظ نموداری هم بررسی می‌کنیم تا درک مطلب آن آسان‌تر باشد.
در حالت کلی نمودار یک تابع درجه‌دوم به یکی از دو صورت مقابل است:



(۱) (۲)

حالا از کجا بفهمیم کدام نمودار برای چه حالتی است؟ ...! *طرز سؤال پرسیدنو داشته باش تمام کلمه‌های پرسشی رو داشت!* در نکتهٔ زیر جواب این سؤال را می‌دهیم:

نکته: *اگر در تابع درجه‌دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ ، $a>0$ (a همواره ضریب x^2 است.) باشد، دهانهٔ نمودار رو به بالا (شکل (۱)) و اگر $a<0$ باشد، دهانهٔ نمودار رو به پایین (شکل (۲)) است.*
برای مثال نمودار تابع $f(x)=x^2$ به صورت  *(چون $a=1>0$) و نمودار تابع $f(x)=x-x^2$ به صورت*  *است (چون $a=-1<0$).*

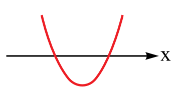
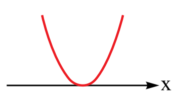
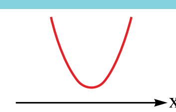
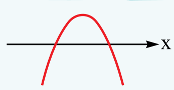
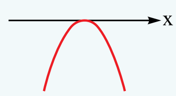
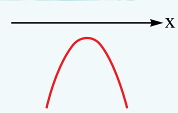
صفرهای (ریشه‌های) تابع درجه‌دوم

در توضیحات بالا نمودار تابع درجه‌دوم را بدون محورهای مختصات بررسی کردیم. حالا می‌خواهیم کم‌کم محورهای مختصات را هم وارد گود کنیم! اول با محور xها شروع می‌کنیم. وقتی پای محور xها به میون میاد! بحث صفرهای تابع مطرح میشه!

صفرهای تابع نقاطی روی تابع هستند که مقدارشان صفر است. یعنی xهایی که مقدار $f(x)$ را صفر می‌کنند. به لحاظ نموداری هم، یعنی طول‌هایی که نمودار تابع، محور xها را قطع می‌کند.
برای پیداکردن صفرهای تابع باید معادلهٔ $f(x)=0$ را حل کنیم. پس حالت‌های زیر می‌توانند رخ دهند:

$f(x)=ax^2+bx+c=0 \Rightarrow$
- $\boxed{1}$ $\Delta>0 \Rightarrow$ معادله دو ریشه دارد. $\Leftarrow$ صفرهای تابع دوتا است. $\Leftarrow$ تابع در دو نقطه محور xها را قطع می‌کند.
- $\boxed{2}$ $\Delta=0 \Rightarrow$ معادله یک ریشه دارد. $\Leftarrow$ صفرهای تابع یکی است. $\Leftarrow$ تابع در یک نقطه بر محور xها مماس است.
- $\boxed{3}$ $\Delta<0 \Rightarrow$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد. $\Leftarrow$ تابع صفر نمی‌شود. $\Leftarrow$ تابع محور xها را قطع نمی‌کند.

حالا با توجه به علامت a و Δ می‌توانیم وضعیت نمودار تابع درجه‌دوم را با محور xها تعیین کنیم:

a \ Δ	$\Delta>0$ (دو ریشه)	$\Delta=0$ (یک ریشه)	$\Delta<0$ (ریشه ندارد.)
$a>0$ (دهانه رو به بالا)		 تابع بر محور xها مماس و رو به بالا	 تابع همواره بالای محور xها
$a<0$ (دهانه رو به پایین)		 تابع بر محور xها مماس و رو به پایین	 تابع همواره پایین محور xها

تست: به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $f(x)=(m-1)x^2+(m-1)x+1$ همواره در پایین محور xها قرار دارد؟

۱) $(1,5)$ ۲) $(-\infty,1)$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\mathbb{R}$

پاسخ۳: برای این‌که نمودار تابع همواره پایین محور xها قرار داشته باشد باید:

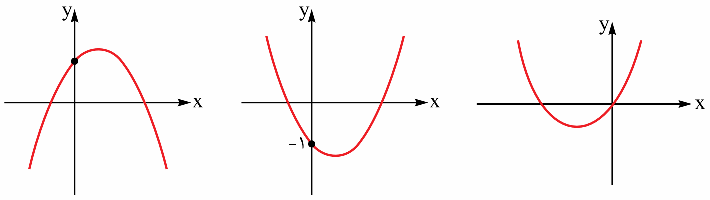
$$\begin{cases}\Delta<0 \Rightarrow (m-1)^2-4(m-1)<0 \Rightarrow (m-1)(m-1-4)<0 \Rightarrow (m-1)(m-5)<0 \Rightarrow 1<m<5\\ x^2 \text{ ضریب } <0 \Rightarrow m-1<0 \Rightarrow m<1\end{cases}$$

از اشتراک دو جواب به دست آمده حدود m تهی خواهد شد.

نقاطی که تابع محور xها را قطع می‌کند را با هم تحلیل کردیم. حال وقت آن است نقطه‌ای که تابع محور yها را قطع می‌کند را شناسایی کنیم. جایی که تابع، محور yها را قطع می‌کند طول صفر دارد. پس اگر در معادلهٔ تابع، $x=0$ قرار دهیم آن‌گاه داریم: $f(x)=ax^2+bx+c \xrightarrow{x=0} f(0)=0+0+c \Rightarrow f(0)=c$

پس نقطه‌ای که تابع محور yها را قطع می‌کند در حقیقت مقدار و علامت c را نشان می‌دهد.

به عنوان مثال به نمودارهای روبه‌رو توجه کنید:



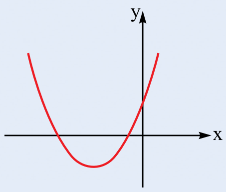
$c>0$ $c=-1$ $c=0$

محور تقارن تابع درجه‌دوم *نمودار تابع درجه‌دوم یه ویژگی خوشگل دیگه هم داره!* تابع درجه‌دوم یک محور تقارن دارد.

(به خط‌چین‌های شکل‌های مقابل توجه کنید.)

نکته: *معادلهٔ محور تقارن تابع درجه‌دوم* $f(x)=ax^2+bx+c$ *به صورت* $x=-\frac{b}{2a}$ است.

مثال: اگر نمودار تابع درجه‌دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ به صورت مقابل باشد، در مورد علامت a، b، c و Δ نظر دهید.



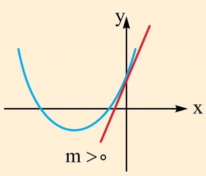
پاسخ: دهانهٔ نمودار تابع رو به بالاست، پس $a>0$. از طرفی تابع، محور yها را بالای محور xها قطع می‌کند پس $c>0$.

همچنین تابع، محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند پس $\Delta>0$.

برای تعیین علامت b باید از محور تقارن کمک بگیریم. محور تقارن تابع، سمت چپ محور yها قرار دارد.

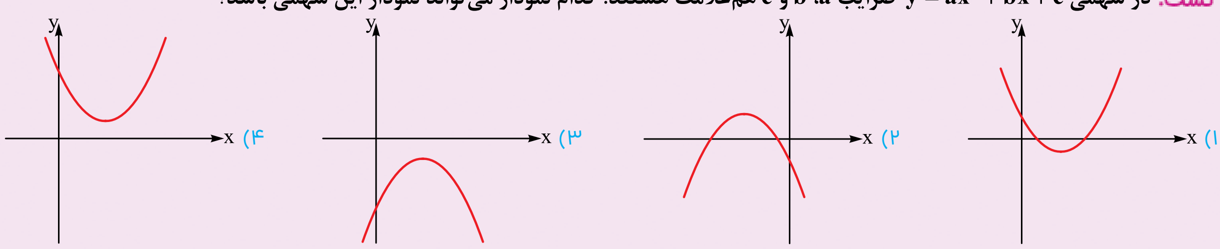
پس: $\text{محور تقارن}: x=-\frac{b}{2a}<0 \xrightarrow{a>0} -b<0 \Rightarrow b>0$

نکته: *روش سریع پیدا کردن علامت b: برای این‌که علامت b را سریع‌تر پیدا کنید، می‌توانید خط مماس بر منحنی را در نقطهٔ تلاقی منحنی با محور yها رسم کنید. اگر شیب این خط مثبت باشد $b>0$ و اگر شیب خط منفی باشد $b<0$ است. هم‌چنین اگر خط مماس افقی باشد $b=0$ است. در مثال بالا داریم:*



$\Rightarrow$ شیب مماس $>0 \Rightarrow b>0$

تست: در سهمی $y=ax^2+bx+c$ ضرایب a، b و c هم‌علامت هستند. کدام نمودار می‌تواند نمودار این سهمی باشد؟



پاسخ ۲: گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

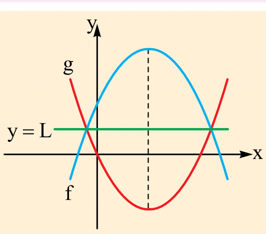
۱ $\begin{cases} \text{دهانه رو به بالا} \Rightarrow a>0 \\ x=0 \text{ شیب مماس در } <0 \Rightarrow b<0 \ \times \\ \text{عرض از مبدأ} >0 \Rightarrow c>0 \end{cases}$

۲ $\begin{cases} \text{دهانه رو به پایین} \Rightarrow a<0 \\ x=0 \text{ شیب مماس در } <0 \Rightarrow b<0 \\ \text{عرض از مبدأ} <0 \Rightarrow c<0 \end{cases}$

پس در **۲** ضرایب a، b و c هم‌علامت هستند.

دقت کنید که در **۳** $(a<0, b>0, c<0)$ و در **۴** $(a>0, b<0, c>0)$.

نکته: *اگر دو نمودار تابع درجه‌دوم f و g در یک دستگاه مختصات نسبت به خط $y=L$ قرینه باشند، آن‌گاه:*

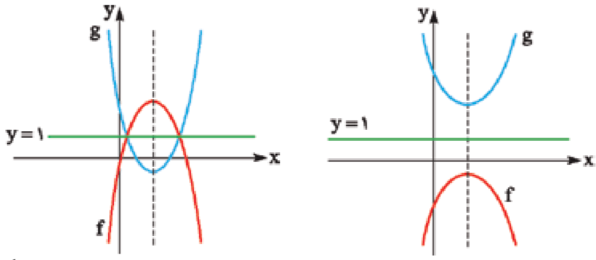


$\Rightarrow$
۱ طول رأس سهمی f و g یکسان است.
۲ میانگین دو تابع برابر L است. $\Rightarrow \frac{f+g}{2}=L$

تست: نمودار دو تابع $f(x)=-x^{۲}+ax+۴$ و $g(x)=x^{۲}-۲x+b$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. اگر خط $y=۱$ محور تقارن شکل حاصل باشد $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) -۲ ۴) ۶

پاسخ ۱: با توجه به این‌که بعد از رسم دو نمودار در یک دستگاه مختصات خط $y=۱$ محور تقارن شده، بنابراین نمودارهای دو تابع می‌تواند به صورت‌های زیر باشد:



با توجه به شکل، محور تقارن دو تابع یکسان است:

$$\begin{cases} g \text{ محور تقارن: } x=۱ \\ f \text{ محور تقارن: } x=-\dfrac{a}{۲(-۱)}=\dfrac{a}{۲} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a}{۲}=۱ \Rightarrow a=۲$$

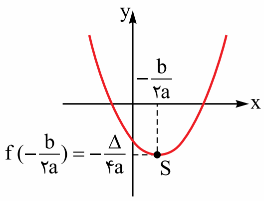
از طرفی میانگین عرض از مبدأهای دو تابع برابر ۱ است:

$$\begin{cases} f(۰)=۴ \\ g(۰)=b \end{cases} \Rightarrow \dfrac{۴+b}{۲}=۱ \Rightarrow b=-۲ \Rightarrow a+b=۰$$

رأس سهمی (تابع درجه‌دوم)

مختصات رأس سهمی (مختصات مینیمم یا ماکزیمم تابع درجه‌دوم) $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ از رابطهٔ مقابل محاسبه می‌شود:

$$\text{رأس سهمی}: S\left|\begin{array}{l} -\dfrac{b}{۲a} \\ f(-\dfrac{b}{۲a})=-\dfrac{\Delta}{۴a} \end{array}\right.$$



برای مثال مختصات رأس سهمی $f(x)=-x^{۲}+۴x-۱$ برابر است با:

$$\text{رأس سهمی}: S\left|\begin{array}{l} -\dfrac{b}{۲a}=-\dfrac{۴}{۲(-۱)}=۲ \\ f(-\dfrac{b}{۲a})=f(۲)=-(۲)^{۲}+۴(۲)-۱=۳ \end{array}\right. \Rightarrow S(۲,۳)$$

برای محاسبهٔ عرض رأس سهمی می‌توانید از رابطهٔ $-\dfrac{\Delta}{۴a}$ هم استفاده کنید:

$$-\dfrac{\Delta}{۴a}=-\dfrac{۴^{۲}-۴(-۱)(-۱)}{۴(-۱)}=-\dfrac{۱۲}{-۴}=۳$$

تست: به ازای کدام مقدار m نقطهٔ مینیمم تابع $f(x)=x^{۲}-mx+m+۴$ روی نیمساز ربع دوم قرار دارد؟

۱) ۸ ۲) -۲ ۳) -۸ ۴) ۲

پاسخ ۲: می‌دانیم مختصات نقطهٔ مینیمم یا ماکزیمم تابع درجه‌دوم به صورت $(-\dfrac{b}{۲a},-\dfrac{\Delta}{۴a})$ است. چون این نقطه روی نیمساز ربع دوم یعنی خط $y=-x$ قرار دارد، بنابراین مختصات نقطه در خط صدق می‌کند. (توجه کنید که چون نقطهٔ مینیمم روی نیمساز ناحیهٔ دوم است، طول آن منفی است: $-\dfrac{b}{۲a}<۰$)

$$\Rightarrow -\dfrac{\Delta}{۴a}=-(-\dfrac{b}{۲a}) \Rightarrow -\dfrac{\Delta}{۴a}=\dfrac{b}{۲a} \Rightarrow -\dfrac{\Delta}{۲}=b \Rightarrow \Rightarrow \Delta=-۲b \quad (*)$$

با توجه به تابع $f(x)=x^{۲}-mx+m+۴$ داریم:

$$\xrightarrow{(*)} m^{۲}-۴(۱)(m+۴)=-۲(-m) \Rightarrow m^{۲}-۴m-۱۶=۲m \Rightarrow m^{۲}-۶m-۱۶=۰$$

$$\Rightarrow (m-۸)(m+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۸ \Rightarrow f(x)=x^{۲}-۸x+۱۲ \\ m=-۲ \Rightarrow f(x)=x^{۲}+۲x+۲ \end{cases}$$

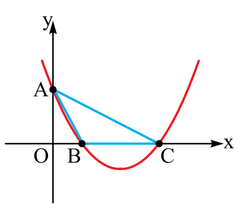
اما ضابطهٔ $f(x)=x^{۲}-۸x+۱۲$ قابل‌قبول نیست چون در این ضابطه $-\dfrac{b}{۲a}>۰$ است و مختصات مینیمم در ناحیهٔ دوم قرار ندارد. پس $m=-۲$ قابل قبول است.

تست: صفرهای تابع $y=۲x^{۲}-(m+۲)x+m$ و نقطهٔ تقاطع آن با محور عرض‌ها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر $\dfrac{۳}{۴}$ باشد، کدام می‌تواند طول رأس سهمی $y=x^{۲}-mx+۱$ باشد؟

۱) $\dfrac{۱}{۴}$ ۲) $\dfrac{۲}{۳}$ ۳) $-\dfrac{۳}{۴}$ ۴) $-\dfrac{۱}{۲}$

پاسخ ۴: اول یک شکل فرضی از مسئله رسم می‌کنیم. با توجه به این‌که صفرهای تابع و نقطهٔ تقاطع آن با محور عرض‌ها رئوس مثلث هستند، پس مثلث ABC مد نظر طراح است. مساحت این مثلث برابر $\dfrac{۳}{۴}$ است؛ پس:

$$S=\dfrac{OA\times BC}{۲}=\dfrac{۳}{۴} \quad (*)$$



A عرض از مبدأ سهمی است، پس مختصات آن با توجه به ضابطهٔ سهمی $(۰,m)$ است؛ بنابراین:

$$OA=m$$

از طرفی BC برابر قدرمطلق تفاضل ریشه‌هاست، در نتیجه:

$$BC=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\dfrac{\sqrt{(m+۲)^{۲}-۸m}}{۲}=\dfrac{\sqrt{m^{۲}+۴m+۴-۸m}}{۲}=\dfrac{\sqrt{m^{۲}-۴m+۴}}{۲}=\dfrac{\sqrt{(m-۲)^{۲}}}{۲}=\dfrac{|m-۲|}{۲}$$

$$\xrightarrow{(*)} S=\frac{OA\times BC}{۲}=S=\frac{m|m-۲|}{۴}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow m|m-۲|=۳ \Rightarrow \begin{cases} m=۳ \\ m=-۱ \end{cases}$$

در نهایت باید طول رأس سهمی $y=x^۲-mx+۱$ را بیابیم:

$$x_S=\frac{m}{۲} \xrightarrow{\text{با توجه به مقادیر } m} \begin{cases} x_S=\frac{۳}{۲} \\ \text{یا} \\ x_S=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

رسم نمودار تابع درجه‌دوم

برای رسم نمودار تابع درجه‌دوم می‌توانیم از دو روش زیر استفاده کنیم:

۱ رسم با کمک انتقال: ابتدا با مربع کامل کردن، تابع را به فرم ساده‌تر نوشته، سپس از انتقال تابع $f(x)=x^۲$ استفاده می‌کنیم.

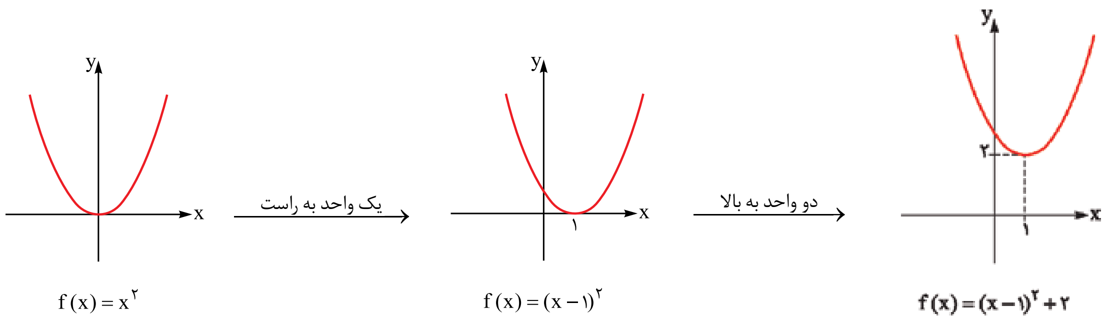
۲ رسم با مقداردهی: با قراردادن سه مقدار مختلف در تابع که نقطهٔ وسط آن‌ها حتماً $x=-\frac{b}{۲a}$ است و رسم نقاط روی محورهای مختصات و وصل‌کردن و امتدادادن آن‌ها، نمودار را رسم می‌کنیم.

مثال: نمودار تابع $f(x)=x^۲-۲x+۳$ را رسم کنید.

پاسخ: روش ۱

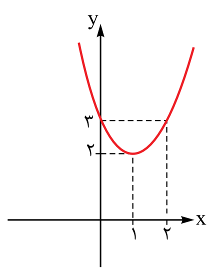
$$f(x)=x^۲-۲x+۳=x^۲-۲x+۱+۲=(x-۱)^۲+۲$$

برای رسم نمودار، تابع $f(x)=x^۲$ را یک واحد به راست و سپس دو واحد به بالا می‌بریم:



روش ۲

$$f(x)=x^۲-۲x+۳ \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۰ & x=-\frac{b}{۲a}=۱ & ۲ \\ \hline y & ۳ & ۲ & ۳ \end{array} \Rightarrow$$



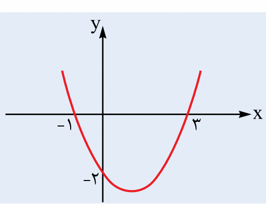
تعیین ضابطهٔ تابع درجه‌دوم از روی نمودار

۱ از نقاط روی نمودار، طول محور تقارن و ... استفاده کرده، در معادلهٔ $f(x)=ax^۲+bx+c$ قرار می‌دهیم و b، a و c را می‌یابیم.

۲ اگر مختصات رأس سهمی به صورت $S(h,k)$ باشد، معادلهٔ تابع به صورت $f(x)=a(x-h)^۲+k$ خواهد بود.

۳ اگر ریشه‌های تابع، $x_۱$ و $x_۲$ باشند معادلهٔ تابع به صورت $f(x)=a(x-x_۱)(x-x_۲)$ خواهد بود.

مثال: اگر نمودار تابع درجه‌دوم f به صورت مقابل باشد، ضابطهٔ تابع را بیابید.



پاسخ: $x=-۱$ و $x=۳$ ریشه‌های تابع هستند، پس با توجه به حالت (۳) داریم:

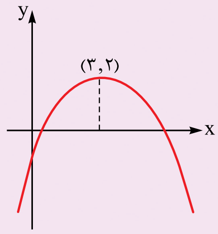
$$f(x)=a(x-(-۱))(x-۳)=a(x+۱)(x-۳)$$

از طرفی نقطهٔ $(۰,-۲)$ روی منحنی قرار دارد، پس:

$$\xrightarrow[f(۰)=-۲]{(۰,-۲)\in \text{تابع}} f(۰)=a(۱)(-۳)=-۲ \Rightarrow a=\frac{۲}{۳} \Rightarrow f(x)=\frac{۲}{۳}(x+۱)(x-۳)$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۲}{۳}(x^۲-۲x-۳)=\frac{۲}{۳}x^۲-\frac{۴}{۳}x-۲$$

تست: نمودار سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ که در آن $a^۲=۱$ است به صورت مقابل می‌باشد، عرض از مبدأ سهمی کدام است؟



۱) -۴

۲) -۵

۳) -۶

۴) -۷

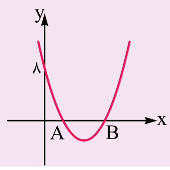
پاسخ۴: مختصات رأس سهمی $S(۳,۲)$ است، پس معادلهٔ سهمی به صورت مقابل است: $f(x)=a(x-۳)^۲+۲$

از طرفی $a^۲=۱$ و در نتیجه $a=\pm۱$ است و با توجه به این‌که دهانهٔ سهمی رو به پایین است، پس $a<۰$ و در نتیجه $a=-۱$ قابل قبول است. بنابراین:

$f(x)=-۱(x-۳)^۲+۲$

برای محاسبهٔ عرض از مبدأ منحنی در معادلهٔ تابع $x=۰$ قرار می‌دهیم: $x=۰: f(۰)=-۹+۲=-۷$

تست: نمودار تابع درجه‌دوم $y=f(x)$ داده شده است. اگر طول نقطهٔ B، دو برابر طول نقطهٔ A باشد، آن‌گاه کم‌ترین مقدار این تابع کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)



۱) -۱ ۲) $-۱/۲۵$

۳) $-۱/۵$ ۴) -۲

پاسخ۱: طول نقطهٔ B دو برابر طول نقطهٔ A است؛ پس طول A و B را به ترتیب α و ۲α می‌گیریم. چون A و B ریشه‌های تابع هستند، پس معادلهٔ سهمی به شکل $y=a(x-\alpha)(x-۲\alpha)$ درمی‌آید.

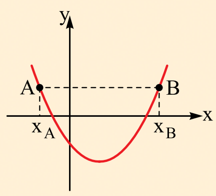
با توجه به شکل، سهمی از نقطهٔ $(۰,۸)$ می‌گذرد؛ پس: $۸=a(۰-\alpha)(۰-۲\alpha) \Rightarrow ۲a\alpha^۲=۸ \Rightarrow a\alpha^۲=۴\ (*)$

از طرفی میانگین ریشه‌ها، طول رأس را به ما می‌دهد: $x_S=\dfrac{\alpha+۲\alpha}{۲}=\dfrac{۳}{۲}\alpha$

مقدار سهمی $f(x)=a(x-\alpha)(x-۲\alpha)$ در x_S برابر با کم‌ترین مقدار سهمی است:

$$\min=f(\frac{۳}{۲}\alpha)=a(\frac{۳}{۲}\alpha-\alpha)(\frac{۳}{۲}\alpha-۲\alpha)=a(\frac{\alpha}{۲})(\frac{-\alpha}{۲})=\frac{-a\alpha^۲}{۴}\overset{(*)}{=}\frac{-۴}{۴}=-۱$$

نکته: اگر A و B دو نقطهٔ هم‌عرض روی نمودار تابع درجه‌دوم باشند، آن‌گاه:



$$\Rightarrow x_S=\frac{x_A+x_B}{۲}$$

تست: خط $y=L$ نمودار تابع درجه‌دوم f را در دو نقطه به طول‌های ۳ و -۱ قطع می‌کند. اگر کم‌ترین مقدار تابع برابر -۲ باشد و تابع محور yها را در نقطه‌ای به عرض $\frac{۱}{۲}$ قطع کند. $f(۴)$ کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۲۲ ۳) $۱۸/۵$ ۴) $۲۰/۵$

پاسخ۴: چون خط افقی $y=L$ نمودار تابع را در دو نقطه به طول‌های -۱ و ۳ قطع کرده؛ بنابراین طبق نکتهٔ بالا: $x_S=\dfrac{۳+(-۱)}{۲}=۱$

از طرفی کم‌ترین مقدار تابع برابر -۲ است، در نتیجه: $S(۱,-۲) \Rightarrow$ معادلهٔ سهمی: $f(x)=a(x-۱)^۲-۲$

همچنین عرض از مبدأ تابع برابر $\frac{۱}{۲}$ است، در نتیجه:

$$f(۰)=a-۲=\frac{۱}{۲} \Rightarrow a=\frac{۵}{۲} \Rightarrow f(x)=\frac{۵}{۲}(x-۱)^۲-۲ \Rightarrow f(۴)=\frac{۴۵}{۲}-۲=\frac{۴۱}{۲}=۲۰/۵$$

تعیین علامت صفرهای تابع درجه‌دوم

برای تعیین علامت صفرهای یک تابع درجه‌دوم، همانند تعیین علامت ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم عمل می‌کنیم؛ یعنی باید علامت‌های Δ، S و P را بررسی کنیم.

تست: به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x)=ax^۲+(a+۳)x-۱$، محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟

۱) $a<-۹$ ۲) $a<-۳$ ۳) $a>-۱$ ۴) $-۳<a<۰$ (ریاضی خارج ۹۲)

پاسخ۱: معادلهٔ $ax^۲+(a+۳)x-۱=۰$ باید دو ریشهٔ منفی داشته باشد. پس باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} ۱)\ \Delta>۰ \Rightarrow (a+۳)^۲-۴(a)(-۱)>۰ \Rightarrow a^۲+۶a+۹+۴a>۰ \Rightarrow a^۲+۱۰a+۹>۰ \Rightarrow (a+۱)(a+۹)>۰ \Rightarrow a<-۹ \text{ یا } a>-۱ \\ ۲)\ \dfrac{c}{a}>۰ \Rightarrow \dfrac{-۱}{a}>۰ \Rightarrow a<۰ \\ ۳)\ -\dfrac{b}{a}<۰ \Rightarrow -\dfrac{a+۳}{a}<۰ \xrightarrow{\times(-۱)} \dfrac{a+۳}{a}>۰ \xrightarrow{a<۰} a+۳<۰ \Rightarrow a<-۳ \end{cases}$$

اشتراک جواب‌های به دست آمده حدود a را به ما می‌دهد: حدود a: $a<-۹$

وضعیت دو سهمی یا وضعیت یک سهمی و یک خط نسبت به هم گاهی وقت‌ها باید شرایط تلاقی «دو سهمی» یا «یک خط و یک سهمی» را بررسی کنیم. اگر ضابطه‌های دو منحنی را به صورت f و g در نظر بگیریم آن‌گاه حالات زیر می‌تواند رخ دهد:

۱. دو منحنی یکدیگر را قطع نکنند در این حالت معادلهٔ تلاقی یعنی معادلهٔ $f(x)=g(x)$ ریشهٔ حقیقی ندارد. چون معادلهٔ تلاقی درجه‌دوم است باید $\Delta<0$ باشد.

۲. دو منحنی در یک نقطه بر هم مماس باشند در این حالت معادلهٔ تلاقی ریشهٔ مضاعف دارد. پس باید $\Delta=0$ باشد.

۳. دو منحنی در دو نقطه متقاطع باشند در این حالت باید معادلهٔ تلاقی دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد؛ یعنی باید $\Delta>0$ باشد.

تست: به ازای کدام مقدار a، نمودارهای دو تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=ax^2+4x$ بر هم مماس‌اند؟ (ریاضی ۹۱)

۱) -4 ۲) -3 ۳) -2 ۴) -1

پاسخ۲: چون دو منحنی بر هم مماس‌اند معادلهٔ تلاقی آن‌ها ریشهٔ مضاعف دارد. $(\Delta=0)$: معادلهٔ تلاقی : $f(x)=g(x) \Rightarrow ax^2+4x=x^2+1$

$$\Rightarrow (a-1)x^2+4x-1=0 \xrightarrow{\Delta=0} 16-4(a-1)(-1)=0 \Rightarrow 16+4(a-1)=0$$

$$4(a-1)=-16 \Rightarrow a-1=-4 \Rightarrow a=-3$$

بعضی وقت‌ها هم نمودار یک تابع درجه‌دوم را انتقال می‌دهند و سپس می‌گویند نمودار حاصل در چه بازه‌ای بالا یا پایین یک منحنی دیگر (مثلاً g) قرار می‌گیرد. برای حل سؤالات این قسمت باید از نکات انتقال که در سال دهم یاد گرفتید، استفاده کنید.

تست: نمودار تابع $y=-x^2+2x+5$ را ۳ واحد به طرف xهای مثبت، سپس ۲ واحد به طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) $(3,4)$ ۲) $(2,5)$ ۳) $(3,5)$ ۴) $(2,6)$

پاسخ۱: اول انتقال‌ها را انجام می‌دهیم:

$$y=-x^2+2x+5 \xrightarrow[x\to x-3]{\text{۳ واحد به طرف xهای منفی}} y=-(x-3)^2+2(x-3)+5$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به طرف yهای منفی}} y=-(x-3)^2+2(x-3)+5-2$$

حالا تابع را مرتب می‌کنیم:

$$y=-x^2+6x-9+2x-6+3 \Rightarrow y=-x^2+8x-12$$

حالا بازه‌ای که نمودار تابع بالای نیمساز ربع اول $(y=x)$ قرار می‌گیرد را می‌یابیم. برای این کار باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم.

$$-x^2+8x-12>x \Rightarrow x^2-7x+12<0 \Rightarrow (x-3)(x-4)<0 \Rightarrow 3<x<4$$

عدم عبور منحنی تابع درجه‌دوم $y=ax^2+bx+c$ از یک ناحیهٔ مختصاتی برای این‌که تابع درجه‌دوم از یک ناحیهٔ خاص عبور نکند باید از یکی از دو روش زیر استفاده کنیم:

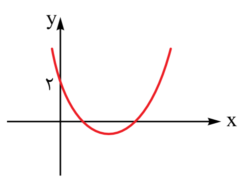
۱) اگر رسم تمام حالت‌های نموداری ممکن باشد: **الف** اول ببینید که مقدار a را دارید یا مقدار c را.

ب با توجه به مقدار a یا c، تمام حالت‌هایی که منحنی از آن ناحیهٔ خاص عبور نکند را رسم می‌کنیم.

پ با توجه به نمودارهای رسم‌شده، علامت پارامترهای a، b و Δ را تعیین کنید و حدود متغیر را بیابید.

مثال: حدود m را طوری بیابید تا نمودار تابع $y=\frac{m}{4}x^2+(m-4)x+2$ فقط از ناحیهٔ سوم عبور نکند.

پاسخ: اگر به ضابطهٔ تابع توجه کنید، مقدار c برابر ۲ است. بنابراین تمام حالت‌هایی که نمودار تابع فقط از ناحیهٔ سوم عبور نکند و از نقطهٔ $(0,2)$ بگذرد را رسم می‌کنیم، که تنها نمودار زیر حاصل می‌شود. با توجه به نمودار داریم:



$$\begin{cases} \text{تابع مینیمم دارد.} \Rightarrow x^2 \text{ ضریب } >0 \Rightarrow \frac{m}{4}>0 \Rightarrow m>0 \quad (*) \\ \text{شیب مماس در عرض از مبدأ منفی است.} \Rightarrow b<0 \Rightarrow m-4<0 \Rightarrow m<4 \quad (**) \\ \text{دو ریشه دارد.} \Rightarrow \Delta>0 \Rightarrow (m-4)^2-4(\frac{m}{4})(2)>0 \Rightarrow m^2-8m+16-2m>0 \\ \Rightarrow m^2-10m+16>0 \Rightarrow (m-8)(m-2)>0 \Rightarrow m<2 \text{ یا } m>8 \quad (***) \end{cases}$$

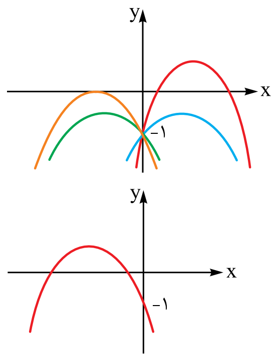
از اشتراک (*)، (**) و (***) حدود m برابر است با: $0<m<2$.

۲) اگر رسم تمام حالت‌ها ممکن نباشد: در این حالت از متمم استفاده می‌کنیم. ابتدا باید حدود ضریب x^2 را تعیین کنیم، سپس تمام حالت‌هایی که نمودار از آن ناحیه بگذرد را رسم و حدود متغیر را محاسبه کنیم و سپس مجموعه جواب حاصل را از حدود ضریب x^2 کم می‌کنیم.

نکته: *اگر $a>0$ باشد نمودار حتماً از نواحی اول و دوم می‌گذرد و اگر $a<0$ باشد نمودار حتماً از نواحی سوم و چهارم می‌گذرد.*

تست: حدود m کدام باشد تا نمودار تابع $y=(m-۲)x^۲-۲x-۱$ از ناحیهٔ دوم عبور نکند؟

۱) $m<۲$ ۲) $۰<m<۱$ ۳) $۱<m<۲$ ۴) $m\le ۱$



پاسخ۴: عرض از مبدأ سهمی ۱− است. مطابق شکل مقابل حالت‌های بسیار زیادی داریم که نمودار تابع از ناحیهٔ دوم عبور نکند و عرض از مبدأ آن ۱− باشد:

پس از روش متمم استفاده می‌کنیم. طبق نکته، برای این‌که منحنی از ناحیهٔ دوم نگذرد باید $a<۰$ (ضریب $x^۲$) باشد، پس $m-۲<۰ \Rightarrow m<۲$ است. مطابق شکل تنها حالتی که نمودار تابع درجه‌دوم با دهانهٔ رو به پایین و با عرض از مبدأ ۱− از ناحیهٔ دوم **عبور کند** به صورت زیر است:

$$\Rightarrow \begin{cases} a<۰ \Rightarrow m-۲<۰ \Rightarrow m<۲ \ (*) & \text{:ماکزیمم دارد.} \\ b<۰ \Rightarrow -۲<۰ \ \checkmark & \text{:شیب مماس در عرض از مبدأ منفی است.} \\ \Delta>۰ \Rightarrow ۴+۴(m-۲)>۰ \Rightarrow ۴+۴m-۸>۰ \Rightarrow m>۱ \ (**) & \text{:دو ریشه دارد.} \end{cases}$$

از اشتراک (*) و (**) حدود m برابر $۱<m<۲$ است. در پایان این حدود را از حدود ضریب $x^۲$ یعنی $m<۲$ کم می‌کنیم:

$$\text{حدود موردنظر} = (m<۲)-(۱<m<۲) = m\le ۱$$

نکته: *تابع درجه‌دوم $y=ax^۲+bx+c$ از هر چهار ناحیهٔ مختصاتی عبور می‌کند هرگاه $\frac{c}{a}<۰$ (یا $ac<۰$) باشد.*

مثال: به ازای چه حدودی از m نمودار تابع $y=(m-۱)x^۲+۲x+m$ از هر چهار ناحیهٔ مختصاتی می‌گذرد؟

پاسخ: باید $ac<۰$ باشد:

$$(m-۱)(m)<۰ \Rightarrow ۰<m<۱$$

حل مسائل کاربردی مرتبط با تابع درجه‌دوم (یافتن بیشترین و کم‌ترین مقدار) برای حل این مسائل الگوریتم زیر را اجرا کنید:

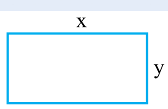
۱) در صورت امکان شکلی از مسئله رسم کنید و مقادیر ثابت و متغیر را روی شکل نمایش دهید.

۲) هدف مسئله (خواستهٔ مسئله) را شناسایی کنید. یعنی بررسی کنید به دنبال ماکزیمم یا مینیمم کردن چه تابعی هستیم. اگر هدف مسئله دومتغیره بود باید با کمک اطلاعات مسئله یا با کمک قضیهٔ فیثاغورس و ... تابع هدف را تک‌متغیره کنیم.

۳) بعد از مرحلهٔ دوم، تابع به فرم یک تابع درجه‌دوم تبدیل می‌شود که با کمک رابطهٔ $-\frac{\Delta}{۴a}$ یا $f(-\frac{b}{۲a})$ (مقدار ماکزیمم یا مینیمم تابع درجه‌دوم) مقدار موردنظر را می‌یابیم.

مثال: از بین مستطیل‌هایی که محیط آن‌ها ۱۲ است، ماکزیمم سطح این مستطیل‌ها را بیابید.

پاسخ: ۱ شکل مسئله به صورت مقابل است:



۲ قرار است مساحت مستطیل ماکزیمم شود، پس: $S=xy$:تابع هدف

۳ تابع هدف دومتغیره است و باید تک‌متغیره شود. در نتیجه از اطلاعات مسئله کمک می‌گیریم:

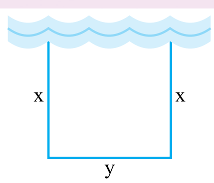
$$\text{محیط} = ۱۲ \Rightarrow ۲(x+y)=۱۲ \Rightarrow x+y=۶ \Rightarrow y=۶-x$$

$$\Rightarrow S=x(۶-x)=-x^۲+۶x \Rightarrow \max(S)=-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{۳۶-۴(-۱)(۰)}{۴(-۱)}=۹$$

تست: بیشترین مساحت از زمینی که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور کرد چند متر مربع است؟ (ریاضی خارج ۹۱)

۱) ۹۵۸ ۲) ۹۶۸ ۳) ۹۷۸ ۴) ۹۸۸

پاسخ۲: ۱) شکل مسئله به صورت مقابل است:



۲) قرار است مساحت زمین ماکزیمم شود، پس: $S=xy$:تابع هدف

۳) تابع هدف دومتغیره است و باید تک‌متغیره شود. پس از اطلاعات مسئله کمک می‌گیریم:

$$\text{طول طناب} = ۸۸ \Rightarrow ۲x+y=۸۸ \Rightarrow y=۸۸-۲x$$

با جای‌گذاری این تساوی در تابع هدف خواهیم داشت:

$$S=x(۸۸-۲x)=۸۸x-۲x^۲ \Rightarrow S(x)=-۲x^۲+۸۸x$$

برای محاسبهٔ ماکزیمم مساحت زمین باید ماکزیمم S را محاسبه کنیم. می‌دانیم ماکزیمم یک تابع درجه‌دوم (که در آن $۰>$ ضریب $x^۲$) از رابطهٔ $-\frac{\Delta}{۴a}$ محاسبه می‌شود:

$$S_{max}=-\frac{۸۸^۲-۴(-۲)(۰)}{۴(-۲)}=\frac{۸۸^۲}{۸}=۸۸\times ۱۱=۹۶۸$$

روش هندسی حل معادلات

اگر $y=f(x)$ و $y=g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط تلاقی نمودار این دو منحنی، جواب‌های معادلهٔ $f(x)=g(x)$ خواهند بود و برعکس. یعنی هر جواب این معادله، طول یکی از نقاط تلاقی این دو نمودار است.

بنابراین به طور کلی برای حل یک معادله به روش هندسی، باید معادله را به دو تابع در طرفین تساوی طوری تبدیل کنیم که رسم نمودار هر تابع ممکن باشد. سپس دو نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم و نقاط تلاقی (جواب‌های معادله) را می‌یابیم.

تست: معادلهٔ $x+|x|=1$ چند جواب حقیقی دارد؟

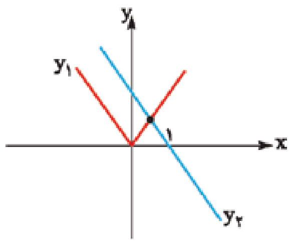
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ۲: از روش رسم استفاده می‌کنیم. فقط چون رسم نمودار تابع $y=x+|x|$ (تابع سمت چپ تساوی) در حال حاضر آسان نیست، معادله را به صورت مقابل می‌نویسیم:

$$x+|x|=1 \Rightarrow \underbrace{|x|}_{y_1}=\underbrace{1-x}_{y_2}$$

هر یک از نمودارهای y_1 و y_2 را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} y_2=1-x \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow \\ y_1=|x| \end{cases}$$



دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند پس معادله یک جواب دارد.

تست: معادلهٔ $x^2-x=|x|-1$ چند جواب حقیقی دارد؟

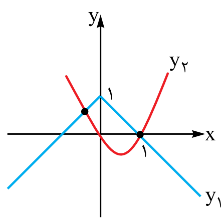
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ۳:

$$\underbrace{1-|x|}_{y_1}=\underbrace{x^2-x}_{y_2}$$

برای رسم y_1، نمودار $y=|x|$ را نسبت به محور xها قرینه و سپس یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. برای رسم y_2 هم، از مقداردهی استفاده می‌کنیم:

$$y_2=x^2-x \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & x=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2} & 1 \\ \hline y & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{array} \Rightarrow$$



دو نمودار، یکدیگر را در دو نقطه قطع کرده‌اند، پس معادله دو جواب دارد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

معادلهٔ درجه‌دوم و ریشه‌های آن

۷۶- ریشهٔ بزرگ‌تر معادلهٔ $(x-1)(x+1)=2x+7$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۷۷- اگر $x=2$ یک جواب معادلهٔ $2x^2+ax=a+2$ باشد، جواب دیگر معادله کدام است؟

۱) ۱ ۲) -2 ۳) ۳ ۴) -6

۷۸- معادلهٔ $(x-1)(x-3)+2+k^2=0$ چه وضعی دارد؟

۱) دو ریشهٔ مثبت ۲) دو ریشهٔ منفی ۳) دو ریشهٔ مختلف‌العلامت ۴) ریشهٔ حقیقی ندارد.

۷۹- به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادلهٔ درجه‌دوم $(2m-1)x^2+6x+m-2=0$، دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است؟ $(m\neq\frac{1}{2})$ (ریاضی ۹۸)

۱) $-2<m<2/5$ ۲) $-2<m<3/5$ ۳) $-1<m<3/5$ ۴) $-1<m<2/5$

۸۰- ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $x^2-(2m+3)x+m^2=0$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\pm\frac{3}{4}$ ۴) ریشهٔ مضاعف ندارد.

۸۱- معادله‌های $x^2+6x+m=0$ و $x^2+2x-3m=0$ یک ریشهٔ مشترک غیر صفر دارند، اختلاف ریشه‌های غیرمشترک کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۲)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۷

۸۲- معادلات $x^۳+۳x+۱=۰$ و $x^۲-۴x+۲=۰$ .... (مثل کنکور)

۱) یک ریشهٔ مشترک مثبت دارند ۲) یک ریشهٔ مشترک منفی دارند ۳) دو ریشهٔ مشترک دارند ۴) ریشهٔ مشترک ندارند

۸۳- مجموع پول علی و اکرم ۱۰۰ تومان است. اگر علی ۱۰ تومان از پولش را به اکرم بدهد، آن‌گاه حاصل‌ضرب پول‌های باقی‌ماندهٔ آن‌ها ۴۷۵ تومان خواهد شد. پول اولیهٔ اکرم کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

۱) ۹ ۲) ۱۵ ۳) ۸۵ ۴) ۹۱

۸۴- یک استخر مستطیل‌شکل به ابعاد ۳ و ۱۰ متر دارای یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه بتونی در همه‌جا دارای پهنای یکسان و مساحت ۳۰ متر مربع باشد، پهنای آبراه بتونی چه‌قدر است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

رابطهٔ بین ریشه‌ها

۸۵- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۴x-۲=۰$ باشند، حاصل $\alpha+\beta+\alpha\beta$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۴ ۳) ۴ ۴) صفر

۸۶- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $۳x^۲-۲x=۶$ باشند، حاصل $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۸۷- در معادلهٔ $x^۲-۶x+۳=۰$، فاصلهٔ بین ریشه‌ها چند برابر $\sqrt{۶}$ است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۳

۸۸- ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-(a+۱)x+a=۰$ دو عدد فرد متوالی طبیعی و ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-(۳a+۱)x+b=۰$ دو عدد زوج متوالی است. اختلاف حاصل‌ضرب ریشه‌های دو معادله کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۲)

۱) ۳۳ ۲) ۲۱ ۳) ۱۳ ۴) ۹

۸۹- معادلهٔ درجه‌دوم $۳x^۲+(۲m-۱)x+۲-m=۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟ (تجربی ۹۹)

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) ۳ ۳) -۱ ۴) $-\frac{۵}{۲}$

۹۰- معادلهٔ $(x^۲+nx+۵)(x^۲+۶x+n)=۰$ به ازای عدد طبیعی n، چهار ریشهٔ گنگ متمایز دارد. حاصل‌ضرب این چهار ریشه کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۳۵ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۹۱- فرض کنید $a, b, c \in \{۱,۲,...,۹\}$. چند معادلهٔ درجه‌دوم به صورت $ax^۲+bx-c=۰$ می‌توان تشکیل داد به طوری که مجموع ریشه‌های هر معادله از حاصل‌ضرب ریشه‌های همان معادله، دو واحد بیشتر باشد؟ (تجربی ۱۴۰۰)

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۹۲- مجموع مربعات ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲+۳x-۶=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۳۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲}$

۹۳- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۵x-۳=۰$ باشند، حاصل $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۳۷}{۶}$ ۴) $-\frac{۳۵}{۶}$

۹۴- مجموع مکعبات ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۳x-۲=۰$ کدام است؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۵ ۳) ۴۷ ۴) ۴۹

۹۵- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲-۱۲x+۱=۰$ باشند، مقدار $\frac{۱}{\sqrt{\beta}}+\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}$ چه‌قدر است؟ (ق.م)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۹۶- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-\sqrt{۲}x+\sqrt{۲}=x$ باشند، حاصل $\frac{۱}{\beta^۲}+\frac{۱}{\alpha^۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۹۷- در معادلهٔ درجه‌دوم $x^۲-(\frac{۱}{a^۴}+a^۲)x+\frac{۱}{a^۲}=۰$، حاصل $\frac{x_۱}{x_۲}+\frac{x_۲}{x_۱}$ کدام است؟ ($x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله هستند.)

۱) $a^۸+\frac{۱}{a^۸}$ ۲) $a^۲+\frac{۱}{a^۲}$ ۳) $a^۴+\frac{۱}{a^۴}$ ۴) $a^۶+\frac{۱}{a^۶}$

۹۸- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x+3=0$ باشند، آن‌گاه ریشهٔ سوم $\alpha^4+\beta^4$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۹۹- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-6x+2=0$ باشند، حاصل $(\alpha+\frac{1}{\alpha})^2+(\beta+\frac{1}{\beta})^2$ کدام است؟

۱) ۳۸ ۲) ۴۲ ۳) ۴۴ ۴) ۳۶

۱۰۰- در معادلهٔ درجه‌دوم $x^2-2x-4=0$، اگر ریشه‌ها α و β باشند، حاصل $(\alpha^2-4)^2+4\beta^2$ چه‌قدر است؟

۱) ۴۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۱۰۱- در معادلهٔ درجه‌دوم $x^2+2x-1=0$، حاصل $x_1^4+(2x_2-1)^2$ چه‌قدر است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۳ ۳) ۳۱ ۴) ۳۴

۱۰۲- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-4x+1=0$ باشند، حاصل $\dfrac{(2\alpha+\frac{1}{\alpha})^2}{\beta^2-2\beta}$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) -32 ۳) ۱۶ ۴) -16

۱۰۳- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+2x-4=0$ باشند، حاصل $\dfrac{\beta}{(\beta+2)^2}+\dfrac{\alpha}{(\alpha+2)^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) -2

۱۰۴- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-6x+2=0$ باشند $(\alpha<\beta)$ حاصل $\dfrac{\alpha^4-4}{\alpha^2}$ کدام است؟

۱) $-24\sqrt{2}$ ۲) $24\sqrt{2}$ ۳) $-12\sqrt{7}$ ۴) $12\sqrt{7}$

۱۰۵- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-x-1=0$ باشند، حاصل $\alpha^3+2\beta^2$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۰۶- در معادلهٔ $x^2-8x+m=0$ یک ریشه از نصف ریشهٔ دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۱)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۱۰۷- در معادلهٔ $3x^2-17x+m=0$ یک ریشه از سه برابر ریشهٔ دیگر، سه واحد بیشتر است. m کدام است؟ (ریاضی ۸۷)

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۰۸- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3mx+4=0$ باشند، به ازای کدام مقدار m رابطهٔ $\alpha\beta^2+4=0$ برقرار است؟

۱) $-\frac{5}{3}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۱۰۹- اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $ax^2-2ax+k=0$ از مجذور ریشهٔ دیگر ۴ واحد کم‌تر باشد، بزرگ‌ترین ریشهٔ معادله کدام می‌تواند باشد؟ (مثل کنکور)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۱۰- به ازای کدام مقدار m بین ریشه‌های معادلهٔ $x(x-m)=m^2+1$ رابطهٔ $||\alpha|-|\beta||=4$ برقرار است؟

۱) ۳ ۲) -4 ۳) ۸ ۴) -6

۱۱۱- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+mx-3=0$ باشند، به ازای کدام مقدار m رابطهٔ $2\alpha+\beta=4$ بین ریشه‌ها برقرار است؟

۱) $3\pm\sqrt{10}$ ۲) $\frac{6\pm\sqrt{10}}{2}$ ۳) $-3\pm\sqrt{10}$ ۴) $\frac{-6\pm\sqrt{10}}{2}$

۱۱۲- به ازای کدام مقدار m، بین ریشه‌های معادلهٔ $x^2-mx-2=0$ رابطهٔ $x_1x_2^2+2x_1^2x_2=4$ برقرار است؟

۱) $\frac{\sqrt{5}+3}{2}$ ۲) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{5}-3}{2}$ ۴) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

۱۱۳- α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+6x+a=0$ هستند. اگر $\alpha<\beta<0$ و $3\alpha^2+2\beta^2=12\sqrt{2}+85$ باشد، مقدار a چه‌قدر است؟ (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) ۱ ۲) $\frac{13}{4}$ ۳) $\frac{21}{5}$ ۴) ۲

۱۱۴- α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-6x+k=0$ بوده که $\alpha<\beta$ است. اگر $\beta^2-2\alpha^2=18\sqrt{2}-11$، مقدار k کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۷

۱۱۵- به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^2+3x+m^2=2$، معکوس یکدیگرند؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۱۱۶- به ازای کدام مقدار m، یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2-6x+5+m=0$، مجذور دیگری است؟

۱) ۳۲ ۲) ۲ ۳) -32 ۴) -3

۱۱۷- به ازای کدام مقدار m، عدد $\frac{1}{8}$ واسطهٔ حسابی بین دو ریشهٔ معادلهٔ $(m^2-4)x^2-3x+m=0$ است؟ (ق.م)

۱) ۳ ۲) -3 ۳) ۴ ۴) -4

۱۱۸- به ازای کدام مقدار m، عدد $\sqrt{۲}$ واسطهٔ هندسی بین ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^۲-۵x+m^۲-۳=۰$ است؟ (ق.م)

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) -۳

۱۱۹- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۲(a+۱)x+۲a-۱=۰$ باشند، به ازای کدام مقدار a به ترتیب سه عدد α، a و β تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۱)

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) ۱

۱۲۰- به ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^۲-(m+۳)x+۵=۰$، برابر ۶ می‌باشد؟ (تجربی ۹۳)

۱) $-\frac{۹}{۵}$ ۲) ۱ ۳) ۱ و $-\frac{۹}{۵}$ ۴) $\frac{۹}{۵}$ و -۱

۱۲۱- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲-۱۲x-a=۰$ و $۲\alpha^۲+\beta^۲-۴\alpha=۷$ باشند، مقدار a چند برابر ریشهٔ بزرگ‌تر معادله است؟ (ریاضی نوبت دوم خارج ۱۴۰۲)

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۹ ۴) -۹

۱۲۲- اگر α و β ریشه‌های متمایز معادلهٔ $ax^۲-ax-b=۰$ و $۴۰\beta^۲+۲۰\alpha^۲-۲۰\beta=۱۷$ باشند، اختلاف ریشه‌های این معادله کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۲)

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ ۴) $\frac{۲}{\sqrt{۵}}$

تعیین‌علامت و نوع ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم

۱۲۳- اگر معادلهٔ $۲x^۲-۴x+m-۳=۰$، دو ریشهٔ مثبت داشته باشد، آن‌گاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

۱) $m>۳$ ۲) $۳<m<۴$ ۳) $۳<m<۵$ ۴) $۱۷۰۴<m<۵$

۱۲۴- به ازای چه حدودی از m، ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^۲+m(x+۲)=۲$ از قدرمطلق ریشهٔ منفی کوچک‌تر است؟

۱) $(-۱,۰)$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\varnothing$ ۴) $(۰,۱)$

۱۲۵- اگر α و β دو ریشهٔ قرینهٔ هم معادلهٔ $(m-۳)x^۲+(m^۲-۱)x-m=۰$ باشند، حاصل $۲\alpha^۲+\beta^۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

معادلات درجه‌سوم با یک عامل (x-a)

۱۲۶- در معادلهٔ $(x+۲)(x^۲-x+m)=۰$ حاصل‌ضرب سه ریشه ۶ است. m کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) ۴

۱۲۷- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۳+kx^۲-۹x-۲=۰$، $\alpha+\beta=۱$ و $\alpha\beta=-۲$ باشد، مقدار k چه‌قدر است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۱)

۱) $-\frac{۲۷}{۵}$ ۲) $\frac{۲۷}{۵}$ ۳) -۳ ۴) ۳

۱۲۸- اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x(ax^۲-x-۵)=۲$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشهٔ دیگر آن کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۷)

۱) -۲ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۲۹- اگر مجموع مجذور ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^۳+(x^۲-x)(x+۱-m)=۰$ برابر ۴ باشد، m کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۶

۱۳۰- مجموع معکوس مربع سه ریشهٔ معادلهٔ $(x+۲)(x^۲+ax+۲)=۰$ برابر $-\frac{a}{۲}$ است. a کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۳ ۳) ۴ ۴) -۶

۱۳۱- ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^۳-۲x+۱=۰$ چگونه است؟ (ق.م)

۱) ریشهٔ مضاعف مثبت ـ یک ریشهٔ منفی

۲) ریشهٔ مضاعف منفی ـ یک ریشهٔ مثبت

۳) یک ریشهٔ مثبت ـ دو ریشهٔ منفی

۴) دو ریشهٔ مثبت ـ یک ریشهٔ منفی

۱۳۲- اگر α، β و γ ریشه‌های معادلهٔ $x^۳-۵x+۴=۰$ باشند، حاصل $\frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲}+\frac{۱}{\gamma^۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۵}{۹}$ ۲) $\frac{۱۶}{۹}$ ۳) $\frac{۲۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

۱۳۳- به ازای کدام مقادیر a، معادلهٔ $x^۳+(a-۱)x^۲+(۴-a)x=۴$ دارای سه ریشهٔ حقیقی متمایز مثبت است؟ (تجربی خارج ۹۴)

۱) $a<-۴$ ۲) $a>-۴$ ۳) $a<۴$ ۴) $a>۴$

نوشتن معادلهٔ درجه‌دوم با داشتن مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها

۱۳۴- در معادلهٔ درجه‌دومی که ریشه‌هایش $\frac{۱}{۳}$ و $-\frac{۱}{۲}$ است، ضریب $x^۲$ چند برابر ضریب x است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $-\frac{۱}{۶}$ ۳) ۶ ۴) -۶

۱۳۵- معادلهٔ درجه‌دومی با ضرایب گویا که یک ریشهٔ آن $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ است، به صورت $2x^2+ax+b=0$ است. $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -3 ۳) ۲ ۴) -2

تشکیل معادلهٔ درجه‌دوم جدید

۱۳۶- محیط یک مستطیل ۲۰ و مساحت آن ۲۴ است. طول مستطیل چه‌قدر از عرض آن بیشتر است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۷- ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $x^2+ax+b=0$، یک واحد از ریشه‌های معادلهٔ $3x^2+7x+1=0$ بیشتر است. b کدام است؟ (تجربی ۸۷)

۱) -2 ۲) -1 ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۳۸- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-3x-4=0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به صورت $\{\frac{1}{\alpha}+1,\frac{1}{\beta}+1\}$ است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) $4x^2-5x+1=0$ ۲) $4x^2-3x+1=0$ ۳) $4x^2-5x-1=0$ ۴) $4x^2-3x-1=0$

۱۳۹- فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x=5-x^2$ باشند، $\frac{1}{(x_1+1)^3}$ و $\frac{1}{(x_2+1)^3}$ ریشه‌های کدام معادله هستند؟ (تجربی ۱۴۰۰)

۱) $125x^2+16x=1$ ۲) $125x^2=16x+1$ ۳) $125x^2=12x+1$ ۴) $125x^2+12x=1$

۱۴۰- فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x=x^2-4$ باشند. ریشه‌های کدام معادله $x_1^3+\frac{1}{x_2}$ و $x_2^3+\frac{1}{x_1}$ است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

۱) $4x^2=51x+221$ ۲) $4x^2+51x=221$ ۳) $4x^2=51x+197$ ۴) $4x^2+51x=197$

۱۴۱- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-3x=1$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادلهٔ $8x^2+kx-1=0$ به صورت $\{\alpha^2\beta,\alpha\beta^2\}$ است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

۱۴۲- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x(5x+3)=2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب معادلهٔ $4x^2-kx+25=0$ به صورت $\{\frac{1}{\alpha^2},\frac{1}{\beta^2}\}$ است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۱

۱۴۳- اگر ریشه‌های معادلهٔ $4x^2-12x+m=0$ از k برابر مکعب ریشه‌های معادلهٔ $x^2-2x-1=0$، ۲ واحد کم‌تر باشد، m کدام است؟

۱) -41 ۲) -39 ۳) -44 ۴) -43

۱۴۴- اگر ریشه‌های معادلهٔ $ax^3+x^2-5x+a=0$ اعداد $1,\alpha,\beta$ باشند، معادلهٔ درجه‌دوم با ریشه‌های $\{\frac{\alpha}{\beta},\frac{\beta}{\alpha}\}$ به صورت $4x^2+kx+4=0$ است، مقدار k کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) -17 ۲) ۱۹ ۳) ۱۷ ۴) -19

۱۴۵- اگر α و $\beta-1$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2+ax+b=0$ و β و $\alpha-1$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x+b+2=0$ باشند، b کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) -3 ۴) -4

۱۴۶- ریشه‌های معادلهٔ $x(3+x)=5$ برابر α و β و ریشه‌های معادلهٔ $x(a+x)=b$ برابر $\frac{\alpha}{3+\alpha}$ و $\frac{1}{5}\beta^2$ هستند. حاصل $a+b$ کدام است؟ (آزمون‌های آزمایشی خیلی‌سبز)

۱) $-4/8$ ۲) $-2/8$ ۳) $2/8$ ۴) $4/8$

۱۴۷- اگر α ریشهٔ بزرگ‌تر معادلهٔ $x^2+2x-1=0$ باشد، معادله‌ای که ریشه‌هایش α^2 و $\frac{1}{2\alpha-1}$ هستند، به کدام صورت است؟

۱) $x^2+4\sqrt{2}x+1=0$ ۲) $x^2-4\sqrt{2}x-1=0$ ۳) $x^2+4\sqrt{2}x-1=0$ ۴) $x^2-4\sqrt{2}x+1=0$

حل معادله با تغییر متغیر

۱۴۸- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $x^6-9x^3+8=0$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۱

۱۴۹- معادلهٔ $x^4-2x^2+1=0$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۰- معادلهٔ $(x^2-2x)^2-(x^2-2x)=2$ چند ریشهٔ حقیقی متمایز دارد؟ (ریاضی ۹۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۱- جواب‌های معادلهٔ $(x^2-1)^2=x^2+5$ چگونه‌اند؟

۱) دو جواب مثبت و دو جواب منفی ۲) یک جواب مثبت و یک جواب منفی ۳) دو جواب مثبت ۴) معادله جواب ندارد.

۱۵۲- معادلهٔ $(x^4-x^2)^2-5(x^4-x^2)-6=0$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱ ۴) ۲

$$=۱۰(۱۶+۸\sqrt{۲}+۸+۴\sqrt{۲}+۴+۲\sqrt{۲}+۲+\sqrt{۲}+۱)$$

$$=۱۰(۳۱+۱۵\sqrt{۲})=۳۱۰+۱۵۰\sqrt{۲}$$

.۷۵ **۱** مجموع شش جملهٔ اول برابر $۱۵/۷۵$ است، پس:

$$S=a_۱+a_۲+\cdots+a_۶=۱۵/۷۵$$

مجموع معکوس‌های آن‌ها نیز برابر $۷/۸۷۵$ است، پس:

$$S'=\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\cdots+\frac{۱}{a_۶}=۷/۸۷۵$$

باید $A=a_۱a_۲\cdots a_۶$ را محاسبه کنیم. از طرفی می‌دانیم:

$$a_۱a_۶=a_۲a_۵=a_۳a_۴\quad(*)\ \Rightarrow\ A=a_۱a_۲\cdots a_۶=(a_۱a_۶)^۳$$

حالا از S' و S کمک می‌گیریم:

$$S=a_۱+a_۲+\cdots+a_۶=\frac{a_۱a_۶}{a_۶}+\frac{a_۲a_۵}{a_۵}+\cdots+\frac{a_۶a_۱}{a_۱}$$

$$\overset{(*)}{=}\frac{a_۱a_۶}{a_۶}+\frac{a_۱a_۶}{a_۵}+\cdots+\frac{a_۱a_۶}{a_۱}$$

$$\Rightarrow S=a_۱a_۶\left(\frac{۱}{a_۶}+\frac{۱}{a_۵}+\cdots+\frac{۱}{a_۱}\right)\Rightarrow S=a_۱a_۶S'$$

$$\Rightarrow ۱۵/۷۵=a_۱a_۶(۷/۸۷۵)$$

$$\Rightarrow a_۱a_۶=\frac{۱۵/۷۵}{۷/۸۷۵}=۲\Rightarrow A=(a_۱a_۶)^۳=(۲)^۳=۸$$

.۷۶ **۳** معادله را مرتب می‌کنیم:

$$(x-۱)(x+۱)=۲x+۷\Rightarrow x^۲-۱=۲x+۷$$

$$\Rightarrow x^۲-۲x-۸=۰\Rightarrow(x-۴)(x+۲)=۰\Rightarrow x=۴,-۲$$

$x=۴$ ریشهٔ بزرگ‌تر است.

.۷۷ **۱** روش ۱ $x=۲$ یک جواب معادله است؛ پس در معادله صدق می‌کند:

$$x=۲:۲(۲)^۲+a(۲)=a+۲\Rightarrow ۸+۲a=a+۲\Rightarrow a=-۶$$

با قراردادن $a=-۶$ در معادله داریم:

معادله: $۲x^۲-۶x=-۴\Rightarrow ۲x^۲-۶x+۴=۰\quad(*)$

$$\xrightarrow{(*)\div ۲}x^۲-۳x+۲=۰\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است}}\begin{cases}x=۱\\x=۲\end{cases}$$

روش ۲ برای محاسبهٔ ریشهٔ دیگر می‌توانیم از ضرب ریشه‌ها در $(*)$ استفاده کنیم: (ریشهٔ دیگر را α در نظر می‌گیریم.)

$$\text{ضرب ریشه‌ها}=\frac{۲}{۱}\Rightarrow ۲\alpha=۲\Rightarrow\alpha=۱$$

.۷۸ **۴** معادله را مرتب می‌کنیم:

$$(x-۱)(x-۳)+۲+k^۲=۰\Rightarrow x^۲-۴x+۳+۲+k^۲=۰$$

$$\Rightarrow x^۲-۴x+۵+k^۲=۰$$

در مرحلهٔ اول ببینیم معادله اصلاً ریشه دارد یا خیر:

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۴)^۲-۴(۱)(۵+k^۲)=۱۶-۲۰-۴k^۲$$

$$=-۴-۴k^۲=-۴(۱+k^۲)\xrightarrow{۱+k^۲>۰}-۴(۱+k^۲)<۰$$

$$\Rightarrow\Delta<۰$$

چون $\Delta<۰$ شد معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

.۷۹ **۳** برای این‌که معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز داشته باشد، باید $\Delta>۰$ باشد:

$$\Rightarrow ۳۶-۴(۲m-۱)(m-۲)>۰$$

$$\xrightarrow{\div(-۴)}(۲m-۱)(m-۲)-۹<۰$$

$$\Rightarrow ۲m^۲-۴m-m+۲-۹<۰\Rightarrow ۲m^۲-۵m-۷<۰$$

در معادلهٔ $۲m^۲-۵m-۷=۰$، $a+c=b$ است. در نتیجه یکی از ریشه‌ها -۱ و ریشهٔ دیگر $-\frac{c}{a}=\frac{۷}{۲}=۳/۵$ است. در نتیجه:

$$۲m^۲-۵m-۷<۰\Rightarrow -۱<m<۳/۵$$

باید توجه داشت که به ازای $m=\frac{۱}{۲}$ با یک معادلهٔ درجهٔ اول روبه‌رو هستیم که تنها یک ریشه دارد. پس قابل قبول نیست، اما با توجه به گزینه‌ها به طور قطع، **۳** گزینهٔ موردنظر طراح است.

.۸۰ **۲** چون معادله ریشهٔ مضاعف دارد، پس:

$$\Delta=۰\Rightarrow(-(۲m+۳))^۲-۴(m^۲)=۰$$

$$\Rightarrow ۴m^۲+۱۲m+۹-۴m^۲=۰\Rightarrow ۱۲m+۹=۰$$

$$\Rightarrow m=-\frac{۹}{۱۲}=-\frac{۳}{۴}$$

اما طراح از ما مقدار ریشه را می‌خواهد نه مقدار m را؛ پس برای یافتن ریشه از نکتهٔ زیر کمک می‌گیریم:

نکته: اگر معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، این ریشه برابر $-\frac{b}{۲a}$ است.

در نتیجه در معادلهٔ $x^۲-(۲m+۳)x+m^۲=۰$ ریشهٔ مضاعف برابر است با:

$$x=-\frac{b}{۲a}=\frac{۲m+۳}{۲}\xrightarrow{m=-\frac{۳}{۴}}x=\frac{-\frac{۳}{۲}+۳}{۲}=\frac{۳}{۴}$$

.۸۱ **۳** روش ۱

سمت چپ تساوی‌های $x^۲+۶x+m=۰$ و $x^۲+۲x-۳m=۰$ را برابر قرار می‌دهیم:

$$\cancel{x^۲}+۶x+m=\cancel{x^۲}+۲x-۳m\Rightarrow ۴x=-۴m\Rightarrow m=-x$$

حالا در یکی از معادله‌ها، با جای‌گذاری $-x$ جای m، معادله‌ها را حل می‌کنیم:

$$x^۲+۶x+m=۰\xrightarrow{m=-x}x^۲+۵x=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=-۵\end{cases}$$

پس ریشهٔ مشترک $x=-۵$ و در نتیجه $m=-x=۵$ است. هر دو معادله را حل می‌کنیم تا ریشه‌های دیگرشان هم به دست آید:

$$x^۲+۶x+m=۰\xrightarrow{m=۵}x^۲+۶x+۵=۰$$

$$\Rightarrow(x+۱)(x+۵)=۰\xrightarrow{\text{ریشهٔ دیگر}}x=-۱$$

$$x^۲+۲x-۳m=۰\xrightarrow{m=۵}x^۲+۲x-۱۵=۰$$

$$\Rightarrow(x+۵)(x-۳)=۰\xrightarrow{\text{ریشهٔ دیگر}}x=۳$$

اختلاف دو ریشهٔ غیرمشترک برابر است با: $۳-(-۱)=۴$

روش ۲ ریشهٔ مشترک دو معادله را $x_۱$ می‌گیریم. در هر دو معادله، مجموع ریشه‌ها را حساب می‌کنیم:

$$x^۲+۶x+m=۰\Rightarrow x_۱+x_۲=-۶$$

$$x^۲+۲x-۳m=۰\Rightarrow x_۱+x'_۲=-۲$$

طرفین دو تساوی را از هم کم می‌کنیم:

$$(x_۱+x'_۲)-(x_۱+x_۲)=-۲-(-۶)\Rightarrow x'_۲-x_۲=۴$$

.۸۲ **۴** ریشهٔ مشترک دو معادله، ریشه‌ای است که در هر دو معادله صدق می‌کند؛ یعنی اگر $x=\alpha$ ریشهٔ مشترک باشد، آن‌گاه با توجه به معادلات داده‌شده داریم:

$$\begin{cases}\alpha^۲+۳\alpha+۱=۰\\\alpha^۲-۴\alpha+۲=۰\end{cases}\xrightarrow{\text{کم}}۷\alpha-۱=۰\Rightarrow\alpha=\frac{۱}{۷}$$

حالا باید چک کنیم ببینیم $\alpha=\frac{۱}{۷}$ ریشهٔ معادلات فوق هست یا نه: (تو یک معادله چک کنیم کافیه!)

$$(\frac{۱}{۷})^۲+۳(\frac{۱}{۷})+۱\neq ۰$$

پس دو معادله ریشهٔ مشترک ندارند.

۸۳. ۳ پول اولیهٔ علی را x و پول اولیهٔ اکرم را y در نظر می‌گیریم.

مجموع پول علی و اکرم ۱۰۰ تومان است. پس: $x+y=۱۰۰$

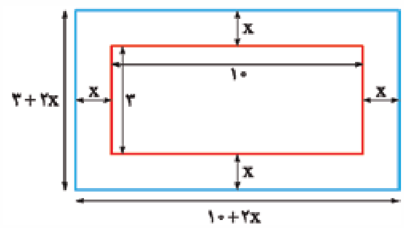
اگر علی ۱۰ تومان از پولش را به اکرم بدهد آن‌گاه علی $(x-۱۰)$ و اکرم $(y+۱۰)$ تومان خواهند داشت. در نتیجه با توجه به این‌که حاصل‌ضرب پول‌های آن‌ها ۴۷۵ تومان است، پس: $(x-۱۰)(y+۱۰)=۴۷۵=۵\times ۹۵$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۱۰=۵ \Rightarrow x=۱۵ \\ y+۱۰=۹۵ \Rightarrow y=۸۵ \end{cases}$$

پس پول اولیهٔ اکرم ۸۵ تومان است.

دقت کنید که ۴۹۵ را می‌توان به صورت ۲۵×۱۹ هم در نظر گرفت اما در این حالت بعد از محاسبهٔ x و y، تساوی $x+y=۱۰۰$ برقرار نخواهد شد.

۸۴. ۱ اگر پهنای آبراه را x در نظر بگیریم، اندازه‌های روی شکل به صورت مقابل می‌شود:



مساحت آبراه برابر تفاضل مساحت مستطیل کوچک‌تر از مستطیل بزرگ‌تر است:

$$\text{مساحت آبراه}=(۱۰+۲x)(۳+۲x)-(۳)(۱۰)$$

$$=۴x^۲+۲۶x+۳۰-۳۰=۴x^۲+۲۶x$$

مساحت آبراه ۳۰ است، پس داریم: $۴x^۲+۲۶x=۳۰ \Rightarrow ۴x^۲+۲۶x-۳۰=۰$

$$\xrightarrow{\text{جمع ضرایب}=۰} \begin{cases} x=۱ \\ x=\frac{-۳۰}{۴} \quad ✗ \end{cases}$$

پس پهنای آبراه برابر ۱ متر است.

۸۵. ۱

$$x^۲-۴x-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-۴}{(۱)}=۴ \\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-۲}{۱}=-۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta+\alpha\beta=۴+(-۲)=۲$$

۸۶. ۲ $۳x^۲-۲x=۶ \Rightarrow ۳x^۲-۲x-۶=۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{جمع ریشه‌ها}: \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-۲}{۳}=\frac{۲}{۳} \\ \text{ضرب ریشه‌ها}: \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-۶}{۳}=-۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{\frac{۲}{۳}}{-۲}=-\frac{۱}{۳}$$

۸۷. ۱ فاصلهٔ بین ریشه‌ها یعنی $|\alpha-\beta|$. در درس‌نامه گفتیم:

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$x^۲-۶x+۳=۰ \Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۳۶-۱۲=۲۴, a=۱$$

$$\Rightarrow |\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{۲۴}}{۱}=۲\sqrt{۶}$$

۸۸. ۲ روش ۱ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-(a+۱)x+a=۰$ دو عدد فرد متوالی طبیعی است. از آن‌جا که تفاضل دو عدد طبیعی فرد متوالی برابر ۲ است، پس قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها برابر ۲ است:

$$\Rightarrow |x_۱-x_۲|=۲ \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|\text{ضریب } x^۲|}=۲ \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{۱}=۲$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta}=۲ \Rightarrow \Delta=۴$$

$$\Rightarrow (a+۱)^۲-۴a=۴ \Rightarrow a^۲+۲a+۱-۴a=۴ \Rightarrow (a-۱)^۲=۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-۱=۲ \Rightarrow a=۳ \xrightarrow{\text{در معادله}} x^۲-۴x+۳=۰ \\ \Rightarrow (x-۱)(x-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=۳ \end{cases} \quad ✓ \\ a-۱=-۲ \Rightarrow a=-۱ \xrightarrow{\text{در معادله}} x^۲-۱=۰ \\ \Rightarrow x=\pm ۱ \quad (\text{یکی طبیعی نیست.}) \quad ✗ \end{cases}$$

پس $a=۳$ قابل قبول است. با قرارداد $a=۳$ در معادلهٔ دوم:

معادله: $x^۲-۱۰x+b=۰$

ریشه‌های این معادله دو عدد زوج متوالی است. با توجه به این‌که جمع ریشه‌ها برابر ۱۰ است، پس دو عدد، ۴ و ۶ هستند؛ پس:

$$\begin{rcases} \text{حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ اول}=(۳)(۱)=۳ \\ \text{حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ دوم}=(۴)(۶)=۲۴ \end{rcases} \Rightarrow \text{اختلاف}=۲۱$$

روش ۲ دقت کنید که در معادلهٔ $x^۲-(a+۱)x+a=۰$ مجموع ضرایب برابر صفر است پس یک ریشه برابر ۱ و ریشهٔ دیگر برابر a است. در نتیجه با توجه به این‌که دو عدد فرد متوالی طبیعی هستند پس ریشهٔ دیگر برابر ۳ است و در نتیجه: $a=۳$

۸۹. ۱

$$\text{مجموع ریشه‌ها}=\text{معکوس حاصل‌ضرب ریشه‌ها} \Rightarrow -\frac{b}{a}=\frac{۱}{\frac{c}{a}}$$

$$\Rightarrow -\frac{b}{a}=\frac{a}{c} \Rightarrow a^۲=-bc \Rightarrow a^۲+bc=۰$$

با توجه به معادله داریم:

$$۳^۲+(۲m-۱)(۲-m)=۰ \Rightarrow ۹+۴m-۲m^۲+m-۲=۰$$

$$\Rightarrow -۲m^۲+۵m+۷=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m=-۱ \\ m=-\frac{c}{a}=\frac{۷}{۲} \end{cases}$$

اما به ازای $m=-۱$ معادله به صورت $۳x^۲+x+۱=۰$ خواهد بود که دلتای آن منفی است و ریشهٔ حقیقی ندارد. پس $m=\frac{۷}{۲}$ قابل قبول است.

۹۰. ۴ وقتی حاصل‌ضرب دو پرانتز صفر باشد، هر کدام می‌توانند صفر باشند:

$$\begin{cases} x^۲+nx+۵=۰ \\ x^۲+۶x+n=۰ \end{cases}$$

برای این‌که چهار جواب داشته باشیم، باید هر معادله دو جواب داشته باشد؛ پس دلتای هر دو معادلهٔ بالا باید مثبت باشد:

$$\begin{rcases} \Delta_۱>۰ \Rightarrow n^۲-۲۰>۰ \Rightarrow n^۲>۲۰ \Rightarrow n>\sqrt{۲۰} \\ \Delta_۲>۰ \Rightarrow ۳۶-۴n>۰ \Rightarrow n<۹ \end{rcases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} \underbrace{\sqrt{۲۰}}_{۴/...}<n<۹ \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n=۵,۶,۷,۸$$

به ازای هر چهار مقدار به دست آمده برای n، جواب‌های دو معادلهٔ $\underbrace{x^۲+nx+۵=۰}_{\text{معادلهٔ اول}}$ و $\underbrace{x^۲+۶x+n=۰}_{\text{معادلهٔ دوم}}$ را چک می‌کنیم. اگر یک جواب گویا هم بدهند، آن حالت رد می‌شود:

$$n=۵ \xrightarrow{\text{معادلهٔ دوم}} x^۲+۶x+۵=۰ \xrightarrow{a+c=b} x_۱=-۱,\ x_۲=-۵ \times$$

$$n=۶ \xrightarrow{\text{معادلهٔ اول}} x^۲+۶x+۵=۰ \xrightarrow{a+c=b} x_۱=-۱,\ x_۲=-۵ \times$$

$$n=۷ \Rightarrow \begin{cases} x^۲+۷x+۵=۰ \Rightarrow \Delta=۲۹ \Rightarrow \text{دو ریشهٔ گنگ} \\ x^۲+۶x+۷=۰ \Rightarrow \Delta=۸ \Rightarrow \text{دو ریشهٔ گنگ} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{چهار ریشهٔ گنگ} \checkmark$$

$$n=۸ \xrightarrow{\text{معادلهٔ دوم}} x^۲+۶x+۸=۰ \Rightarrow (x+۲)(x+۴)=۰ \Rightarrow x_۱=-۲,\ x_۲=-۴ \times$$

پس فقط $n=۷$ قبول است.

حاصل‌ضرب ریشه‌های دو معادلهٔ $x^۲+۷x+۵=۰$ و $x^۲+۶x+۷=۰$ به ترتیب $P_۱=\frac{c_۱}{a_۱}=۵$ و $P_۲=۷$ و حاصل‌ضرب هر چهار ریشه برابر با $P_۱P_۲=۵\times۷=۳۵$ است.

۹۱. **۳** می‌خواهیم مجموع ریشه‌ها از حاصل‌ضرب ریشه‌ها دو واحد بیشتر باشد، یعنی: $S=P+۲\ (*)$

با توجه به معادله $ax^۲+bx-c=۰$، داریم: $S=-\frac{b}{a},\ P=-\frac{c}{a}$

$$\xrightarrow{(*)} -\frac{b}{a}=-\frac{c}{a}+۲ \xrightarrow{\times(a)} -b=-c+۲a$$

$$\Rightarrow ۲a=c-b$$

چون $۲a$ عددی زوج است پس باید تفاضل c و b عددی زوج باشد؛ بنابراین باید هر دو زوج یا هر دو فرد باشند. چون مقادیر b و c از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,\cdots,۹\}$ هستند بنابراین باید دو عدد فرد یا دو عدد زوج از این مجموعه انتخاب کنیم:

$$\Rightarrow \text{تعداد کل حالات} = \underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{انتخاب دو عدد فرد}} + \underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{انتخاب دو عدد زوج}} = ۱۰+۶=۱۶$$

۹۲. **۱** $\text{مجموع مربعات ریشه‌ها}=\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P$

S و P را از معادله پیدا می‌کنیم:

$$۲x^۲+۳x-۶=۰ \Rightarrow \begin{cases} S=-\frac{b}{a}=-\frac{۳}{۲} \\ P=\frac{c}{a}=\frac{-۶}{۲}=-۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P=(-\frac{۳}{۲})^۲-۲(-۳)=\frac{۹}{۴}+۶=\frac{۹+۲۴}{۴}=\frac{۳۳}{۴}$$

۹۳. **۳**

$$۲x^۲-۵x-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=\frac{۵}{۲} \\ P=\alpha\beta=-\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

برای محاسبهٔ حاصل عبارت داده‌شده مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\beta\alpha}=\frac{S^۲-۲P}{P}=\frac{(\frac{۵}{۲})^۲-۲(-\frac{۳}{۲})}{-\frac{۳}{۲}}$$

$$=\frac{\frac{۲۵}{۴}+۳}{-\frac{۳}{۲}}=\frac{\frac{۳۷}{۴}}{-\frac{۳}{۲}}=-\frac{۳۷}{۶}$$

۹۴. **۲** $\text{مجموع مکعبات ریشه‌ها}=\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$$=S^۳-۳PS\quad(*)$$

از معادله، S و P را محاسبه می‌کنیم:

$$x^۲-۳x-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-۳}{۱}=۳ \\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-۲}{۱}=-۲ \end{cases}$$

پس: $\text{مجموع مکعبات ریشه‌ها} \xrightarrow{(*)} =(۳)^۳-۳(-۲)(۳)$

$$=۲۷+۱۸=۴۵$$

۹۵. **۳** چون رادیکالی است، به توان دو می‌رسانیم:

$$A=\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}} \Rightarrow A^۲=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+\frac{۲}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

در دو کسر اول مخرج مشترک می‌گیریم:

$$A^۲=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}+\frac{۲}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{S}{P}+\frac{۲}{\sqrt{P}}\quad(*)$$

S و P را از معادلهٔ داده‌شده حساب می‌کنیم:

$$۴x^۲-۱۲x+۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} S=-\frac{b}{a}=-\frac{-۱۲}{۴}=۳ \\ P=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

همینا رو تو رابطهٔ (*) قرار میدیم:

$$A^۲=\frac{۳}{\frac{۱}{۴}}+\frac{۲}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}}=۱۲+\frac{۲}{\frac{۱}{۲}}=۱۶ \Rightarrow A=۴$$

۹۶. **۳** باید معادله را مرتب کنیم:

$$x^۲-\sqrt{۲}x+\sqrt{۲}-x=۰ \Rightarrow x^۲-(\sqrt{۲}+۱)x+\sqrt{۲}=۰$$

مجموع ضرایب معادله صفر است، پس یک ریشه، ۱ و ریشهٔ دیگر $\frac{c}{a}$ است:

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=۱ \\ \beta=\frac{\sqrt{۲}}{۱}=\sqrt{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲}=\frac{۱}{(۱)^۲}+\frac{۱}{(\sqrt{۲})^۲}=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

۹۷. **۴** *خیلی سؤال بیفود ولی در عین حال ابتکاری و قشنگیه! ببین چی‌کار می‌کنم:*

$$x^۲-(\frac{۱}{a^۴}+a^۲)x+\frac{۱}{a^۲}=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{جمع ریشه‌ها}: x_۱+x_۲=\frac{۱}{a^۴}+a^۲ \\ \text{ضرب ریشه‌ها}: x_۱x_۲=\frac{۱}{a^۲} \end{cases}$$

اگر $x_۱=\frac{۱}{a^۴}$ و $x_۲=a^۲$ در نظر گرفته شود، تساوی‌های بالا برقرار می‌شوند.

حالا حاصل عبارت خواسته‌شده را می‌یابیم:

$$\frac{x_۱}{x_۲}+\frac{x_۲}{x_۱}=\frac{\frac{۱}{a^۴}}{a^۲}+\frac{a^۲}{\frac{۱}{a^۴}}=\frac{۱}{a^۶}+a^۶$$

۹۸. **۲**

$$x^۲-۵x+۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=۵ \\ P=\alpha\beta=۳ \end{cases}$$

برای محاسبهٔ $\alpha^۴+\beta^۴$ از اتحاد فرعی اتحاد اول استفاده می‌کنیم:

$$\alpha^۴+\beta^۴=(\alpha^۲+\beta^۲)^۲-۲\alpha^۲\beta^۲=(S^۲-۲P)^۲-۲P^۲$$

$$=(۵^۲-۲(۳))^۲-۲(۳)^۲=۱۹^۲-۱۸=۳۶۱-۱۸=۳۴۳$$

$$\Rightarrow \text{ریشهٔ سوم } \alpha^۴+\beta^۴=\sqrt[۳]{۳۴۳}=\sqrt[۳]{۷^۳}=۷$$

۹۹. ۳

$$x^۲-۶x+۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=۶ \\ P=\alpha\beta=۲ \end{cases} \quad (*)$$

حالا حاصل عبارت داده‌شده را می‌یابیم:

$$(\alpha+\frac{۱}{\alpha})^۲+(\beta+\frac{۱}{\beta})^۲=\alpha^۲+\frac{۱}{\alpha^۲}+۲+\beta^۲+\frac{۱}{\beta^۲}+۲$$

$$=(\alpha^۲+\beta^۲)+(\frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲})+۴=(\alpha^۲+\beta^۲)+(\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha^۲\beta^۲})+۴$$

$$=(S^۲-۲P)+\frac{S^۲-۲P}{P^۲}+۴$$

$$\overset{(*)}{=}(۳۶-۴)+\frac{۳۶-۴}{۴}+۴=۳۲+۸+۴=۴۴$$

۱۰۰. ۱ α ریشهٔ معادله است، پس آن را در معادله قرار می‌دهیم:

$$\alpha^۲-۲\alpha-۴=۰ \Rightarrow \alpha^۲-۴=۲\alpha \quad (*)$$

آهان! خوب شد. پس عبارتمون این شکلی می‌شه:

$$(\alpha^۲-۴)^۲+۴\beta^۲ \overset{(*)}{=} (۲\alpha)^۲+۴\beta^۲=۴\alpha^۲+۴\beta^۲$$

$$=۴(\alpha^۲+\beta^۲)=۴(S^۲-۲P)$$

S و P هم که از معادلهٔ داده‌شده حساب می‌شود:

$$x^۲-۲x-۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} S=-\frac{-۲}{۱}=۲ \\ P=\frac{-۴}{۱}=-۴ \end{cases}$$

پس: $(\alpha^۲-۴)^۲+۴\beta^۲=۴(S^۲-۲P)=۴(۲^۲-۲(-۴))$

$$=۴(۴+۸)=۴۸$$

۱۰۱. ۴ $x_۲$ ریشهٔ معادله است پس در معادله صدق می‌کند:

$$x_۲^۲+۲x_۲-۱=۰ \Rightarrow ۲x_۲-۱=-x_۲^۲ \quad (*)$$

پس در عبارت خواسته‌شده داریم:

$$x_۱^۴+(۲x_۲-۱)^۲ \overset{(*)}{=} x_۱^۴+(-x_۲^۲)^۲=x_۱^۴+x_۲^۴$$

$$=(x_۱^۲+x_۲^۲)^۲-۲x_۱^۲x_۲^۲=(S^۲-۲P)^۲-۲P^۲ \quad (**)$$

با توجه به معادلهٔ $x^۲+۲x-۱=۰$، $S=-۲, P=-۱$ است.

در نتیجه: $\xrightarrow{(**)} (S^۲-۲P)^۲-۲P^۲=(۴+۲)^۲-۲=۳۴$

۱۰۲. ۲ α و β ریشه‌های معادله هستند، پس در معادله صدق می‌کنند:

ریشه است $\alpha: ۲\alpha^۲-۴\alpha+۱=۰ \xrightarrow{\div\alpha} ۲\alpha-۴+\frac{۱}{\alpha}=۰$

$$\Rightarrow ۲\alpha+\frac{۱}{\alpha}=۴ \Rightarrow (۲\alpha+\frac{۱}{\alpha})^۲=(۴)^۲=۱۶$$

ریشه است $\beta: ۲\beta^۲-۴\beta+۱=۰ \Rightarrow ۲\beta^۲-۴\beta=-۱$

$$\Rightarrow ۲(\beta^۲-۲\beta)=-۱ \Rightarrow \beta^۲-۲\beta=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین: $\frac{(۲\alpha+\frac{۱}{\alpha})^۲}{\beta^۲-۲\beta}=\frac{۱۶}{-\frac{۱}{۲}}=-۳۲$

۱۰۳. ۴ α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۲x-۴=۰$ هستند، پس در معادله صدق می‌کنند:

ریشه است $\alpha: \alpha^۲+۲\alpha-۴=۰ \Rightarrow \alpha(\alpha+۲)=۴$

$$\Rightarrow \alpha+۲=\frac{۴}{\alpha}$$

ریشه است $\beta: \beta^۲+۲\beta-۴=۰ \Rightarrow \beta(\beta+۲)=۴$

$$\Rightarrow \beta+۲=\frac{۴}{\beta} \Rightarrow \frac{\alpha}{(\alpha+۲)^۲}+\frac{\beta}{(\beta+۲)^۲}=\frac{\alpha}{(\frac{۴}{\alpha})^۲}+\frac{\beta}{(\frac{۴}{\beta})^۲}$$

$$=\frac{\alpha}{\frac{۱۶}{\alpha^۲}}+\frac{\beta}{\frac{۱۶}{\beta^۲}}=\frac{\alpha^۳+\beta^۳}{۱۶}=\frac{S^۳-۳PS}{۱۶}$$

با توجه به معادلهٔ $x^۲+۲x-۴=۰$، $S=-۲$ و $P=-۴$ است، در نتیجه:

حاصل عبارت $=\frac{(-۲)^۳-۳(-۴)(-۲)}{۱۶}=\frac{-۸-۲۴}{۱۶}=-۲$

۱۰۴. ۳ رابطهٔ داده‌شده فقط برحسب α است. از جمع یا ضرب ریشه‌ها کمک می‌گیریم تا رابطه را برحسب α و β بنویسیم.

$$P=۲ \Rightarrow \alpha\beta=۲ \Rightarrow \beta=\frac{۲}{\alpha} \Rightarrow \beta^۲=\frac{۴}{\alpha^۲} \quad (*)$$

از طرفی در عبارت داده‌شده داریم:

$$\frac{\alpha^۴-۴}{\alpha^۲}=\alpha^۲-\frac{۴}{\alpha^۲} \overset{(*)}{=} \alpha^۲-\beta^۲=(\alpha-\beta)\underbrace{(\alpha+\beta)}_{S} \quad (**)$$

همچنین با توجه به این‌که $\alpha<\beta$ است پس $\alpha-\beta<۰$ و در نتیجه:

$$\alpha-\beta=-\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

پس: $\xrightarrow{(**)} \alpha^۲-\beta^۲=(-\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|})(S)$

حالا با توجه به معادلهٔ $x^۲-۶x+۲=۰$ حاصل را می‌یابیم:

$$\alpha^۲-\beta^۲=(-\frac{\sqrt{۳۶-۸}}{|۱|})(۶)=(-۲\sqrt{۷})۶=-۱۲\sqrt{۷}$$

۱۰۵. ۳ α جواب معادله است. پس در معادله صدق می‌کند:

$$\alpha^۲-\alpha-۱=۰ \Rightarrow \alpha^۲=\alpha+۱ \quad (*)$$

چون $\alpha^۳$ را لازم داریم، پس طرفین را در α ضرب می‌کنیم:

$$\alpha^۳=\alpha^۲+\alpha \xrightarrow{(*)} \alpha^۳=\alpha+۱+\alpha \Rightarrow \alpha^۳=۲\alpha+۱ \quad (۱)$$

β هم جواب معادله است، پس این هم در معادله صدق می‌کند:

$$\beta^۲-\beta-۱=۰ \Rightarrow \beta^۲=\beta+۱ \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) حاصل عبارت را حساب می‌کنیم:

$$\alpha^۳+۲\beta^۲=۲\alpha+۱+۲(\beta+۱)=۲\alpha+۱+۲\beta+۲=۲(\alpha+\beta)+۳$$

$\alpha+\beta$ هم که از معادله حساب می‌شود:

$$x^۲-x-۱=۰ \Rightarrow \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-۱}{۱}=۱$$

$$\Rightarrow \alpha^۳+۲\beta^۲=۲(\alpha+\beta)+۳=۲(۱)+۳=۵$$

۱۰۶. ۲ ریشه‌ها را α و β در نظر می‌گیریم. یک ریشه (α) از نصف ریشهٔ دیگر (β)، ۵ واحد بیشتر است:

$$\alpha=\frac{\beta}{۲}+۵ \quad (*)$$

با توجه به معادله، جمع ریشه‌ها را داریم:

$$x^۲-۸x+m=۰ \Rightarrow \alpha+\beta=۸$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{\beta}{۲}+۵+\beta=۸ \Rightarrow \frac{۳\beta}{۲}=۳ \Rightarrow \beta=۲$$

$\beta=۲$ ریشهٔ معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$\Rightarrow ۲^۲-۸(۲)+m=۰ \Rightarrow m=۱۲$$

۱۰۷. **۲** ریشه‌ها را α و β در نظر می‌گیریم:

یک ریشه (α) از سه برابر ریشهٔ دیگر (β) سه واحد بیشتر است:

$$\alpha=۳\beta+۳ \quad (*)$$

جمع ریشه‌ها را داریم:

$$۳x^۲-۱۷x+m=۰ \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{۱۷}{۳}$$

$$\xrightarrow{(*)} ۳\beta+۳+\beta=\frac{۱۷}{۳} \Rightarrow ۴\beta=\frac{۱۷}{۳}-۳=\frac{۸}{۳}$$

$$\Rightarrow \beta=\frac{۲}{۳} \xrightarrow{(*)} \alpha=۳\beta+۳=۳(\frac{۲}{۳})+۳=۵$$

$\alpha=۵$ ریشهٔ معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$۳(۵)^۲-۱۷(۵)+m=۰ \Rightarrow m=۱۰$$

می‌توانستید همان $\beta=\frac{۲}{۳}$ را در معادله قرار دهید، اما چون کسری بود کمی محاسباتش سخت می‌شد.

۱۰۸. **۱** با توجه به معادله داریم: $P=\alpha\beta=\frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta=۴$

با توجه به رابطهٔ $\alpha\beta^۲+۴=۰$ داریم:

$$(\alpha\beta)(\beta)+۴=۰ \xrightarrow{\alpha\beta=۴} ۴\beta+۴=۰ \Rightarrow \beta=-۱$$

$\beta=-۱$ ریشهٔ معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$(-۱)^۲-۳m(-۱)+۴=۰ \Rightarrow ۱+۳m+۴=۰ \Rightarrow m=-\frac{۵}{۳}$$

۱۰۹. **۳** یکی از ریشه‌ها (α) از مجذور ریشهٔ دیگر (β) ۴ واحد کم‌تر است؛ یعنی:

$$\alpha=\beta^۲-۴ \quad (*)$$

از طرفی با توجه به معادله:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-۲a}{a} \Rightarrow \alpha+\beta=۲ \xrightarrow{(*)} \beta^۲-۴+\beta=۲$$

$$\Rightarrow \beta^۲+\beta-۶=۰ \Rightarrow (\beta-۲)(\beta+۳)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\beta=۲ \xrightarrow{(*)} \alpha=۰\\ \beta=-۳ \xrightarrow{(*)} \alpha=۵\end{cases}$$

۱۱۰. **۲** اول معادله را مرتب می‌کنیم:

$$x(x-m)=m^۲+۱ \Rightarrow x^۲-mx-m^۲-۱=۰$$

با توجه به معادله حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}=-m^۲-۱$ است و با توجه به این‌که $-m^۲-۱<۰$ پس $\frac{c}{a}<۰$ است. در نتیجه یکی از ریشه‌ها مثبت و ریشهٔ دیگر منفی است. فرض کنیم $\alpha>۰$ و $\beta<۰$ است، بنابراین:

$$\left||\underbrace{\alpha}_{+}|-|\underbrace{\beta}_{-}|\right|=۴ \Rightarrow |\alpha-(-\beta)|=۴ \Rightarrow |\alpha+\beta|=۴$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به معادله}} |m|=۴ \Rightarrow m=\pm۴$$

با توجه به گزینه‌ها $m=-۴$ قابل قبول است.

۱۱۱. **۴**

$$x^۲+mx-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases}S=\alpha+\beta=-m\\P=\alpha\beta=-۳\end{cases}$$

رابطهٔ بین ریشه‌ها به صورت $۲\alpha+\beta=۴$ است، پس:

$$\alpha+\underbrace{\alpha+\beta}_{S}=۴ \Rightarrow \alpha-m=۴ \Rightarrow \alpha=m+۴$$

α ریشهٔ معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$x^۲+mx-۳=۰ \xrightarrow{\alpha=m+۴} (m+۴)^۲+m(m+۴)-۳=۰$$

$$\Rightarrow m^۲+۸m+۱۶+m^۲+۴m-۳=۰$$

$$\Rightarrow ۲m^۲+۱۲m+۱۳=۰ \Rightarrow m=\frac{-۱۲\pm\sqrt{۱۴۴-۴(۲)(۱۳)}}{۲(۲)}$$

$$=\frac{-۱۲\pm\sqrt{۴۰}}{۴}=\frac{-۱۲\pm۲\sqrt{۱۰}}{۴}=\frac{-۶\pm\sqrt{۱۰}}{۲}$$

دقت کنید که چون $\frac{c}{a}<۰$ است، پس معادله حتماً دو ریشهٔ حقیقی دارد.

۱۱۲. **۳** چون قطعاً به S و P احتیاج داریم همان اول S و P را پیدا کنیم:

$$x^۲-mx-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases}S=m\\P=-۲\end{cases} \quad (*)$$

رابطه‌ای که داریم را با S و P ساده‌تر می‌کنیم:

$$x_۱x_۲^۲+۲x_۱^۲x_۲=۴ \Rightarrow x_۱x_۲(x_۲+۲x_۱)=۴$$

$$\Rightarrow \underbrace{x_۱x_۲}_{P}(\underbrace{x_۲+x_۱}_{S}+x_۱)=۴$$

$$\xrightarrow{(*)} (-۲)(m+x_۱)=۴ \Rightarrow m+x_۱=-۲ \Rightarrow x_۱=-۲-m$$

$x_۱=-۲-m$ ریشهٔ معادله است پس در معادله صدق می‌کند، بنابراین به جای xهای معادلهٔ $x^۲-mx-۲=۰$، $-۲-m$ قرار می‌دهیم:

$$(-۲-m)^۲-m(-۲-m)-۲=۰$$

$$\Rightarrow ۴+m^۲+۴m+۲m+m^۲-۲=۰$$

$$\Rightarrow ۲m^۲+۶m+۲=۰ \xrightarrow{\div۲} m^۲+۳m+۱=۰$$

$$\Rightarrow m=\frac{-۳\pm\sqrt{۳^۲-۴(۱)(۱)}}{۲}=\frac{-۳\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

پس با توجه به گزینه‌ها، $m=\frac{\sqrt{۵}-۳}{۲}$ جواب است.

۱۱۳. **۱** رابطهٔ بین ریشه‌ها را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$۳\alpha^۲+۲\beta^۲=۱۲\sqrt{۲}+۸۵$$

$$\Rightarrow \frac{۳+۲}{۲}(\alpha^۲+\beta^۲)+\frac{۳-۲}{۲}(\alpha^۲-\beta^۲)=۱۲\sqrt{۲}+۸۵$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۲}(\alpha^۲+\beta^۲)+\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=۱۲\sqrt{۲}+۸۵ (*)$$

با توجه به این‌که $\alpha<\beta$؛ بنابراین $\alpha-\beta<۰$ و در نتیجه:

$$\alpha-\beta=-\frac{\sqrt{\Delta}}{|\text{ضریب } x^۲|}$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{۵}{۲}(S^۲-۲P)+\frac{۱}{۲}(-\frac{\sqrt{\Delta}}{۱})(S)=۱۲\sqrt{۲}+۸۵$$

با توجه به معادله $S=-۶$ و $p=a$. در نتیجه:

$$\frac{۵}{۲}(۳۶-۲a)+۳\sqrt{\Delta}=۱۲\sqrt{۲}+۸۵$$

با توجه به گزینه‌ها، a مقداری گویاست؛ پس باید:

$$\begin{cases}\frac{۵}{۲}(۳۶-۲a)=۸۵ \Rightarrow a=۱\\ ۳\sqrt{\Delta}=۱۲\sqrt{۲}\end{cases}$$

۱۱۴. **۴** با توجه به معادله:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{-۶}{۱}=۶,\ P=\alpha\beta=\frac{k}{۱}=k,\ (\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{۳۶-۴k}}{۱}$$

$$\beta^۲-۲\alpha^۲=-\frac{۱}{۲}(\alpha^۲+\beta^۲)-\frac{۳}{۲}(\alpha^۲-\beta^۲)$$

$$=-\frac{۱}{۲}(S^۲-۲P)-\frac{۳}{۲}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$$

$$=-\frac{۱}{۲}(۳۶-۲k)-\frac{۳}{۲}(-\sqrt{۳۶-۴k})(۶)=-۱۸+k+۱۸\sqrt{۹-k}$$

$$=۱۸\sqrt{۲}-۱۱ \Rightarrow k=۷$$

۱۱۵. **۲** برای این‌که ریشه‌های معادله معکوس هم باشند، باید $a=c$ و $\Delta>۰$ باشد؛ پس اول a را برابر c قرار می‌دهیم. mها را پیدا می‌کنیم. بعد بررسی می‌کنیم به ازای کدام مقدار m $\Delta>۰$ است. فقط قبلش باید معادله را مرتب کنیم:

$$mx^۲+۳x+m^۲=۲ \Rightarrow mx^۲+۳x+m^۲-۲=۰ \quad (*)$$

$$a=c \Rightarrow m=m^۲-۲ \Rightarrow m^۲-m-۲=۰$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m=-۱ \\ m=۲ \end{cases}$$

در معادلهٔ $(*)$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} -x^۲+۳x-۱=۰ \Rightarrow \Delta>۰ \Rightarrow \text{ قابل قبول است.} \ m=-۱ \\ ۲x^۲+۳x+۲=۰ \Rightarrow \Delta<۰ \ (\text{غیرقابل قبول}) \end{cases}$$

۱۱۶. **۳** یکی از ریشه‌ها (α)، مجذور دیگری (β) است. $\alpha=\beta^۲ \quad (*)$

با توجه به معادله، مقدار $\alpha+\beta$ را داریم:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha+\beta=۶ \xrightarrow{(*)} \beta^۲+\beta=۶$$

$$\Rightarrow \beta^۲+\beta-۶=۰ \Rightarrow (\beta+۳)(\beta-۲)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta=-۳ \xrightarrow[\text{صدق می‌کند}]{\text{در معادله}} (-۳)^۲-۶(-۳)+۵+m=۰ \\ \Rightarrow ۹+۱۸+۵+m=۰ \Rightarrow m=-۳۲ \\ \beta=۲ \xrightarrow[\text{صدق می‌کند}]{\text{در معادله}} ۲^۲-۶(۲)+۵+m=۰ \\ \Rightarrow ۴-۱۲+۵+m=۰ \Rightarrow m=۳ \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها، $m=-۳۲$ است.

۱۱۷. **۴** ریشه‌های معادله را α و β در نظر می‌گیریم.

$\frac{۱}{۸}:\frac{۱}{۸}=\frac{\alpha+\beta}{۲} \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{۱}{۴}$ واسطهٔ حسابی دو ریشه است.

با توجه به معادله:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-۳}{m^۲-۴} \Rightarrow \frac{۱}{۴}=\frac{۳}{m^۲-۴}$$

$$\Rightarrow m^۲-۴=۱۲ \Rightarrow m^۲=۱۶ \Rightarrow m=\pm۴$$

باید بررسی کنیم به ازای کدام مقدار m، Δ مثبت است (در معادلهٔ $(m^۲-۴)x^۲-۳x+m=۰$ قرار می‌دهیم.):

در معادله $m=۴: ۱۲x^۲-۳x+۴=۰$

$\xrightarrow{\Delta<۰}$ معادله ریشه ندارد $\Rightarrow$ $m=۴$ قابل قبول نیست.

پس $m=-۴$ است.

یادآوری: اگر k واسطهٔ حسابی دو عدد a و b باشد، آن‌گاه $k=\frac{a+b}{۲}$ است.

۱۱۸. **۲** طبق معمول ریشه‌ها را α و β در نظر می‌گیریم:

$\sqrt{۲}:(\sqrt{۲})^۲=\alpha\beta \Rightarrow \alpha\beta=۲$ واسطهٔ هندسی ریشه‌ها است

با توجه به معادله، $\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{m^۲-۳}{m}$. در نتیجه:

$$\frac{m^۲-۳}{m}=۲ \Rightarrow m^۲-۳=۲m \Rightarrow m^۲-۲m-۳=۰$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m=-۱ \\ m=۳ \end{cases}$$

طبق معمول باید چک کنیم به ازای کدام مقدار m، $\Delta>۰$ است:

در معادله $m=-۱: -x^۲-۵x-۲=۰$

$\xrightarrow{\Delta>۰}$ پس $m=-۱$ قابل قبوله

یادآوری: اگر k واسطهٔ هندسی b و a باشد، آن‌گاه $k^۲=ab$.

۱۱۹. **۴** β و α ریشه‌های معادلهٔ زیرهستند؛

$$x^۲+۲(a+۱)x+۲a-۱=۰$$

پس:

$$\begin{cases} S=\frac{-B}{A} \Rightarrow \alpha+\beta=-۲(a+۱) \\ P=\frac{C}{A} \Rightarrow \alpha\beta=۲a-۱ \end{cases}$$

سه عدد α، a و β، جملات متوالی دنبالهٔ هندسی‌اند؛ پس مربع وسطی با حاصل‌ضرب اولی و سومی برابر است:

$$a^۲=\alpha\beta \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{از P کمک}} a^۲=۲a-۱ \Rightarrow a^۲-۲a+۱=۰$$

$$\Rightarrow (a-۱)^۲=۰ \Rightarrow a=۱$$

۱۲۰. **۱** $\alpha^۲+\beta^۲=۶$: مجموع مربعات ریشه‌ها برابر ۶ است.

$$\Rightarrow S^۲-۲P=۶ \quad (*)$$

مقادیر S و P را از معادلهٔ داده‌شده محاسبه می‌کنیم:

$$mx^۲-(m+۳)x+۵=۰ \Rightarrow \begin{cases} \text{مجموع ریشه‌ها}: S=\frac{m+۳}{m} \\ \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}: P=\frac{۵}{m} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} (\frac{m+۳}{m})^۲-۲(\frac{۵}{m})=۶ \Rightarrow \frac{(m+۳)^۲}{m^۲}-\frac{۱۰}{m}=۶$$

$$\xrightarrow{\times m^۲} (m+۳)^۲-۱۰m=۶m^۲$$

$$\Rightarrow m^۲+۶m+۹-۱۰m=۶m^۲$$

$$\Rightarrow m^۲-۴m+۹=۶m^۲ \Rightarrow ۵m^۲+۴m-۹=۰$$

جمع ضرایب صفر است، پس: $m=۱, m=-\frac{۹}{۵}$

حالا باید بررسی کنیم به ازای کدام مقدار m، معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد یعنی دلتای آن مثبت است. از مقدار راحت‌تر! شروع می‌کنیم:

در معادله $m=۱: x^۲-۴x+۵=۰$

$\xrightarrow{\Delta<۰}$ معادله ریشه ندارد. $\Rightarrow$ $m=۱$ قابل‌قبول‌نیست.

پس با توجه به گزینه‌ها $m=-\frac{۹}{۵}$ قابل قبول است.

۱۲۱. **۲**

تساوی $۲\alpha^۲+\beta^۲-۴\alpha=۷$ را با شکستن $۲\alpha^۲$، ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\alpha^۲+\alpha^۲+\beta^۲-۴\alpha=۷ \Rightarrow \underbrace{(\alpha^۲+\beta^۲)}_{S^۲-۲P}+(\underbrace{\alpha^۲-۴\alpha}_{\text{از روی معادله!}})=۷$$

طرفین معادلهٔ $۳x^۲-۱۲x-a=۰$ را به ۳ تقسیم می‌کنیم: $x^۲-۴x=\frac{a}{۳}$

α ریشهٔ معادله است، پس می‌تواند جای x بیاید: $\alpha^۲-۴\alpha=\frac{a}{۳}$

S و P معادله را هم حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} S=\frac{-B}{A}=\frac{۱۲}{۳}=۴ \\ P=\frac{C}{A}=\frac{-a}{۳} \end{cases}$$

سراغ تساوی اولمان می‌رویم:

$$\underbrace{(\alpha^۲+\beta^۲)}_{S^۲-۲P}+\underbrace{(\alpha^۲-۴\alpha)}_{\frac{a}{۳}}=۷ \Rightarrow ۴^۲-۲(\frac{-a}{۳})+\frac{a}{۳}=۷$$

$$\Rightarrow ۱۶+\frac{۲a}{۳}+\frac{a}{۳}=۷ \Rightarrow ۱۶+a=۷ \Rightarrow a=-۹$$

با جای‌گذاری $a=-9$، معادله به شکل $3x^2-12x+9=0$ درمی‌آید. آن را حل می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\div 3} x^2-4x+3=0 \Rightarrow (x-1)(x-3)=0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشهٔ بزرگ}} x=3$$

نسبت a به ریشهٔ بزرگ برابر است با: $\frac{-9}{3}=-3$

۱۲۲. **۴** از تقسیم طرفین تساوی $ax^2-ax-b=0$ بر a، داریم:

$$x^2-x-\frac{b}{a}=0 \xrightarrow{-\frac{b}{a}=c} x^2-x+c=0$$

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} S=\frac{-B}{A}=1 \\ P=\frac{C}{A}=c \end{cases}$$

$x=\beta$ ریشهٔ معادلهٔ $x^2-x+c=0$ است؛ پس حق داریم جای xها، β قرار دهیم:

$$\beta^2-\beta+c=0 \Rightarrow \beta=\beta^2+c$$

در تساوی $40\beta^2+20\alpha^2-20\underline{\beta}=17$، جای β مشخص‌شده، عبارت β^2+c قرار می‌دهیم:

$$40\beta^2+20\alpha^2-20(\beta^2+c)=17 \Rightarrow 20\alpha^2+20\beta^2-20c=17$$

$$\Rightarrow 20(\underbrace{\alpha^2+\beta^2}_{S^2-2P})=20c+17 \Rightarrow 20(1-2c)=20c+17$$

$$\Rightarrow 20-40c=20c+17 \Rightarrow 60c=3 \Rightarrow c=\frac{1}{20}$$

در نتیجه معادلهٔ اولیه به صورت $x^2-x+\frac{1}{20}=0$ بوده است. اختلاف ریشه‌های معادله را حساب می‌کنیم:

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|A|}=\frac{\sqrt{(-1)^2-4(1)(\frac{1}{20})}}{1}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

۱۲۳. **۳** معادلهٔ $2x^2-4x+m-3=0$ دو ریشهٔ مثبت دارد. پس باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} 1)\ \ \Delta>0 \Rightarrow 16-4(2)(m-3)>0 \\ \xrightarrow{\div(-8)} m-3-2<0 \Rightarrow m<5 \\ 2)\ \ \frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{m-3}{2}>0 \Rightarrow m>3 \\ 3)\ \ -\frac{b}{a}>0 \Rightarrow \frac{4}{2}>0 \Rightarrow 2>0\ (\text{همواره برقرار است.}) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} 3<m<5$$

۱۲۴. **۴** چون معادله یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی دارد پس حاصل‌ضرب ریشه‌ها منفی است یعنی $\frac{c}{a}<0$؛ وقتی هم $\frac{c}{a}$ منفی باشد قطعاً $\Delta>0$ است. از طرفی، ریشهٔ مثبت از قدرمطلق ریشهٔ منفی کوچک‌تر است (یعنی مثلاً ریشهٔ مثبت ۲ و ریشهٔ منفی، ۳− است که $|-3|>2$ شده) پس جمع ریشه‌ها منفی است، یعنی $-\frac{b}{a}<0$. اگر همین دوتا شرط را چک کنیم ***خواستهٔ مسئله اجرایی می‌شه!*** فقط اول معادله را مرتب کنیم: $x^2+m(x+2)=2 \Rightarrow x^2+mx+2m-2=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{a}<0 \Rightarrow \frac{2m-2}{1}<0 \Rightarrow 2m<2 \Rightarrow m<1 \\ -\frac{b}{a}<0 \Rightarrow -\frac{m}{1}<0 \Rightarrow m>0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} 0<m<1$$

۱۲۵. **۴** برای این‌که معادله دو ریشهٔ قرینه داشته باشد باید b (ضریب x) برابر صفر باشد (شرط $\Delta>0$ یا داشتن دو ریشه بررسی شود):

$$m^2-1=0 \Rightarrow m=\pm 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=1: -2x^2-1=0 \quad \text{ریشه ندارد.} \\ m=-1: -4x^2+1=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \\ \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}, \beta=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

بنابراین: $2\alpha^2+\beta^2=2(\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

۱۲۶. **۳** $(x+2)(x^2-x+m)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x^2-x+m=0\ \ (\text{ریشه‌ها را } \alpha \text{ و } \beta \text{ درنظر می‌گیریم.}) \end{cases}$$

حاصل‌ضرب سه ریشه برابر ۶ است:

$$(-2)(\alpha)(\beta)=6 \Rightarrow \alpha\beta=-3 \quad (*)$$

$\alpha\beta$ حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^2-x+m=0$ است، پس $\alpha\beta=\frac{c}{a}=m$ است در نتیجه: $\alpha\beta=m \xrightarrow{(*)} -3=m$

۱۲۷. **۳** از $\alpha+\beta=1$ و $\alpha\beta=-2$، نتیجه می‌گیریم $\alpha=2$ و $\beta=-1$ (یا برعکس). $\beta=-1$ ریشهٔ معادلهٔ $4x^3+kx^2-9x-2=0$ است؛ پس در آن صدق می‌کند:

$$4(-1)^3+k(-1)^2-9(-1)-2=0 \Rightarrow -4+k+9-2=0$$

$$\Rightarrow k=-3$$

۱۲۸. **۲** یکی از ریشه‌های معادله ۲ است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$\Rightarrow 2(a(2)^2-2-5)=2 \Rightarrow 4a-7=1 \Rightarrow 4a=8 \Rightarrow a=2$$

$$\Rightarrow \text{معادله}: x(2x^2-x-5)=2 \Rightarrow 2x^3-x^2-5x-2=0$$

چون $x=2$ ریشه است، پس عبارت $2x^3-x^2-5x-2$ یک عامل $x-2$ دارد. در نتیجه با تقسیم عبارت بر $x-2$ عامل‌های دیگر را می‌یابیم:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-x^2-5x-2 & x-2 \\ \hline -(2x^3-4x^2) & 2x^2+3x+1 \\ \quad 3x^2-5x & \\ \quad -(3x^2-6x) & \\ \qquad x-2 & \\ \qquad -(x-2) & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x^3-x^2-5x-2=(x-2)(2x^2+3x+1)$$

ریشه‌های دیگر از حل معادلهٔ $2x^2+3x+1=0$ به دست می‌آیند.

پس مجموع دو ریشهٔ دیگر برابر $-\frac{b}{a}=-\frac{3}{2}$ است.

نکته: در معادلهٔ درجه‌سوم $ax^3+bx^2+cx+d=0$، اگر معادله سه ریشه داشته باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}\\[2mm] (x_1)(x_2)(x_3)=-\dfrac{d}{a}\end{cases}$$

پس در معادلهٔ $2x^3-x^2-5x-2=0$، مجموع سه ریشه برابر است با:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow[x_1=2]{\text{یک ریشه ۲ است.}} 2+x_2+x_3=\frac{1}{2} \Rightarrow x_2+x_3=-\frac{3}{2}$$

پس مجموع دو ریشهٔ دیگر $-\frac{3}{2}$ است.

۱۲۹. **۱** در معادله از یک x فاکتور می‌گیریم تا به فرم ساده‌تری تبدیل شود:

$$x^3+(x^2-x)(x+1-m)=0$$

$$\Rightarrow x(x^2+(x-1)(x+1-m))=0$$

$$\Rightarrow x(x^2+(x^2-1-mx+m))=0$$

$$\Rightarrow x(2x^2-mx+m-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0\\ 2x^2-mx+m-1=0 \quad (*)\end{cases}$$

فرض کنیم ریشه‌های معادله $2x^2-mx+m-1=0$، α و β باشد. با توجه به این‌که مجذور ریشه‌ها برابر ۴ است، پس:

$$0^2+\alpha^2+\beta^2=4 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2=4 \Rightarrow S^2-2P=4 \quad (**)$$

با توجه به معادلهٔ $2x^2-mx+m-1=0$، $S=\frac{m}{2}$ و $P=\frac{m-1}{2}$ است، بنابراین:

$$\xrightarrow{(**)} \frac{m^2}{4}-2\left(\frac{m-1}{2}\right)=4 \Rightarrow \frac{m^2}{4}-m+1=4$$

$$\xrightarrow{\times 4} m^2-4m+4=16 \Rightarrow m^2-4m-12=0$$

$$\Rightarrow (m-6)(m+2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=6 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ }(*)} 2x^2-6x+5=0\\ \xrightarrow{\Delta<0} \text{ریشهٔ حقیقی ندارد}\\ m=-2 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ }(*)} 2x^2+2x-3=0\\ \xrightarrow{\Delta>0} \text{قابل قبول}\end{cases}$$

پس $m=-2$ قابل قبول است.

۱۳۰. **۲**

$$(x+2)(x^2+ax+2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2\\ x^2+ax+2=0 \ \text{(ریشه‌ها را } \alpha \text{ و } \beta \text{ در نظر می‌گیریم.)}\end{cases}$$

مجموع معکوس مربعات ریشه‌ها برابر $-\frac{a}{2}$ است. پس با توجه به این‌که ریشه‌ها، ۲−، α و β هستند داریم:

$$\frac{1}{(-2)^2}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=-\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{1}{4}+\frac{S^2-2P}{P^2}=-\frac{a}{2} \quad (*)$$

S و P را از معادلهٔ $x^2+ax+2=0$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} S=-a\\ P=2\end{cases} \xrightarrow{(*)} \frac{1}{4}+\frac{(-a)^2-2(2)}{2^2}=-\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1+a^2-4}{4}=-\frac{a}{2}$$

طرفین معادله را در ۴ ضرب می‌کنیم: $a^2-3=-2a$

$$a^2+2a-3=0 \Rightarrow (a-1)(a+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1\\ a=-3\end{cases}$$

اما به ازای $a=1$ معادلهٔ $x^2+ax+2=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد. *(دلتاش منفی می‌شه.)* پس $a=-3$.

۱۳۱. **۴** **روش ۱** مجموع ضرایب معادله صفر است؛ پس یک ریشهٔ معادله یک است. در نتیجه عبارت x^3-2x+1 یک عامل $x-1$ دارد. پس عبارت را بر $x-1$ تقسیم می‌کنیم و عامل‌های دیگر را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x+1 & x-1\\ \cline{2-2} -(x^3-x^2) & x^2+x-1\\ \cline{1-1} \quad x^2-2x & \\ \quad -(x^2-x) & \\ \cline{1-1} \qquad -x+1 & \\ \qquad -(-x+1) & \\ \cline{1-1} \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \ \text{(یک ریشهٔ مثبت)}\\ x^2+x-1=0 \xrightarrow{\frac{c}{a}=-1<0}\\ \text{یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی دارد}\end{cases}$$

پس در مجموع، معادله دو ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی دارد.

دقت کنید، چون $x=1$ ریشهٔ معادلهٔ $x^2+x-1=0$ نیست، پس طبق نکتهٔ زیر، معادله ریشهٔ مضاعف ندارد.

نکته: معادلهٔ $(x-a)^2=0$ ریشهٔ مضاعف دارد.
معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ زمانی ریشهٔ مضاعف دارد که $\Delta=0$.

روش ۲ برای تجزیهٔ عبارت x^3-2x+1 می‌توانید این‌طوری هم عمل کنید:

$$x^3-2x+1=0 \Rightarrow x^3-x-x+1=0$$

$$\Rightarrow (x^3-x)-(x-1)=0 \Rightarrow x(x^2-1)-(x-1)=0$$

$$\Rightarrow x(x-1)(x+1)-(x-1)=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0$$

۱۳۲. **۳** با توجه به معادله، $x=1$ یک ریشهٔ معادله است (چون در معادله صدق می‌کند.) بنابراین عبارت x^3-5x+4 یک عامل $(x-1)$ دارد. با تقسیم x^3-5x+4 بر $x-1$ خواهیم داشت:

$$x^3-5x+4=(x-1)(x^2+x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1\\ x^2+x-4=0\end{cases}$$

فرض کنیم $\alpha=1$ باشد پس ریشه‌های β و γ ریشه‌های معادلهٔ $x^2+x-4=0$ هستند. در نتیجه: $S=\beta+\gamma=-1\,,\ P=\beta\gamma=-4$

حالا حاصل عبارت $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$ را می‌یابیم:

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{\gamma^2+\beta^2}{\beta^2\gamma^2}=1+\frac{S^2-2P}{P^2}$$

$$=1+\frac{(-1)^2-2(-4)}{(-4)^2}=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}$$

۱۳۳. **۱** معادله را مرتب می‌کنیم:

$$x^۳+(a-۱)x^۲+(۴-a)x-۴=۰$$

مجموع ضرایب معادله صفر است ($۱+a-۱+۴-a-۴=۰$)؛ پس یک ریشهٔ معادله $x=۱$ است. با تقسیم عبارت $x^۳+(a-۱)x^۲+(۴-a)x-۴$ بر $x-۱$ سایر عامل‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} x^۳+(a-۱)x^۲+(۴-a)x-۴ & x-۱ \\ \cline{2-2} -(x^۳-x^۲) & x^۲+ax+۴ \\ \hline ax^۲+(۴-a)x & \\ -(ax^۲-ax) & \\ \hline ۴x-۴ & \\ -(۴x-۴) & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

با توجه به تقسیم، تجزیهٔ معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\text{معادله: } (x-۱)(x^۲+ax+۴)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \ (\text{یک ریشهٔ مثبت}) \\ x^۲+ax+۴=۰ \end{cases}$$

برای این‌که معادله، سه ریشهٔ مثبت داشته باشد باید ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+ax+۴=۰$ هم مثبت باشد. پس باید سه شرط زیر برقرار باشند:

$$\begin{cases} \Delta>۰ \Rightarrow a^۲-۱۶>۰ \Rightarrow a^۲>۱۶ \Rightarrow a>۴ \ \text{یا} \ a<-۴ \\ \frac{c}{a}>۰ \Rightarrow \frac{۴}{۱}>۰ \ \text{همواره برقرار} \\ -\frac{b}{a}>۰ \Rightarrow -\frac{a}{۱}>۰ \Rightarrow a<۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} a<-۴$$

اما یه اشکال کوچولو داره این تست! اگر $a=-۵$ باشد معادله به صورت زیر می‌شود:

$$(x-۱)(x^۲-۵x+۴)=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۱)(x-۴)=۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)^۲(x-۴)=۰ \Rightarrow x=۱,۴$$

که در این حالت معادله دوتا ریشه دارد نه سه‌تا. پس جواب دقیق‌تر این سؤال به صورت مقابل است: حدود a: $a<-۴\ ,\ a\neq-۵$

۱۳۴. **۳** مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را می‌یابیم و سپس معادله را می‌نویسیم:

$$\begin{array}{l} S=(-\frac{۱}{۲})+\frac{۱}{۳}=-\frac{۱}{۶} \\ P=(-\frac{۱}{۲})(\frac{۱}{۳})=-\frac{۱}{۶} \end{array} \xrightarrow{x^۲-Sx+P=۰} x^۲+\frac{۱}{۶}x-\frac{۱}{۶}=۰$$

$$\xrightarrow{\times ۶} ۶x^۲+x-۱=۰ \Rightarrow \frac{\text{ضریب } x^۲}{\text{ضریب } x}=۶$$

۱۳۵. **۲** چون ضرایب گویا هستند و یک ریشه $\frac{۱-\sqrt{۳}}{۲}$ است، پس ریشهٔ دیگر $\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}$ است. در نتیجه:

$$\begin{array}{l} S=\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۱-\sqrt{۳}}{۲}=۱ \\ P=(\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲})(\frac{۱-\sqrt{۳}}{۲})=\frac{-۱}{۲} \end{array} \Rightarrow \text{معادله: } x^۲-x-\frac{۱}{۲}=۰$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۲x^۲\underbrace{-۲}_{a}x\underbrace{-۱}_{b}=۰ \Rightarrow a+b=-۳$$

۱۳۶. **۲** طول مستطیل را با α و عرض آن را با β نشان می‌دهیم. پس:

$$\text{محیط}=۲۰ \Rightarrow ۲(\alpha+\beta)=۲۰ \Rightarrow \alpha+\beta=۱۰=S$$

$$\text{مساحت}=۲۴ \Rightarrow \alpha\beta=۲۴=P$$

پس معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$\text{معادله}: x^۲-۱۰x+۲۴=۰ \Rightarrow (x-۶)(x-۴)=۰$$

$$\Rightarrow x_۱=۶\ ,\ x_۲=۴$$

چون طول مستطیل بزرگ‌تر از عرض آن است، بنابراین $\alpha=۶$ و در نتیجه با توجه به تساوی $\alpha+\beta=۱۰$، $\beta=۴$ است. پس طول مستطیل ۲ واحد از عرض آن بیشتر است.

۱۳۷. **۲** روش ۱ معادلهٔ $۳x^۲+۷x+۱=۰$ را معادلهٔ اولیه و ریشه‌هایش را α و β در نظر می‌گیریم.

ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+ax+b=۰$ یک واحد از ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲+۷x+۱=۰$ بیشتر است. پس ریشه‌های معادلهٔ جدید به صورت $\alpha+۱$ و $\beta+۱$ هستند. برای محاسبهٔ b، حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید را باید محاسبه کنیم (حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید، b است.):

$$P'=(\alpha+۱)(\beta+۱) \Rightarrow \frac{b}{۱}=\alpha\beta+\alpha+\beta+۱ \quad (*)$$

$\alpha\beta$ و $\alpha+\beta$، حاصل‌ضرب و مجموع ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲+۷x+۱=۰$ هستند؛ پس:

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\frac{۷}{۳} \\ \alpha\beta=\frac{۱}{۳} \end{cases} \xrightarrow{(*)} b=\frac{۱}{۳}-\frac{۷}{۳}+۱=-۱$$

روش ۲ ریشهٔ معادلهٔ اولیه را با x و ریشهٔ معادلهٔ جدید را با X نمایش می‌دهیم.

با توجه به رابطهٔ بین ریشه‌ها داریم: $X=x+۱ \Rightarrow x=X-۱$

با جای‌گذاری این تساوی در معادلهٔ اولیه، معادلهٔ جدید را می‌یابیم:

$$\xrightarrow{۳x^۲+۷x+۱=۰} ۳(X-۱)^۲+۷(X-۱)+۱=۰$$

$$\Rightarrow ۳(X^۲-۲X+۱)+۷X-۷+۱=۰$$

$$\Rightarrow ۳X^۲-۶X+۳+۷X-۷+۱=۰$$

$$\Rightarrow ۳X^۲+X-۳=۰ \xrightarrow{\div ۳} X^۲+\frac{۱}{۳}X-۱=۰$$

پس: $b=-۱$.

۱۳۸. **۳** اول دقت کنید که مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ اولیه برابر است با:

$$۲x^۲-۳x-۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=\frac{۳}{۲} \\ \alpha\beta=-\frac{۴}{۲}=-۲ \end{cases} \quad (*)$$

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید را پیدا می‌کنیم:

$$S'=\frac{۱}{\alpha}+۱+\frac{۱}{\beta}+۱=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۲=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۲$$

$$\xrightarrow{(*)} S'=\frac{\frac{۳}{۲}}{-۲}+۲=-\frac{۳}{۴}+۲=\frac{۵}{۴}$$

$$P'=(\frac{۱}{\alpha}+۱)(\frac{۱}{\beta}+۱)=\frac{۱}{\alpha\beta}+\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۱$$

$$=\frac{۱}{\alpha\beta}+(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta})+۱ \xrightarrow{(*)} P'=\frac{۱}{-۲}+\frac{\frac{۳}{۲}}{-۲}+۱$$

$$\Rightarrow P'=-\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۴}+۱=-\frac{۱}{۴}$$

در نتیجه معادلهٔ جدید به صورت زیر است:

$$\xrightarrow{x^۲-S'x+P'=۰} x^۲-\frac{۵}{۴}x-\frac{۱}{۴}=۰ \xrightarrow{\times ۴} ۴x^۲-۵x-۱=۰$$

۱۳۹. **۱** به گزینه‌ها نگاه کنید. در همهٔ آن‌ها، مجموع ریشه‌ها متمایز است. بنابراین کافی است S' معادلهٔ جدید را محاسبه کنیم. اما صبر کنید یک حرکت بزنیم تا حل برایمان راحت‌تر شود. در معادلهٔ داده‌شده داریم:

$$x=۵-x^۲ \Rightarrow x^۲+x=۵ \Rightarrow x(x+۱)=۵$$

$$\Rightarrow x+۱=\frac{۵}{x} \Rightarrow (x+۱)^۳=\frac{۱۲۵}{x^۳}$$

چون $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله هستند بنابراین در این تساوی صدق می‌کنند:

$$(x_۱+۱)^۳=\frac{۱۲۵}{x_۱^۳}, (x_۲+۱)^۳=\frac{۱۲۵}{x_۲^۳}$$

در نتیجه:

$$S'=\frac{۱}{(x_۱+۱)^۳}+\frac{۱}{(x_۲+۱)^۳}=\frac{۱}{\frac{۱۲۵}{x_۱^۳}}+\frac{۱}{\frac{۱۲۵}{x_۲^۳}}$$

$$=\frac{x_۱^۳}{۱۲۵}+\frac{x_۲^۳}{۱۲۵}=\frac{x_۱^۳+x_۲^۳}{۱۲۵}=\frac{S^۳-۳PS}{۱۲۵} \quad (*)$$

S و P مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ اولیه هستند. پس:

$$x^۲+x-۵=۰ \Rightarrow S=-۱, P=-۵$$

$$\xrightarrow{(*)} S'=\frac{(-۱)^۳-۳(-۵)(-۱)}{۱۲۵}=\frac{-۱۶}{۱۲۵}$$

با توجه به گزینه‌ها تنها در **۱** مجموع جواب‌ها $\frac{-۱۶}{۱۲۵}$ است.

۱۴۰. **۱** این‌جا باید S' و P' معادلهٔ جدید را محاسبه کنیم. فقط دقت کنید که:

$$x=x^۲-۴ \Rightarrow x^۲-x-۴=۰ \Rightarrow S=۱, P=-۴$$

حالا داریم:

$$S'=x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱}+x_۱^۳+\frac{۱}{x_۲}=x_۲^۳+x_۱^۳+\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}$$

$$=x_۲^۳+x_۱^۳+\frac{x_۲+x_۱}{x_۱x_۲}$$

$$=S^۳-۳PS+\frac{S}{P}=۱-۳(-۴)(۱)+\frac{۱}{-۴}=۱۳-\frac{۱}{۴}=\frac{۵۱}{۴}$$

$$P'=(x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱})(x_۱^۳+\frac{۱}{x_۲})=(x_۱x_۲)^۳+\frac{۱}{x_۱x_۲}+x_۲^۲+x_۱^۲$$

$$=P^۳+\frac{۱}{P}+S^۲-۲P=(-۴)^۳+\frac{۱}{-۴}+۱-۲(-۴)$$

$$=-۶۴-\frac{۱}{۴}+۹=-\frac{۲۲۱}{۴}$$

در نهایت با توجه به تساوی $x^۲-S'x+P'=۰$ معادلهٔ جدید را می‌نویسیم:

معادلهٔ جدید $\Rightarrow x^۲-\frac{۵۱}{۴}x-\frac{۲۲۱}{۴}=۰$

$$\xrightarrow{\times ۴} ۴x^۲-۵۱x-۲۲۱=۰$$

۱۴۱. **۲** برای محاسبهٔ مقدار k به مجموع ریشه‌های معادلهٔ جدید توجه می‌کنیم (در معادلهٔ جدید مجموع ریشه‌ها $-\frac{k}{۸}$ است):

$$S'=\alpha^۲\beta+\alpha\beta^۲ \Rightarrow \frac{-k}{۸}=\alpha\beta(\alpha+\beta) \quad (*)$$

$$۲x^۲-۳x=۱ \Rightarrow ۲x^۲-۳x-۱=۰ \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=\frac{۳}{۲}\\ \alpha\beta=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} -\frac{k}{۸}=\frac{۳}{۲}(-\frac{۱}{۲}) \Rightarrow -\frac{k}{۸}=-\frac{۳}{۴} \Rightarrow k=۶$$

۱۴۲. **۳** روش ۱ مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ اولیه برابر است با:

$$x(۵x+۳)=۲ \Rightarrow ۵x^۲+۳x-۲=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=-\frac{۳}{۵}\\ P=\alpha\beta=-\frac{۲}{۵}\end{cases}$$

برای محاسبهٔ k از مجموع ریشه‌های معادلهٔ جدید استفاده می‌کنیم:

$$S'=\frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲} \Rightarrow \frac{k}{۴}=\frac{\beta^۲+\alpha^۲}{\alpha^۲\beta^۲} \Rightarrow \frac{k}{۴}=\frac{S^۲-۲P}{P^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{۴}=\frac{(-\frac{۳}{۵})^۲-۲(-\frac{۲}{۵})}{(-\frac{۲}{۵})^۲} \Rightarrow \frac{k}{۴}=\frac{\frac{۹}{۲۵}+\frac{۴}{۵}}{\frac{۴}{۲۵}}=\frac{\frac{۹+۲۰}{۲۵}}{\frac{۴}{۲۵}}=\frac{۲۹}{۴} \Rightarrow k=۲۹$$

روش ۲ به معادلهٔ اولیه نگاه کنید:

$$x(۵x+۳)=۲ \Rightarrow ۵x^۲+۳x-۲=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases}\alpha=-۱\\ \beta=-\frac{c}{a}=\frac{۲}{۵}\end{cases}$$

بنابراین ریشه‌های معادلهٔ جدید به صورت $\{\frac{۱}{(-۱)^۲}=۱, \frac{۱}{(\frac{۲}{۵})^۲}=\frac{۲۵}{۴}\}$ هستند.

در نتیجه $x=۱$ در معادله صدق می‌کند: $۴(۱)^۲-k(۱)+۲۵=۰ \Rightarrow k=۲۹$

۱۴۳. **۱** ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۲x-۱=۰$ را α و β در نظر می‌گیریم. پس $S=۲$ و $P=-۱$. ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲-۱۲x+m=۰$ از k برابر مکعب ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۲x-۱=۰$، ۲ واحد کم‌تر است، پس ریشه‌های معادلهٔ بالا را می‌توانیم به صورت $\{k\alpha^۳-۲, k\beta^۳-۲\}$ در نظر بگیریم. برای محاسبهٔ m، نیاز به محاسبهٔ ضرب ریشه‌ها داریم. اما چون k مجهول است،ابتدا با کمک جمع ریشه‌ها، k را می‌یابیم.

مجموع ریشه‌ها: $S'=-\frac{-۱۲}{۴}=۳ \Rightarrow k\alpha^۳-۲+k\beta^۳-۲=۳$

$$\Rightarrow k(\alpha^۳+\beta^۳)=۷ \Rightarrow k(S^۳-۳PS)=۷$$

$$\xrightarrow[P=-۱]{S=۲} k(۸-۳(-۱)(۲))=۷ \Rightarrow k=\frac{۱}{۲}$$

حالا به سراغ حاصل‌ضرب ریشه‌ها می‌رویم:

$$P'=\frac{m}{۴} \Rightarrow (k\alpha^۳-۲)(k\beta^۳-۲)=\frac{m}{۴}$$

$$\Rightarrow k^۲(\alpha^۳\beta^۳)-۲(k\alpha^۳+k\beta^۳)+۴=\frac{m}{۴}$$

$$\Rightarrow k^۲P^۳-۲k(S^۳-۳PS)+۴=\frac{m}{۴}$$

$$\xrightarrow[P=-۱]{k=\frac{۱}{۲},\ S=۲} \frac{۱}{۴}(-۱)-۲(\frac{۱}{۲})(۸+۶)+۴=\frac{m}{۴}$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۴}-۱۴+۴=\frac{m}{۴} \Rightarrow m=-۱-۵۶+۱۶=-۴۱$$

۱۴۴. **۳** یکی از ریشه‌های معادله $x=۱$ است؛ پس در معادله صدق می‌کند:

$$a+۱-۵+a=۰ \Rightarrow ۲a=۴ \Rightarrow a=۲$$

$$\Rightarrow ۲x^۳+x^۲-۵x+۲=۰$$

حالا عبارت $۲x^۳+x^۲-۵x+۲=۰$ را تجزیه می‌کنیم. چون $x=۱$ ریشه است؛ پس عبارت حتماً بر $x-۱$ بخش‌پذیر است.

برای تجزیه بدون تقسیم داریم:

$$\underbrace{۲x^۳+x^۲-۵x+۲=(x-۱)(۲x^۲}_{\text{ضرب}=۲x^۳}+bx\overbrace{-۲)}^{\text{ضرب}=+۲}$$

$$bx^۲-۲x^۲=(b-۲)x^۲=x^۲ \Rightarrow b-۲=۱ \Rightarrow b=۳$$

پس:

$$۲x^۳+x^۲-۵x+۲=(x-۱)(۲x^۲+۳x-۲)$$

همچنین β و α ریشه‌های $۲x^۲+۳x-۲=۰$ هستند.

$$P=\alpha\beta=-۱\,,\,S=\alpha+\beta=-\frac{۳}{۲}$$

$$S_{\text{معادلهٔ جدید}}=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{S^۲-۲P}{P}=\frac{\frac{۹}{۴}-۲(-۱)}{-۱}=-\frac{۱۷}{۴}$$

S معادلهٔ جدید برابر $-\frac{k}{۴}$ است؛ پس: $-\frac{۱۷}{۴}=-\frac{k}{۴} \Rightarrow k=۱۷$

۱۴۵. **۱** α و $\beta-۱$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+ax+b=۰$ هستند؛ پس مجموع و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر است با:

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\alpha+\beta-۱=-a \Rightarrow \alpha+\beta=۱-a\\ \alpha(\beta-۱)=b\end{cases}$$

شبیه حالت (I) داریم:

$$(\mathrm{II})\begin{cases}\alpha-۱+\beta=۵ \Rightarrow \alpha+\beta=۶\\ (\alpha-۱)\beta=b+۲ \Rightarrow b=(\alpha-۱)\beta-۲\end{cases}$$

پس $۱-a=۶$ و در نتیجه $a=-۵$.

حالا از دو معادله داریم: $\alpha(\beta-۱)=b=(\alpha-۱)\beta-۲$

$$\Rightarrow \alpha\beta-\alpha=\alpha\beta-\beta-۲ \Rightarrow \alpha-\beta=۲$$

$$\xrightarrow{\alpha+\beta=۶}\begin{cases}\alpha-\beta=۲\\ \alpha+\beta=۶\end{cases} \Rightarrow \alpha=۴,\beta=۲$$

و بالأخره با جای‌گذاری در معادلهٔ دوم (I) داریم: $۴(۲-۱)=b \Rightarrow b=۴$

۱۴۶. **۱** S و P معادلهٔ اولیه را حساب می‌کنیم:

$$x(۳+x)=۵ \xrightarrow{\text{استاندارد}} x^۲+۳x-۵=۰ \Rightarrow \begin{cases}S=\frac{-b}{a}=-۳\\ P=\frac{c}{a}=-۵\end{cases}$$

$x=\alpha$ ریشهٔ معادلهٔ $x(۳+x)=۵$ است؛ پس در آن صدق می‌کند:

$$\alpha(۳+\alpha)=۵ \Rightarrow ۳+\alpha=\frac{۵}{\alpha}$$

پس در $\frac{\alpha}{۳+\alpha}$، جای مخرج $\frac{۵}{\alpha}$ قرار می‌دهیم:

$$\text{ریشهٔ معادلهٔ جدید}: \frac{\alpha}{۳+\alpha}=\frac{\alpha}{\frac{۵}{\alpha}}=\frac{۱}{۵}\alpha^۲$$

ریشه‌های معادلهٔ جدیدمان $\frac{\alpha}{۳+\alpha}=\frac{۱}{۵}\alpha^۲$ و $\frac{۱}{۵}\beta^۲$ هستند. جمع و ضربشان را حساب می‌کنیم:

$$S_{\text{جدید}}=\frac{۱}{۵}\alpha^۲+\frac{۱}{۵}\beta^۲=\frac{۱}{۵}(\alpha^۲+\beta^۲)=\frac{۱}{۵}(S^۲-۲P)$$

$$=\frac{۱}{۵}((-۳)^۲-۲(-۵))=\frac{۱۹}{۵}$$

$$P_{\text{جدید}}=(\frac{۱}{۵}\alpha^۲)(\frac{۱}{۵}\beta^۲)=\frac{۱}{۲۵}(\alpha\beta)^۲=\frac{۱}{۲۵}P^۲=\frac{۱}{۲۵}(-۵)^۲=۱$$

حالا معادلهٔ جدید را با داشتن S و P جدید می‌نویسیم:

$$x^۲-S_{\text{جدید}}x+P_{\text{جدید}}=۰ \Rightarrow x^۲-\frac{۱۹}{۵}x+۱=۰$$

در نهایت معادلهٔ بالا را به شکل $x(x+a)=b$ می‌نویسیم:

$$x(x\underbrace{-\frac{۱۹}{۵}}_{a})=\underbrace{-۱}_{b}$$

پس:

$$a+b=\frac{-۱۹}{۵}+(-۱)=\frac{-۲۴}{۵}=-۴/۸$$

۱۴۷. **۳** α ریشهٔ معادلهٔ $x^۲+۲x-۱=۰$ است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$\alpha^۲+۲\alpha-۱=۰ \Rightarrow ۲\alpha-۱=-\alpha^۲$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲\alpha-۱}=-\frac{۱}{\alpha^۲} \Rightarrow \text{ریشه‌های معادله جدید}: -\frac{۱}{\alpha^۲}\,,\,\alpha^۲$$

از طرفی اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۲x-۱=۰$ باشند، آن‌گاه:

$$\alpha.\beta=\frac{c}{a}=-۱ \Rightarrow \beta=-\frac{۱}{\alpha} \Rightarrow \beta^۲=(-\frac{۱}{\alpha})^۲=\frac{۱}{\alpha^۲} \Rightarrow -\frac{۱}{\alpha^۲}=-\beta^۲$$

$$\Rightarrow \text{ریشه‌های معادله جدید}: -\beta^۲\,,\alpha^۲$$

حالا مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید را می‌یابیم (دقت کنید که مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۲x-۱=۰$ به ترتیب $S=-۲$ و $P=-۱$ است و $\Delta=۸$):

$$\begin{cases}S'=\alpha^۲-\beta^۲=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\\ \xrightarrow{\alpha>\beta} S'=(\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|})(S)=(\frac{\sqrt{۸}}{|۱|})(-۲)=-۴\sqrt{۲}\\ P'=(\alpha^۲)(-\beta^۲)=-P^۲=-۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{معادله}: x^۲+۴\sqrt{۲}x-۱=۰$$

۱۴۸. **۳** با فرض $x^۳=t$ داریم: $\text{معادله}: t^۲-۹t+۸=۰$

$$\Rightarrow (t-۱)(t-۸)=۰ \Rightarrow \begin{cases}t=۱ \Rightarrow x^۳=۱ \Rightarrow x=۱\\ t=۸ \Rightarrow x^۳=۸ \Rightarrow x=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}=۱+۲=۳$$

۱۴۹. **۲** با فرض $x^۲=t$ داریم:

$$\text{معادله}: t^۲-۲t+۱=۰ \Rightarrow (t-۱)^۲=۰ \Rightarrow t=۱$$

$$\xrightarrow{x^۲=t} x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm۱$$

۱۵۰. **۳** با فرض $(*)$ $x^۲-۲x=t$ داریم:

$$\text{معادله}: t^۲-t=۲ \Rightarrow t^۲-t-۲=۰ \Rightarrow (t-۲)(t+۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}t=۲\\ t=-۱\end{cases} \xrightarrow{(*)} \begin{cases}x^۲-۲x=۲ \Rightarrow x^۲-۲x-۲=۰\\ x^۲-۲x=-۱ \Rightarrow x^۲-۲x+۱=۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\xrightarrow{\Delta>۰} \text{دو ریشهٔ حقیقی دارد.}\\ \Rightarrow (x-۱)^۲=۰ \Rightarrow x=۱\end{cases}$$

$x=۱$ ریشهٔ معادلهٔ بالایی نیست، پس معادله در مجموع سه ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

۱۵۱. **۲**

$$(x^۲-۱)^۲=x^۲+۵ \Rightarrow x^۴-۲x^۲+۱=x^۲+۵ \Rightarrow x^۴-۳x^۲-۴=۰$$

با فرض $x^۲=t$، داریم: $\text{معادله}: t^۲-۳t-۴=۰$