آزمون شماره ۹ سراسری ۱۴۰۲ نوبت دوم - داخل

نام درس	دهم	یازدهم	دوازدهم	ترکیبی	آسان	متوسط	سخت
ریاضیات	۴	۱۵	۹	۱۲	۲	۱۷	۲۱
فیزیک	۸	۱۰	۱۷	–	۲	۲۸	۵
شیمی	۸	۸	۱۱	۳	۵	۱۷	۸

ریاضیات

۱- گزینه ۲

درس‌نامه اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، داریم:

$a+c=2b$

گام سه جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی را به ترتیب a، ar و ar^2 در نظر می‌گیریم. اگر این سه جمله را نصف کنیم، به این جملات می‌رسیم: $\frac{a}{2}$، $\frac{ar}{2}$ و $\frac{ar^2}{2}$.

گام به گفتهٔ سؤال، جملات بالا، سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی‌اند؛ پس طبق درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{a}{2}+\frac{ar^2}{2}=2\times\frac{ar}{2}\xrightarrow{\times 2} a+ar^2=2ar$$

$$\xrightarrow{\div a} 1+r^2=2r \Rightarrow r^2-2r+1=0 \Rightarrow (r-1)^2=0 \Rightarrow r=1$$

گام $r=1$ شد، پس قدرنسبت جملات دنبالهٔ هندسی ۱ و در نتیجه همهٔ جملات آن با هم برابر می‌شوند: $a,ar,ar^2,ar^3,\dots \xrightarrow{r=1} a,a,a,a,\dots$:جملات دنبالهٔ هندسی

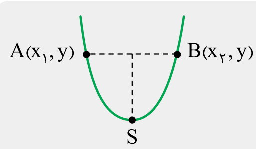
گام طبق گفتهٔ سؤال اگر این جملات را نصف کنیم، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d خواهیم داشت: $\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2},\dots$

واضح است که قدرنسبت دنبالهٔ حسابی بالا صفر است، پس $d=0$ می‌شود؛ بنابراین $r+d=1+0=1$ است.

۲- گزینه ۳

شفاف‌سازی «اگر این سهمی، محور xها را در نقاطی با طول‌های α و β قطع کند»، یعنی α و β ریشه‌های سهمی هستند.

درس‌نامه ❶ اگر مطابق شکل مقابل، دو نقطه با عرض یکسان روی یک سهمی داشته باشیم، طول رأس سهمی (x_S) برابر میانگین طول آن دو نقطه می‌شود؛ یعنی: $x_S=\frac{x_1+x_2}{2}$



❷ اگر مختصات رأس یک سهمی $S(\alpha,\beta)$ باشد، معادلهٔ این سهمی به صورت زیر می‌شود:

$y=a(x-\alpha)^2+\beta$

❸ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $Ax^2+Bx+C=0$ با شرط $\Delta>0$ باشند، داریم:

$S=\alpha+\beta=-\frac{B}{A}$:جمع ریشه‌ها $\qquad$ $P=\alpha\beta=\frac{C}{A}$:ضرب ریشه‌ها

$\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$

❹ سهمی به معادلهٔ $y=Ax^2+Bx+C$، محور yها را در نقطه‌ای با عرض C قطع می‌کند.

گام دو نقطهٔ $A(3,y)$ و $B(-5,y)$ که عرض یکسانی هم دارند، روی این سهمی قرار دارند؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، طول رأس این سهمی می‌شود $x_S=\frac{-5+3}{2}=-1$.

گام عرض رأس این سهمی برابر ۱ است، پس مختصات رأس سهمی $S(-1,1)$ می‌شود.

حالا به کمک مورد (۲) درس‌نامه، معادلهٔ سهمی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y=a(x+1)^2+1=a(x^2+2x+1)+1=ax^2+2ax+a+1$$

$$\Rightarrow y=\underbrace{a}_{A}x^2+\underbrace{2a}_{B}x+\underbrace{a+1}_{C}\quad(*)$$

گام مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های این سهمی را به کمک مورد (۳) درس‌نامه به دست می‌آوریم:

$$S=-\frac{B}{A}=-\frac{2a}{a}=-2$$

$$P=\frac{C}{A}=\frac{a+1}{a}$$

گام حالا با توجه به این‌که $\alpha^2+\beta^2=5$، داریم:

$$\alpha^2+\beta^2=5 \Rightarrow S^2-2P=5 \Rightarrow \underbrace{(-2)^2}_{4}-2(\frac{a+1}{a})=5$$

$$\Rightarrow -2(\frac{a+1}{a})=1 \Rightarrow \frac{a+1}{a}=\frac{-1}{2} \Rightarrow 2a+2=-a \Rightarrow 3a=-2 \Rightarrow a=-\frac{2}{3}$$

گام با جای‌گذاری $a=-\frac{2}{3}$ در تساوی $(*)$، معادلهٔ سهمی را می‌نویسیم:

$$y=-\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$$

حالا که معادلهٔ سهمی را به صورت $y=-\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$ داریم، می‌توانیم بگوییم این سهمی در نقطه‌ای به عرض $\frac{1}{3}$، محور yها را قطع می‌کند (طبق مورد (۴) درس‌نامه).

۳- گزینه ۲

استراتژی قبل از هر چیز از تساوی $A\times B=B\times A$، نتیجه می‌گیریم که $A=B$ است. حالا سعی می‌کنیم تساوی $A=B$ را برقرار کنیم. اول تکلیف عضو ۶ از مجموعهٔ A را مشخص می‌کنیم تا مقدار d به دست آید. با جای‌گذاری d در تساوی $A=B$ به رابطهٔ $\{a-2,6,2b+1,c\}=\{6,5,-1\}$ می‌رسیم. در این رابطه یک مجموعهٔ ۳عضوی با یک مجموعهٔ ۴عضوی برابر شده است، پس سعی می‌کنیم در مجموعهٔ سمت راست یک عضو تکراری بسازیم تا هر دو مجموعه ۴عضوی بشوند؛ این‌جوری به ۳ تساویِ مجموعه‌ای می‌رسیم. کلید حل مسئله از این‌جا به بعد استفاده از مورد (۳) درس‌نامه است.

درس‌نامه ❶ اگر $A\times B=B\times A$ باشد، در این صورت یا حداقل یکی از A و B، تهی است یا A و B برابرند: $A\times B=B\times A \Rightarrow (A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$ یا $A=B)$

❷ دو مجموعه وقتی برابرند که تک‌تک اعضایشان مساوی هم باشند.

❸ در هر تساویِ مجموعه‌ای، **اگر تعداد اعضای دو مجموعه برابر باشند**، می‌توانیم مجموع اعضای دو مجموعه را مساویِ هم بگذاریم.

گام به گفتهٔ سؤال $A\times B=B\times A$ است، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه یا باید حداقل یکی از A و B تهی باشند یا $A=B$ باشد. واضح است که $A=\{a-2,6,2b+1,c\}$ و $B=\{\sqrt{d},5,-1\}$ هیچ‌کدام نمی‌توانند تهی باشند؛ بنابراین $A=B$ است:

$$\{a-2,6,2b+1,c\}=\{\sqrt{d},5,-1\}\quad(*)$$

گام طبق مورد (۲) درس‌نامه، برای برقراری رابطهٔ $(*)$ باید تک‌تک اعضای دو مجموعه مساوی باشند. از عدد ۶ در مجموعهٔ سمت چپ شروع می‌کنیم. ۶ که نمی‌تواند با ۵ و -1 برابر باشد، پس مجبور است مساوی $\sqrt{d}$ باشد: $6=\sqrt{d} \Rightarrow d=36$

تا این‌جا رابطهٔ $(*)$ به این صورت درمی‌آید: $\{a-2,6,2b+1,c\}=\{6,5,-1\}\quad(**)$

گام در تساوی $(**)$ یک مجموعهٔ ۴عضوی با یک مجموعهٔ ۳عضوی برابر شده است، پس باید در مجموعهٔ ۳عضوی (مجموعهٔ سمت راست) یک عضو تکراری بسازیم تا هر دو مجموعه ۴عضوی بشوند. این عضو تکراری می‌تواند -1 یا ۵ یا ۶ باشد؛ این سه حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم:

◆ «۶» **عضو تکراری باشد**: در این حالت داریم: $\{a-2,6,2b+1,c\}=\{6,6,5,-1\}\quad(1)$

در تساویِ مجموعه‌ای بالا تعداد اعضای دو مجموعه برابرند، پس طبق مورد (۳) درس‌نامه می‌توانیم مجموع اعضای دو مجموعه را مساویِ هم بگذاریم:

$$(a-2)+6+(2b+1)+c=6+6+5-1$$

$$\Rightarrow a+2b+c+5=16 \Rightarrow a+2b+c=11$$

سؤال می‌خواهد $a+b+c=9$ باشد، پس تساوی قبل را به این صورت می‌نویسیم:

$$\underbrace{(a+b+c)}_{9}+b=11 \Rightarrow 9+b=11 \Rightarrow b=2$$

پس تساوی (۱) به این صورت می‌شود:

$$\{a-2,\cancel{6},\cancel{5},c\}=\{\cancel{6},6,\cancel{5},-1\} \Rightarrow \{a-2,c\}=\{6,-1\}$$

برای برقراری تساوی بالا هم دو حالت داریم:

$$\begin{cases}a-2=6 \Rightarrow a=8\\ c=-1\end{cases} \quad , \quad \begin{cases}a-2=-1 \Rightarrow a=1\\ c=6\end{cases}$$

پس تا این‌جا ۲ جواب پیدا کردیم.

◇ «۵» **عضوِ تکراری باشد**: در این حالت داریم: $\{a-2,6,2b+1,c\}=\{6,5,5,-1\}$ (۲)

مثل حالت قبلی مجموع اعضای دو مجموعه را مساوی هم می‌گذاریم:

$$(a-2)+6+(2b+1)+c=6+5+5-1$$
$$\Rightarrow a+2b+c+5=15 \Rightarrow a+2b+c=10$$
$$\Rightarrow \underbrace{(a+b+c)}_{9}+b=10 \Rightarrow b=1$$

$b=1$ را در تساوی (۲) جای‌گذاری می‌کنیم: $\{a-2,6,3,c\}=\{6,5,5,-1\}$

تساوی بالا هیچ وقت برقرار نمی‌شود، چون مجموعهٔ سمت راست اصلاً عضو «۳» ندارد.

◇ « -1 » **عضوِ تکراری باشد**: در این حالت داریم:

$$\{a-2,6,2b+1,c\}=\{6,5,-1,-1\} \quad (3)$$

باز هم مجموع اعضای دو مجموعه را مساوی هم می‌گذاریم:

$$(a-2)+6+(2b+1)+c=6+5-1-1$$
$$\Rightarrow a+2b+c+5=9 \Rightarrow a+2b+c=4$$
$$\Rightarrow \underbrace{(a+b+c)}_{9}+b=4 \Rightarrow b=-5$$

حالا $b=-5$ را در تساوی (۳) جای‌گذاری می‌کنیم: $\{a-2,6,-9,c\}=\{6,5,-1,-1\}$

تساوی بالا هیچ وقت نمی‌تواند برقرار شود، چون مجموعهٔ سمت راست اصلاً عضو « -9 » ندارد؛ پس در کل همان ۲ جوابی که در حالت اول به دست آوردیم را داریم.

۴- گزینهٔ ۱

استراتژی اول سعی می‌کنیم گزینه‌ها را ساده‌تر بنویسیم. برای این کار به دنبال گزاره‌هایی می‌گردیم که ارزششان کاملاً معلوم است. بعد از این کار سیاست حذف گزینه را پیش می‌گیریم؛ یعنی می‌بینیم کدام گزینه ارزشش طبق سطرهای جدول نیست. این سیاست را تا جایی ادامه می‌دهیم که سه گزینه حذف شود.

درس‌نامه ۱ جدول ارزش انواع ترکیب گزاره‌ها را برای دو گزارهٔ p و q در جدول زیر ببینید:

p	q	$p\vee q$	$p\wedge q$	$p\Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	ن	د

$p\vee q$: این گزاره فقط وقتی نادرست می‌شود که هر دو گزاره نادرست باشند.

$p\wedge q$: این گزاره فقط وقتی درست است که هر دو گزاره درست باشند.

$p\Rightarrow q$: این گزاره فقط وقتی نادرست است که گزارهٔ اول (p) درست، ولی گزارهٔ دوم (q) نادرست باشد.

۲ به کمک جدول بالا می‌توانیم دو هم‌ارزی زیر را بنویسیم:

$p\vee\sim p\equiv$ د $\quad , \quad \bigcirc\wedge$ د $\equiv\bigcirc$

خودش

گام طبق استراتژی، اول گزینه‌ها را ساده می‌کنیم. طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم در ۱ و ۲، گزارهٔ $p\vee\sim p$ همیشه درست است، پس این گزینه‌ها را می‌توانیم ساده‌تر بنویسیم:

◇ **ساده‌سازی ۱**

$$(q\Rightarrow(p\vee r))\Rightarrow\underbrace{(\underbrace{(p\vee\sim p)}_{\text{د}}\wedge(\sim q\wedge r))}_{(\sim q\wedge r)}\equiv(q\Rightarrow(p\vee r))\Rightarrow(\sim q\wedge r)$$

◇ **ساده‌سازی ۲**

$$(r\Rightarrow(p\vee q))\Rightarrow\underbrace{(\underbrace{(p\vee\sim p)}_{\text{د}}\wedge(q\wedge\sim r))}_{(q\wedge\sim r)}\equiv(r\Rightarrow(p\vee q))\Rightarrow(q\wedge\sim r)$$

گام حالا شروع به حذف گزینه‌ها می‌کنیم. سطر سوم جدول می‌گوید وقتی p و r درست ولی q نادرست باشد، باید X درست شود. ببینیم در کدام گزینه چنین اتفاقی نمی‌افتد:

۱ $(q\Rightarrow(p\vee r))\Rightarrow(\sim q\wedge r)\equiv(\text{ن}\Rightarrow\text{د})\Rightarrow(\text{د}\wedge\text{د})\equiv\text{د}\Rightarrow\text{د}\equiv\text{د}$: ✓

۲ $(r\Rightarrow(p\vee q))\Rightarrow(q\wedge\sim r)\equiv(\text{د}\Rightarrow\text{د})\Rightarrow(\text{ن}\wedge\text{ن})\equiv\text{د}\Rightarrow\text{ن}\equiv\text{ن}$: ×

همین‌جا ۲ را حذف می‌کنیم.

۳ $[p\Rightarrow((q\vee r)\Rightarrow(q\wedge r))]\Rightarrow(\sim(p\vee r)\wedge q)$

$\equiv[\text{د}\Rightarrow(\text{د}\Rightarrow\text{ن})]\Rightarrow(\text{ن}\wedge\text{ن})\equiv[\text{د}\Rightarrow\text{ن}]\Rightarrow\text{ن}\equiv\text{د}$: ✓

۴ $(r\Rightarrow(p\vee q))\Rightarrow[((p\Rightarrow r)\Rightarrow(\sim p\wedge r))\wedge q]$

$\equiv(\text{د}\Rightarrow\text{د})\Rightarrow[(\text{د}\Rightarrow\text{ن})\wedge\text{ن}]\equiv\text{د}\Rightarrow\text{ن}\equiv\text{ن}$: ×

پس ۴ هم حذف شد.

گام در ادامه اگر سطر دوم را هم کنترل کنیم، ۳ هم حذف می‌شود. این سطر می‌گوید اگر p و q درست، ولی r نادرست باشد، X هم باید نادرست شود که چنین اتفاقی برای ۳ نمی‌افتد:

$[p\Rightarrow((q\vee r)\Rightarrow(q\wedge r))]\Rightarrow(\sim(p\vee r)\wedge q)$

$\equiv[\text{د}\Rightarrow(\text{د}\Rightarrow\text{ن})]\Rightarrow(\text{ن}\wedge\text{د})\equiv\text{ن}\Rightarrow\text{ن}\equiv\text{د}$

پس تنها گزینهٔ باقی‌مانده، یعنی ۱ جواب است.

مشاوره سر جلسهٔ کنکور برای بار اول باید از این سؤال رد شوید، چون هم بسیار وقت‌گیر و هم احتمال اشتباه‌کردنتان زیاد است.

۵- گزینهٔ ۴

استراتژی اول طرفین معادلهٔ $ax^2-ax-b=0$ را بر a تقسیم کنید (در معادلهٔ درجه‌دوم، ضریب x^2، یعنی a مخالف صفر است، به همین خاطر حق انجام چنین کاری را داریم)، بعد α و β را در خود معادله جای‌گذاری کنید تا بتوانید α^2 و β^2 را برحسب α و β بنویسید. در ادامه α^2 و β^2ای را که برحسب α و β به دست آوردید، در تساوی $40\beta^2+20\alpha^2-20\beta=17$ جای‌گذاری کنید. این‌طوری به عبارتی می‌رسید که بلدید آن را برحسب S و P بنویسید.

درس‌نامه اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $Ax^2+Bx+C=0$ با شرط $\Delta>0$ باشند، داریم:

◇ جمع ریشه‌ها: $S=\alpha+\beta=-\frac{B}{A}$ ◇ ضرب ریشه‌ها: $P=\alpha\beta=\frac{C}{A}$

◇ اختلاف ریشه‌ها: $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|A|}$ ◇ مجموع مربعات ریشه‌ها: $\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$

گام طبق استراتژی، اول طرفین معادلهٔ $ax^2-ax-b=0$ را بر a تقسیم می‌کنیم:

$$ax^2-ax-b=0 \xrightarrow{\div a} x^2-x-\frac{b}{a}=0 \quad (*)$$

گام α و β ریشه‌های متمایز معادلهٔ (*) هستند، پس می‌توانیم α و β را در معادلهٔ (*) جای‌گذاری کنیم:

$$x^2-x-\frac{b}{a}=0 \begin{cases}\xrightarrow{x=\alpha} \alpha^2-\alpha-\frac{b}{a}=0 \Rightarrow \alpha^2=\alpha+\frac{b}{a}\\ \xrightarrow{x=\beta} \beta^2-\beta-\frac{b}{a}=0 \Rightarrow \beta^2=\beta+\frac{b}{a}\end{cases}$$

گام حالا تساوی‌های قبل را در $40\beta^2+20\alpha^2-20\beta=17$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$40(\beta+\frac{b}{a})+20(\alpha+\frac{b}{a})-20\beta=17 \Rightarrow 40\beta+\frac{40b}{a}+20\alpha+\frac{20b}{a}-20\beta=17$$

$$\Rightarrow 20\beta+20\alpha+\frac{60b}{a}=17 \Rightarrow 20\underbrace{(\alpha+\beta)}_{S}+\frac{60b}{a}=17\ (**)$$

گام حالا S را از معادلهٔ $\underbrace{1}_{A}x^2\underbrace{-1}_{B}x-\frac{b}{a}=0$ حساب می‌کنیم: $S=-\frac{B}{A}=-\frac{-1}{1}=1$

در ادامه $S=1$ را در تساوی (**) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$20(1)+\frac{60b}{a}=17 \Rightarrow \frac{60b}{a}=-3 \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{-3}{60}=\frac{-1}{20} \Rightarrow -\frac{b}{a}=\frac{1}{20}$$

گام در آخر به جای $-\frac{b}{a}$ در تساوی (*)، $\frac{1}{20}$ را قرار می‌دهیم: $x^2-x+\frac{1}{20}=0$

اختلاف ریشه‌های این معادله برابر است با:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{1-4\times\frac{1}{20}}}{1}=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt5}$$

۶- گزینه ۳

استراتژی در سمت چپ معادله از اتحاد $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ استفاده کنید تا به یک معادلهٔ ساده‌تر برسید، بعد در معادلهٔ ساده‌شده از تغییر متغیر استفاده کنید.

گام طبق استراتژی در سمت چپ معادله از اتحاد $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{160}{9} \Rightarrow (\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x})^2-2(\frac{1}{x})(\frac{1}{1-x})=\frac{160}{9}$$

$$\Rightarrow (\frac{\overbrace{(1-x)+x}^{1}}{x(1-x)})^2-\frac{2}{x(1-x)}=\frac{160}{9} \Rightarrow (\frac{1}{x(1-x)})^2-2(\frac{1}{x(1-x)})-\frac{160}{9}=0$$

گام در ادامه از تغییر متغیر $\frac{1}{x(1-x)}=t$ کمک می‌گیریم: $t^2-2t-\frac{160}{9}=0$

حالا ریشه‌های معادلهٔ بالا را از روش Δ به دست می‌آوریم. اول Δ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(1)(-\frac{160}{9})=4+\frac{640}{9}=\frac{676}{9}=(\frac{26}{3})^2$$

پس داریم:

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\pm\frac{26}{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1=\frac{16}{3} \\ t_2=-\frac{10}{3} \end{cases}$$

گام در آخر tهای به‌دست‌آمده را در $t=\frac{1}{x(1-x)}$ جای‌گذاری می‌کنیم:

◆ $\frac{1}{x(1-x)}=\frac{16}{3} \Rightarrow x(1-x)=\frac{3}{16} \Rightarrow x-x^2=\frac{3}{16}$

$\Rightarrow x^2-x+\frac{3}{16}=0 \xrightarrow{\Delta=\frac{1}{4}>0}$ مجموع ریشه‌ها $=-\frac{-1}{1}=1$

◆ $\frac{1}{x(1-x)}=-\frac{10}{3} \Rightarrow x(1-x)=-\frac{3}{10} \Rightarrow x-x^2=-\frac{3}{10}$

$\Rightarrow x^2-x-\frac{3}{10}=0 \xrightarrow{\Delta=\frac{22}{10}>0}$ مجموع ریشه‌ها $=-\frac{-1}{1}=1$

بنابراین جمع ریشه‌های معادله می‌شود $1+1=2$.

۷- گزینه ۱

استراتژی اول فاصلهٔ نقطهٔ (۴/۵,۲) از دو خط $4x+y=3$ و $x-4y=5$ را محاسبه کنید تا اندازهٔ طول و عرض مستطیل به دست آید. حالا بیشترین فاصلهٔ وسط قطر از اضلاع، برابر نصف اندازهٔ طول مستطیل می‌شود.

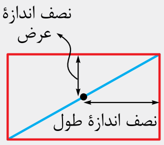
درس‌نامه ۱ خط $ax+by=c$ از نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ می‌گذرد، اگر و تنها اگر $ax_0+by_0=c$ شود.

۲ شیب خط $ax+by=c$ برابر است با: $-\frac{a}{b}=\frac{\text{قرینهٔ ضریب } x}{\text{ضریب } y}$

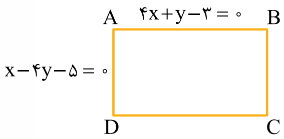
۳ هر وقت شیب دو خط، قرینه و معکوس همدیگر باشند، دو خط بر هم عمود و برعکس.

۴ فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از خط $ax+by+c=0$ برابر است با: $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

۵ همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، در هر مستطیل، وسط قطر، همان مرکز مستطیل است که فاصلهٔ آن تا اضلاع مستطیل برابر نصف اندازهٔ طول و نصف اندازهٔ عرض است.



گام شیب خط $4x+y=3$ (یا همان $4x+y-3=0$)، برابر -4 و شیب خط $x-4y=5$ (یا همان $x-4y-5=0$)، برابر $\frac{1}{4}$ است (طبق مورد (۲) درس‌نامه). چون این دو خط شیب‌هایشان قرینه و معکوس یکدیگر است، پس طبق مورد (۳) درس‌نامه، بر هم عمودند؛ بنابراین این دو خط، دو ضلع مجاور مستطیل هستند؛ ببینید:



گام نقطهٔ (۴/۵,۲) روی هیچ‌کدام از دو خط $4x+y-3=0$ و $x-4y-5=0$ قرار ندارد، چون:

$$4x+y-3=0 \xrightarrow{(4/5,2)} 4\times4/5+2-3=17\neq0$$

$$x-4y-5=0 \xrightarrow{(4/5,2)} 4/5-4\times2-5=-8/5\neq0$$

بنابراین نقطهٔ (۴/۵,۲)، مختصات رأس C (که روی هیچ‌کدام از این دو خط نیست) می‌شود.

گام فاصلهٔ نقطهٔ $C(4/5,2)$ از این دو خط را به دست می‌آوریم تا اندازهٔ طول و عرض مستطیل به دست آید:

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{cases} \xrightarrow[(4/5,2)]{4x+y-3=0} \frac{|4(4/5)+1(2)-3|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{17}{\sqrt{17}}=\sqrt{17} \\ \xrightarrow[(4/5,2)]{x-4y-5=0} \frac{|1(4/5)-4(2)-5|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\frac{8/5}{\sqrt{17}}=\frac{\frac{17}{2}}{\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

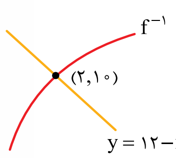
گام بنابراین اندازهٔ طول مستطیل برابر $\sqrt{17}$ است. طبق مورد (۵) درس‌نامه، فاصلهٔ وسط قطر از اضلاع مستطیل برابر نصف اندازهٔ طول و عرض مستطیل یعنی $\frac{\sqrt{17}}{2}$ و $\frac{\sqrt{17}}{4}$ می‌شود. سؤال بیشترین فاصله را می‌خواهد، پس جواب می‌شود $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

۸- گزینه ۴

استراتژی اول $y=10$ را در خط $y=12-x$، جای‌گذاری کنید تا طول نقطهٔ تقاطع f^{-1} با این خط به دست آید. بعد مختصات نقطهٔ تقاطع به صورت (۲,۱۰) می‌شود، این یعنی $f^{-1}(2)=10$ است. در آخر با حل معادلهٔ $f(10)=2$، مقدار m و $f(m+4)$ به دست می‌آید.

درس‌نامه اگر $f^{-1}(\alpha)=\beta$ باشد، آن‌گاه $f(\beta)=\alpha$ می‌شود.

گام ابتدا یک شکل فرضی رسم می‌کنیم: عرض نقطهٔ تقاطع $y=10$ است، از طرفی نقطهٔ تقاطع روی خط $y=12-x$ قرار دارد، پس با جای‌گذاری $y=10$ در این خط، طول نقطهٔ تقاطع می‌شود: $10=12-x \Rightarrow x=2$ بنابراین مختصات نقطهٔ تقاطع (۲,۱۰) است.



گام f^{-1} از نقطهٔ (۲,۱۰) می‌گذرد، پس $f^{-1}(2)=10$ می‌شود. حالا طبق درس‌نامه، می‌توانیم بگوییم $f(10)=2$ می‌شود:

$$f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{mx-1}} \Rightarrow f(10)=\sqrt{10-2\sqrt{10m-1}}=2$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 10-2\sqrt{10m-1}=4 \Rightarrow -2\sqrt{10m-1}=-6$$

$$\xrightarrow{\div(-2)} \sqrt{10m-1}=3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 10m-1=9 \Rightarrow 10m=10 \Rightarrow m=1$$

بنابراین ضابطهٔ f به این صورت شد: $f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

گام حالا که m را داریم، می‌توانیم مقدار $f(\underset{1}{m}+4)$ را محاسبه کنیم:

$$f(\underbrace{m}_{1}+4)=f(5)=\sqrt{5-2\underbrace{\sqrt{5-1}}_{2}}=\sqrt{1}=1$$

۹- گزینهٔ ۱

درس نامه ① برای از بین بردن توان در معادلات نمایی، می‌توانیم از طرفین در یک مبنای دلخواه، مثلِ x لگاریتم بگیریم که در این صورت، توان تبدیل به ضریب می‌شود:

$$a^n=b^m \Rightarrow \log_x a^n=\log_x b^m \Rightarrow n\log_x a=m\log_x b$$

② بعضی از قوانین لگاریتم به شکل زیرند:

الف) $\log_{b^n} a^m=\frac{m}{n}\log_b a$ ب) $\log_a ۱=۰$

پ) $\log ab=\log a+\log b$ ت) $\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$

ث) $\log_b a=\frac{۱}{\log_a b}$

گام این عنصر در هر ساعت $\frac{۱}{۹}$ جرم خود را از دست می‌دهد، یعنی جرم آن $۱-\frac{۱}{۹}=\frac{۸}{۹}$ برابر می‌شود؛ بنابراین پس از n ساعت، جرم عنصر $(\frac{۸}{۹})^n$ برابر می‌شود.

گام برای این‌که ببینیم پس از چند ساعت، $\frac{۱}{۶}$ از جرم عنصر باقی خواهد ماند، باید معادلهٔ $(\frac{۸}{۹})^n=\frac{۱}{۶}$ را حل کنیم. از دو طرف این معادله در مبنای ۵ لگاریتم می‌گیریم:

$$(\frac{۸}{۹})^n=\frac{۱}{۶} \Rightarrow \log_۵(\frac{۸}{۹})^n=\log_۵\frac{۱}{۶} \xrightarrow{\text{قسمت (۲- الف) درس‌نامه}} n\log_۵\frac{۸}{۹}=\log_۵\frac{۱}{۶}$$

$$\xrightarrow{\text{قسمت (۲- ت) درس‌نامه}} n(\log_۵ \overset{۲^۳}{۸}-\log_۵ \overset{۳^۲}{۹})=\underbrace{\log_۵ ۱}_{۰}-\log_۵ \overset{۲\times۳}{۶}$$

$$\xrightarrow{\text{قسمت(۲- الف و پ) درس‌نامه}} n(۳\log_۵ ۲-۲\log_۵ ۳)=-(\log_۵ ۲+\log_۵ ۳)\quad (*)$$

گام حالا سراغ داده‌های سؤال می‌رویم:

$$\begin{cases}\log_۲ ۵=۲/۴\\ \log_۳ ۵=۱/۴\end{cases} \xrightarrow{\text{قسمت (۲- ث) درس‌نامه}} \begin{cases}\log_۵ ۲=\frac{۱}{۲/۴}=\frac{۱}{\frac{۲۴}{۱۰}}=\frac{۱۰}{۲۴}=\frac{۵}{۱۲}\\ \log_۵ ۳=\frac{۱}{۱/۴}=\frac{۱}{\frac{۱۴}{۱۰}}=\frac{۱۰}{۱۴}=\frac{۵}{۷}\end{cases}$$

گام مقادیر به‌دست‌آمده را در (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$n(۳\times\frac{\cancel{۵}}{۱۲}-۲\times\frac{\cancel{۵}}{۷})=-(\frac{\cancel{۵}}{۱۲}+\frac{\cancel{۵}}{۷}) \Rightarrow n(\underbrace{\frac{۳}{۱۲}-\frac{۲}{۷}}_{\frac{۲۱}{۸۴}-\frac{۲۴}{۸۴}})=-(\underbrace{\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۷}}_{\frac{۷}{۸۴}+\frac{۱۲}{۸۴}})$$

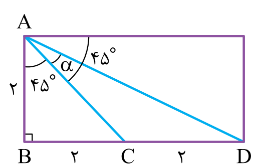
$$\Rightarrow n\times\frac{\cancel{-}۳}{\cancel{۸۴}}=\cancel{-}\frac{۱۹}{\cancel{۸۴}} \Rightarrow n=\frac{۱۹}{۳}$$

بنابراین پس از $\frac{۱۹}{۳}$ ساعت یا همان «$\frac{۱۹}{۳}\times۶۰=۳۸۰$ دقیقه»، $\frac{۱}{۶}$ از جرم عنصر باقی خواهد ماند.

۱۰- گزینهٔ ۲

درس نامه فرمول تانژانت مجموع و تفاضل دو زاویه به شکل زیر است:

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{۱\mp\tan\alpha.\tan\beta}$$



گام همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، مثلث ABC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است؛ پس می‌توانیم بگوییم $B\hat{A}C=۴۵^\circ$ می‌شود. حالا در مثلث ABD، تانژانت می‌نویسیم:

$$\tan B\hat{A}D=\frac{BD}{AB} \Rightarrow \tan(۴۵^\circ+\alpha)=\frac{۴}{۲}=۲$$

گام حالا با استفاده از فرمول درس‌نامه، $\tan(۴۵^\circ+\alpha)$ را باز می‌کنیم:

$$\tan(۴۵^\circ+\alpha)=\frac{\tan۴۵^\circ+\tan\alpha}{۱-\tan۴۵^\circ.\tan\alpha} \xrightarrow{\tan۴۵^\circ=۱} ۲=\frac{۱+\tan\alpha}{۱-\tan\alpha}$$

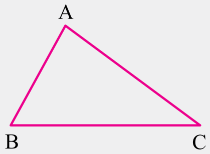
$$\Rightarrow ۲-۲\tan\alpha=۱+\tan\alpha \Rightarrow -۳\tan\alpha=-۱ \Rightarrow \tan\alpha=\frac{۱}{۳}$$

نکته $\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}$

طبق نکتهٔ بالا می‌توانیم بگوییم: $\cot\alpha=۳$

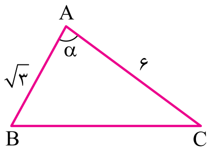
تیز بازی با توجه به شکل، واضح است که $\alpha<۴۵^\circ$ است. از طرفی می‌دانیم اگر $۰^\circ<\alpha<۴۵^\circ$ باشد، $\cot\alpha>۱$ است. در بین گزینه‌ها فقط مقدار ② بزرگ‌تر از ۱ است؛ پس جواب همین گزینه است.

۱۱- گزینهٔ ۱



درس نامه مساحت یک مثلث را می‌توانیم با استفاده از سینوس زوایای داخلی‌اش، به دست آوریم؛ مثلاً برای مثلث ABC در شکل مقابل داریم:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB.AC.\sin\hat{A}$$



گام ابتدا یک شکل فرضی برای سؤال رسم می‌کنیم: (فرض کنید $AB=\sqrt{۳}$، $AC=۶$ و زاویهٔ بین این دو یعنی $\hat{A}$ برابر α است.)

گام با کمک فرمول درس‌نامه، مساحت این مثلث را به دست می‌آوریم:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB.AC.\sin\alpha \Rightarrow ۴/۵=\frac{\sqrt{۳}\times۶\times\sin\alpha}{۲}$$

$$\Rightarrow ۹=۶\sqrt{۳}\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\frac{۹}{۶\sqrt{۳}}=\frac{۳}{۲\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

گام می‌دانیم در هر مثلث، هر زاویه بین صفر و ۱۸۰ درجه است، پس α هم بین صفر و ۱۸۰° است که می‌تواند برابر ۶۰° یا ۱۲۰° شود (سینوس ۶۰° و ۱۲۰° برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است)، پس بیشترین مقدار α، دو برابر کم‌ترین مقدار آن است.

۱۲- گزینهٔ ۴

درس نامه ① $\sin\alpha.\cos\alpha=\frac{\sin۲\alpha}{۲}$

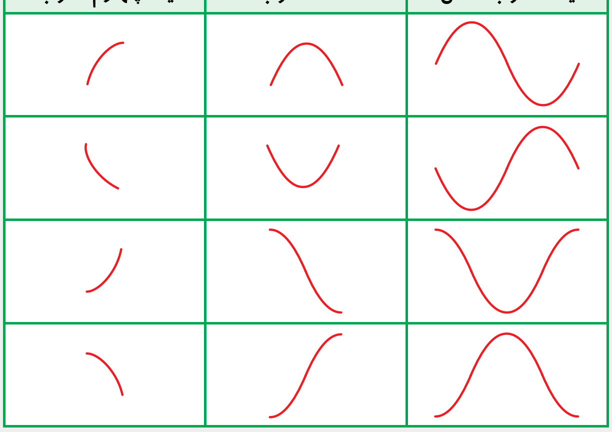
② برای محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی، می‌توانیم هر مضرب زوج دلخواهی از π را اضافه یا کم کنیم.

③ نسبت‌های مثلثاتی $\alpha+\frac{\pi}{۲}$ به شکل زیرند:

$\cos(\alpha+\frac{\pi}{۲})=-\sin\alpha$	$\sin(\alpha+\frac{\pi}{۲})=\cos\alpha$
$\cot(\alpha+\frac{\pi}{۲})=-\tan\alpha$	$\tan(\alpha+\frac{\pi}{۲})=-\cot\alpha$

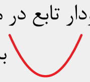
④ برای به دست آوردن دورهٔ تناوب توابع سینوسی و کسینوسی از روی نمودار، از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

یک تناوب کامل	نصف تناوب	یک‌چهارم تناوب



⑤ در توابع مثلثاتی به شکل $y=a+b\cos(cx)$ داریم:

الف) $\begin{cases}\max=a+|b|\\ \min=a-|b|\\ a=\frac{\max+\min}{۲}\end{cases}$ ب) $T=\frac{۲\pi}{|c|}$

پ) اگر نمودار تابع در محل برخورد با محور yها به شکل قله  باشد، $b>۰$ و اگر به شکل دره  باشد، $b<۰$ است.

گام: ابتدا با استفاده از مورد (۱) درس‌نامه داریم:

$$\sin(cx-\frac{3\pi}{4})\cos(cx-\frac{3\pi}{4})=\frac{1}{2}\sin(2cx-\frac{3\pi}{2})$$

با توجه به مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم به $(2cx-\frac{3\pi}{2})$، 2π اضافه کنیم:

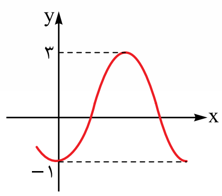
$$\frac{1}{2}\sin(2cx-\frac{3\pi}{2}+2\pi)=\frac{1}{2}\sin(2cx+\frac{\pi}{2})\xrightarrow{\text{مورد (۳) درس‌نامه}}\frac{1}{2}\cos(2cx)$$

بنابراین ساده‌شدهٔ ضابطهٔ f به صورت مقابل است: $f(x)=a+\frac{b}{2}\cos(2cx)$

گام: با توجه به نمودار تابع، از $x=0$ تا $x=\pi$ یک تناوب کامل داریم، پس $T=\pi$ است. حالا با استفاده از مورد (۵ ـ ب) درس‌نامه، داریم: $\frac{\cancel{2}\pi}{|\cancel{2}c|}=\cancel{\pi}\Rightarrow |c|=1$

نکته $\cos(\alpha)=\cos(-\alpha)$

از آن‌جایی که کسینوس یک زاویه و کسینوس قرینهٔ آن زاویه (طبق نکتهٔ بالا) با هم برابرند، c می‌تواند برابر ۱+ یا ۱− باشد، حالا ما برای راحتی فرض می‌کنیم $c=1$ است.



گام: همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، نمودار تابع در محل برخورد با محور yها به شکل دره است، پس طبق مورد (۵ ـ پ) درس‌نامه، $\frac{b}{2}<0$ و در نتیجه $b<0$ است.

گام: حداکثر مقدار این تابع برابر ۳ و حداقل آن برابر ۱− است؛ پس طبق مورد (۵) درس‌نامه داریم:

$$\begin{cases}a+|\frac{b}{2}|=3\\ a-|\frac{b}{2}|=-1\end{cases}\xrightarrow{b<0}\begin{cases}a-\frac{b}{2}=3\\ a+\frac{b}{2}=-1\end{cases}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}a=1,b=-4$$

پس ضابطهٔ f به صورت $f(x)=1-2\cos(2x)$ است.

گام: صفرهای تابع f را می‌خواهیم:

$$f(x)=0\Rightarrow 1-2\cos(2x)=0\Rightarrow\cos(2x)=\frac{1}{2}$$

به جای $\frac{1}{2}$ قرار می‌دهیم $\cos(\frac{\pi}{3})$: $\cos(2x)=\cos(\frac{\pi}{3})$

نکته جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos A=\cos B$ به صورت $A=2k\pi\pm B$ است.

حالا جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos(2x)=\cos(\frac{\pi}{3})$ را به کمک نکتهٔ بالا به دست می‌آوریم:

$$2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\xrightarrow{\div 2}x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}\xrightarrow{x\in[0,\pi]}x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$$

اختلاف این دو جواب، برابر $\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$ است.

۱۳- گزینهٔ ۳

درس‌نامه فرمولِ کسینوسِ مجموع و تفاضل دو زاویه به شکل زیر است:

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha.\cos\beta\mp\sin\alpha.\sin\beta\qquad\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha).\cos(\alpha)$$

گام: ابتدا با کمک درس‌نامه، $\cos(x+\frac{\pi}{4})$ را ساده می‌کنیم:

$$\cos(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\cos x.\underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\sin x.\underbrace{\sin\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\xrightarrow{\times\frac{2}{\sqrt{2}}}\cos x-\sin x=\frac{2}{\sqrt{6}}\ \text{(I)}$$

طرفین (I) را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\underbrace{\sin^2x+\cos^2x}_{1}-\underbrace{2\sin x.\cos x}_{\sin(2x)}=\underbrace{\frac{4}{6}}_{\frac{2}{3}}\Rightarrow\sin(2x)=\frac{1}{3}\ \text{(II)}$$

گام: با جای‌گذاری (I) و (II) در معادلهٔ $m(\cos x-\sin x)-3\sqrt{6}\sin(2x)=\sqrt{6}$ داریم:

$$m\times\frac{2}{\sqrt{6}}-\cancel{3}\sqrt{6}\times\frac{1}{\cancel{3}}=\sqrt{6}\Rightarrow\frac{2m}{\sqrt{6}}-\sqrt{6}=\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow\frac{\cancel{2}m}{\sqrt{6}}=\cancel{2}\sqrt{6}\Rightarrow\frac{m}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\Rightarrow m=6$$

مشاوره هر وقت در سؤالی $\underbrace{A=\sin x\pm\cos x}_{(*)}$ را داشتید و مقدار $\sin x.\cos x$ یا $\sin(2x)$ را می‌خواستید، کافی است طرفین معادلهٔ (*) را به توان ۲ برسانید تا جواب حاصل شود.

۱۴- گزینهٔ ۱

استراتژی باید سه نامعادلهٔ $-3+2m-m^2<0$، $m^2-m-5<0$ و $m^2-m-5>-3+2m-m^2$ را حل کنید و از جواب‌ها اشتراک بگیرید.

درس‌نامه ۱ اگر دامنهٔ تابع $f(x)$، بازهٔ A باشد، برای به دست آوردن دامنهٔ تابع $f(\bigcirc)$، باید شرط $\bigcirc\in A$ را اجرا کنید؛ مثلاً اگر دامنهٔ تابع $f(x)$ بازهٔ $[-2,3)$ باشد، برای به دست آوردن دامنهٔ تابع $f(2x-5)$ باید نامعادلهٔ $-2\leq 2x-5<3$ را حل کنیم.

۲ اگر f تابعی اکیداً نزولی باشد، داریم: $f(\alpha)<f(\beta)\Leftrightarrow\alpha>\beta$

گام: دامنهٔ f مجموعه‌ای از مقادیر منفی (یا همان $(-\infty,0)$) است، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، برای به دست آوردن دامنهٔ $f(-3+2m-m^2)$، باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$-3+2m-m^2<0\Rightarrow m^2-2m+3>0$$

دلتای عبارت سمت چپ منفی $(\Delta=4-12=-8)$ و ضریب m^2 مثبت است، پس نامساوی بالا همیشه برقرار است؛ بنابراین مجموعه‌جواب آن $\mathbb{R}$ می‌شود.

گام: حالا دامنهٔ $f(m^2-m-5)$ را به دست می‌آوریم:

$$m^2-m-5<0\xrightarrow[\text{ریشه‌ها}]{\Delta=21}\begin{cases}m_1=\frac{1+\sqrt{21}}{2}\\ m_2=\frac{1-\sqrt{21}}{2}\end{cases}$$

جدول تعیین علامت رسم می‌کنیم:

	$\frac{1-\sqrt{21}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{21}}{2}$	
+		−		+

به دنبال قسمت‌های منفی هستیم، پس: $m\in(\frac{1-\sqrt{21}}{2},\frac{1+\sqrt{21}}{2})$

$\sqrt{21}$ تقریباً برابر ۴/۶ است، پس بازهٔ بالا را می‌توانیم به این صورت بنویسیم:

$$(\frac{1-\overbrace{\sqrt{21}}^{4/6}}{2},\frac{1+\overbrace{\sqrt{21}}^{4/6}}{2})\simeq(-\frac{3/6}{2},\frac{5/6}{2})=(-1/8,2/8)\ \text{(I)}$$

گام: f تابعی اکیداً نزولی است، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه داریم:

$$f(m^2-m-5)<f(-3+2m-m^2)\Rightarrow m^2-m-5>-3+2m-m^2$$

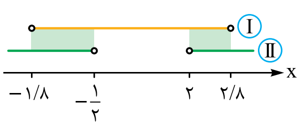
$$\Rightarrow 2m^2-3m-2>0\xrightarrow[\text{ریشه‌ها}]{\Delta=25}\begin{cases}m_1=\frac{3+5}{4}=2\\ m_2=\frac{3-5}{4}=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

جدول تعیین علامت رسم می‌کنیم:

	$-\frac{1}{2}$		2	
+		−		+

این‌جا قسمت‌های مثبت را می‌خواهیم، پس: $m\in(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)$ (II)

گام: در آخر با اشتراک‌گرفتن از دو بازهٔ (I) و (II) جواب حاصل می‌شود:



$$\Rightarrow(I)\cap(II)=(-1/8,\underbrace{-\frac{1}{2}}_{-0/5})\cup(2,2/8)$$

این بازه فقط شامل یک عدد صحیح (فقط شامل ۱−) است.

۱۵- گزینهٔ ۳

درس‌نامه ۱ ضابطهٔ یک تابع هموگرافیک به شکل $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ (البته به شرطی که $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$ باشند) و ضابطهٔ وارونش هم به شکل $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

② **هم‌ارزی پرتوان**: برای محاسبهٔ حد در بی‌نهایت یک تابع کسری (مثلاً $\lim_{x\to\infty}\frac{f}{g}$)، کافی است در صورت و مخرج، فقط جملهٔ با بزرگ‌ترین توان x را نگه دارید و بقیهٔ جملات را حذف کنید، برای مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۴x-۲}{۵x+۳}=\lim_{x\to\infty}\frac{۴\cancel{x}}{۵\cancel{x}}=\frac{۴}{۵}$$

گام f تابعی هموگرافیک است، پس ضابطهٔ آن را می‌توانیم به صورت $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ در نظر بگیریم؛ این‌جوری ضابطهٔ g به شکل $g(x)=\frac{۱}{f(x)}=\frac{cx+d}{ax+b}$ می‌شود.

گام ضابطهٔ $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ را به کمک مورد (۱) درس‌نامه به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$g(x)=\frac{cx+d}{ax+b}\Rightarrow g^{-۱}(x)=\frac{-bx+d}{ax-c}$$

گام حالا حاصل حدهای داده‌شده را با کمک هم‌ارزی پرتوان حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g^{-۱}(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{ax+b}{cx+d}}{\frac{-bx+d}{ax-c}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(ax+b)(ax-c)}{(cx+d)(-bx+d)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{a^۲x^۲+(ab-ac)x-bc}{-bcx^۲+(cd-bd)x+d^۲}\overset{\text{هم‌ارزی پرتوان}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{a^۲\cancel{x^۲}}{-bc\cancel{x^۲}}=-\frac{a^۲}{bc}$$

سراغ حد دیگر می‌رویم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g^{-۱}(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-bx+d}{ax-c}}{\frac{cx+d}{ax+b}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(-bx+d)(ax+b)}{(ax-c)(cx+d)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-abx^۲+(ad-b^۲)x+bd}{acx^۲+(ad-c^۲)x-cd}\overset{\text{هم‌ارزی پرتوان}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-ab\cancel{x^۲}}{ac\cancel{x^۲}}=-\frac{ab}{ac}=-\frac{b}{c}$$

به گفتهٔ سؤال دو مقدار $-\frac{a^۲}{bc}$ و $-\frac{b}{c}$ با هم برابرند، پس:

$$\cancel{-}\frac{a^۲}{b\cancel{c}}=\cancel{-}\frac{b}{\cancel{c}}\Rightarrow a^۲=b^۲\Rightarrow\frac{b^۲}{a^۲}=۱\Rightarrow\frac{b}{a}=\pm۱$$

گام در آخر، حاصل $\lim_{x\to۰^+}f^{-۱}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to۰^+}f^{-۱}(x)=\lim_{x\to۰^+}\frac{-dx+b}{cx-a}=-\frac{b}{a}$$

مقدار $\frac{b}{a}$ برابر ±۱ است، پس مقدار $-\frac{b}{a}$ هم برابر ±۱ می‌شود که تنها ۱ در بین گزینه‌ها است.

۱۶- گزینهٔ ۲

استراتژی کافی است پیوستگی f را به ازای n=۱ و n=۲ بررسی کنید.

گام ابتدا فرض کنید n=۱ است، پس f باید در x=n=۱ و x=-n=-۱ پیوسته باشد. پیوستگی f در x=۱ را بررسی می‌کنیم.
برای به دست آوردن حد راست f در x=۱ داریم:

$$x\to۱^+\Rightarrow\underbrace{[x]=۱}_{\text{فرد}}\Rightarrow\lim_{x\to۱^+}f(x)=\lim_{x\to۱^+}(x-\underbrace{[x]}_{۱}+k)$$

$$=\lim_{x\to۱^+}(x-۱+k)=۱-۱+k=k$$

حد چپ f در x=۱ برابر است با:

$$x\to۱^-\Rightarrow\underbrace{[x]=۰}_{\text{زوج}}\Rightarrow\lim_{x\to۱^-}f(x)=\lim_{x\to۱^-}|x-[-x]|$$

مقدار $[-x]$ وقتی $x\to۱^-$ (مثلاً $x=۰/۹$)، برابر ۱- است ($[-۰/۹]=-۱$):

$$\lim_{x\to۱^-}|x-[-x]|=\lim_{x\to۱^-}|x-(-۱)|=|۱-(-۱)|=۲$$

مقدار f در x=۱ نیز برابر است با:

$$x=۱\Rightarrow\underbrace{[x]=۱}_{\text{فرد}}\Rightarrow f(x)=x-[x]+k\Rightarrow f(۱)=۱-۱+k=k$$

حالا حد راست، حد چپ و مقدار f در x=۱ را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x\to۱^+}f(x)=\lim_{x\to۱^-}f(x)=f(۱)\Rightarrow k=۲=k\Rightarrow k=۲$$

پس برای این‌که f در x=۱ پیوسته شود، باید k=۲ باشد.

گام پیوستگی f در x=-۱ را بررسی می‌کنیم. برای به دست آوردن حد راست f در x=-۱، داریم:

$$x\to(-۱)^+\Rightarrow\underbrace{[x]=-۱}_{\text{فرد}}\Rightarrow\lim_{x\to(-۱)^+}f(x)$$

$$=\lim_{x\to(-۱)^+}(x-\underbrace{[x]}_{-۱}+k)=\lim_{x\to(-۱)^+}(x+۱+k)=-۱+۱+k=k$$

حد چپ f در x=-۱ برابر است با:

$$x\to(-۱)^-\Rightarrow\underbrace{[x]=-۲}_{\text{زوج}}\Rightarrow\lim_{x\to(-۱)^-}f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}|x-[-x]|$$

مقدار $[-x]$ وقتی $x\to(-۱)^-$ (مثلاً $x=-۱/۱$) برابر ۱ است ($[-(-۱/۱)]=[۱/۱]=۱$):

$$\lim_{x\to(-۱)^-}|x-\underbrace{[-x]}_{+۱}|=\lim_{x\to(-۱)^-}|x-۱|=|-۱-۱|=۲$$

مقدار f در x=-۱ هم برابر است با:

$$x=-۱\Rightarrow\underbrace{[x]=-۱}_{\text{فرد}}\Rightarrow f(x)=x-[x]+k\Rightarrow f(-۱)=-۱-(-۱)+k=k$$

حالا حد راست، حد چپ و مقدار f در x=-۱ را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x\to(-۱)^+}f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}f(x)=f(-۱)\Rightarrow k=۲=k\Rightarrow k=۲$$

بنابراین به ازای مقدار مشخص k، f در n فرد پیوسته است.

گام حالا پیوستگی f به ازای n=۲ را بررسی می‌کنیم:

حد راست f در x=۲: $x\to۲^+\Rightarrow\underbrace{[x]=۲}_{\text{زوج}}\Rightarrow\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^+}|x-[-x]|$

مقدار $[-x]$ وقتی $x\to۲^+$ (مثلاً $x=۲/۱$)، برابر ۳- است ($[-۲/۱]=-۳$):

$$\lim_{x\to۲^+}|x-[-x]|=\lim_{x\to۲^+}|x-(-۳)|=۲-(-۳)=۵$$

مقدار f در x=۲ برابر است با:

$$x=۲\Rightarrow\underbrace{[x]=۲}_{\text{زوج}}\Rightarrow f(x)=|x-[-x]|\Rightarrow f(۲)=|۲-(-۲)|=۴$$

حد راست و مقدار f در x=۲ برابر نیستند، پس f در n=۲، پیوسته نیست و n نمی‌تواند زوج باشد.

۱۷- گزینهٔ ۳

استراتژی اول ضابطهٔ g را به دست آورید، بعد از هم‌ارزی‌های مثلثاتی استفاده کنید.

درس‌نامه وقتی $u\to۰$، هم‌ارزی مثلثاتی مقابل را برای سینوس داریم: $\sin(u)\simeq u$

گام اول ضابطهٔ g(x) را تنها می‌کنیم:

$$f(x)=xg(x)+۱\Rightarrow xg(x)=f(x)-۱\Rightarrow g(x)=\frac{f(x)-۱}{x}$$

حالا به جای f(x) در تساوی بالا، ضابطهٔ آن را جای‌گذاری می کنیم:

$$g(x)=\frac{(\frac{-۱+\sin x}{۱+\sin x})^۲-۱}{x}=\frac{\frac{\sin^۲x-۲\sin x+۱}{\sin^۲x+۲\sin x+۱}-۱}{x}$$

$$=\frac{\frac{\cancel{\sin^۲x}-۲\sin x+\cancel{۱}-\cancel{\sin^۲x}-۲\sin x-\cancel{۱}}{\sin^۲x+۲\sin x+۱}}{x}$$

$$=\frac{\frac{-۴\sin x}{\sin^۲x+۲\sin x+۱}}{x}=\frac{-۴\sin x}{x(\sin^۲x+۲\sin x+۱)}$$

گام پس $\lim_{x\to۰}g(x)$ به این صورت می‌شود:

$$\lim_{x\to۰}g(x)=\lim_{x\to۰}\frac{-۴\sin x}{x(\sin^۲x+۲\sin x+۱)}$$

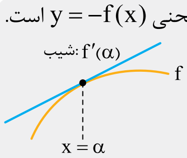
در حد بالا $x\to۰$ است، پس طبق درس‌نامه، می‌توانیم به جای sin x قرار دهیم x:

$$\lim_{x\to۰}\frac{-۴\cancel{x}}{\cancel{x}(x^۲+۲x+۱)}=\lim_{x\to۰}\frac{-۴}{x^۲+۲x+۱}=-۴$$

۱۸- گزینهٔ ۱

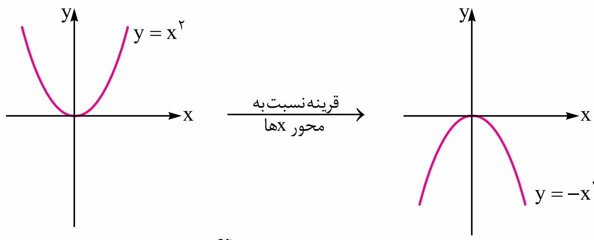
درس‌نامه ① قرینهٔ نمودار $y=f(x)$ نسبت به محور xها، منحنی $y=-f(x)$ است.

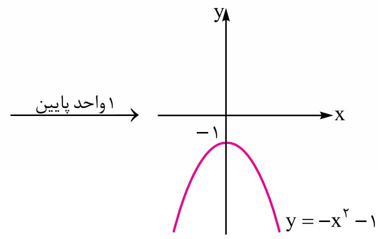
② شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه‌ای به طول $x=\alpha$ واقع بر آن، برابر $f'(\alpha)$ است. برای درک بهتر این موضوع شکل مقابل را ببینید:



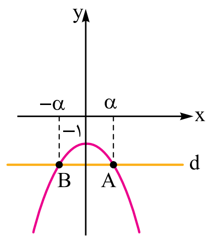
۳ اگر دو خط d و d′ بر هم عمود باشند، حاصل‌ضرب شیب‌هایشان ۱− می‌شود.

گام قرینهٔ سهمی $y=x^۲+۱$ نسبت به محور xها، طبق مورد (۱) درس‌نامه، سهمیِ $y=-x^۲-۱$ است که نمودار آن در سه مرحله رسم می‌شود:





گام نمودار $y=-x^۲-۱$، نسبت به محور yها متقارن است، پس می‌توانیم فرض کنیم خط d، این منحنی را در دو نقطه به طول‌های α و α− قطع می‌کند. $(\alpha>۰)$

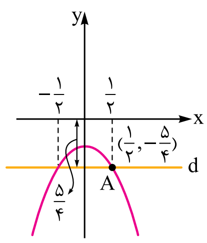


گام مشتق تابع $y=-x^۲-۱$، به صورت $y'=-۲x$ است، پس شیب خط مماس بر سهمی در نقطه‌ای به طول α برابر -۲α و شیب خط مماس بر آن در نقطه‌ای به طول α−، برابر ۲α است. (مورد (۲) درس‌نامه).

گام این دو خط بر هم عمودند، پس طبق مورد (۳) درس‌نامه، حاصل‌ضرب شیب‌هایشان ۱− است:

$$(-۲\alpha)\times(۲\alpha)=-۱ \Rightarrow ۴\alpha^۲=۱ \Rightarrow \alpha^۲=\frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{\alpha>۰} \alpha=\frac{۱}{۲}$$



گام با جای‌گذاری $\alpha=\frac{۱}{۲}$ به جای x در ضابطهٔ $y=-x^۲-۱$، عرض نقطهٔ A برابر $y=-(\frac{۱}{۲})^۲-۱=-\frac{۵}{۴}$ می‌شود، پس فاصلهٔ خط d از مبدأ مختصات $\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$ است:

۱۹- گزینهٔ ۴

درس‌نامه طول نقطهٔ عطف توابع درجه‌سوم به شکل $y=ax^۳+bx^۲+cx+d$، برابر $-\frac{b}{۳a}$ است.

گام طول نقطهٔ عطف منحنی $y=kx^۳+(k+۱)x^۲$، طبق درس‌نامه برابر $-\frac{k+۱}{۳k}$ است.
می‌خواهیم نقطهٔ عطف در ربع دوم باشد، پس طول آن باید منفی باشد:

$$-\frac{k+۱}{۳k}<۰ \Rightarrow \frac{k+۱}{۳k}>۰ \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} \begin{cases} k+۱=۰ \Rightarrow k=-۱ \ (\text{ریشهٔ فرد}) \\ ۳k=۰ \Rightarrow k=۰ \ (\text{ریشهٔ فرد}) \end{cases}$$

جدول تعیین علامت رسم می‌کنیم:

	۱−		۰	
+		−		+

$$\xrightarrow{\text{مقادیر مثبت را می‌خواهیم}} (-\infty,-۱)\cup(۰,+\infty) \quad (I)$$

گام حالا با جای‌گذاری $x=-\frac{k+۱}{۳k}$ در منحنی، عرض نقطهٔ عطف را به دست می‌آوریم:

$$y=kx^۳+(k+۱)x^۲ \xrightarrow{x=-\frac{k+۱}{۳k}} y=k(-\frac{k+۱}{۳k})^۳+(k+۱)(-\frac{k+۱}{۳k})^۲$$

$$=-k\times\frac{(k+۱)^۳}{۲۷k^۳}+(k+۱)\times\frac{(k+۱)^۲}{۹k^۲}=-\frac{(k+۱)^۳}{۲۷k^۲}+\frac{(k+۱)^۳}{۹k^۲}$$

$$=\frac{-(k+۱)^۳+۳(k+۱)^۳}{۲۷k^۲}=\frac{۲(k+۱)^۳}{۲۷k^۲}$$

برای این‌که نقطهٔ عطف در ربع دوم باشد، باید عرض آن مثبت شود:

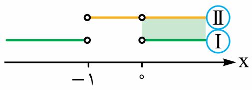
$$\frac{۲(k+۱)^۳}{۲۷k^۲}>۰ \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} \begin{cases} ۲(k+۱)^۳=۰ \Rightarrow k=-۱ \ (\text{ریشهٔ فرد}) \\ ۲۷k^۲=۰ \Rightarrow k=۰ \ (\text{ریشهٔ زوج}) \end{cases}$$

جدول تعیین علامت رسم می‌کنیم:

	۱−		۰	
−		+		+

$$\xrightarrow{\text{مقادیر مثبت را می‌خواهیم}} (-۱,۰)\cup(۰,+\infty) \quad (II)$$

گام از دو بازهٔ (I) و (II) اشتراک می‌گیریم:



$$\Rightarrow (I)\cap(II)=(۰,+\infty)$$

این بازه شامل هیچ عدد صحیح منفی‌ای نیست، پس جواب صفر می‌شود.

۲۰- گزینهٔ ۲

درس‌نامه ۱ **نقطهٔ شناور:** هر وقت در سؤالی به ما گفته شود که نقطهٔ A روی منحنی $y=f(x)$ قرار دارد (یا بیشترین یا کم‌ترین فاصلهٔ نقاط منحنی $y=f(x)$ از فلان چیز را می‌خواهیم)، مختصات نقاط روی منحنی را به صورت $(x,f(x))$ در نظر می‌گیریم؛ برای مثال نقاط روی منحنی $y=\sqrt{x-۱}$ را به صورت $(x,\sqrt{x-۱})$ فرض می‌کنیم.

۲ در مسائل بهینه‌سازی برای پیداکردن طول نقاط اکسترمم یک تابع، کافی است ریشه‌های صورت و مخرج مشتق آن را محاسبه کنیم.

۳ فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر است با: $\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

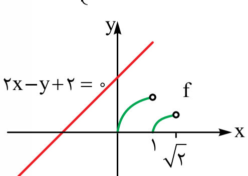
گام ابتدا دقت کنید برای این‌که زیر رادیکال منفی نشود، باید $x-[x^۲]\geq ۰$، یعنی $x\geq[x^۲]$ باشد. $x^۲$ نامنفی است، پس $[x^۲]$ هم نامنفی می‌شود، بنابراین x هم باید نامنفی باشد.
حالا با بازه‌بندی داریم:

$$f(x)=\begin{cases} ۰\leq x<۱ \Rightarrow \sqrt{x-\underbrace{[x^۲]}_{۰}}=\sqrt{x} \\ ۱\leq x<\sqrt{۲} \Rightarrow \sqrt{x-\underbrace{[x^۲]}_{۱}}=\sqrt{x-۱} \\ \sqrt{۲}\leq x<\sqrt{۳} \Rightarrow \sqrt{x-\underbrace{[x^۲]}_{۲}}=\sqrt{x-۲} \quad \text{غ ق ق، چون زیر رادیکال منفی می‌شود.} \\ \vdots \\ \text{بقیهٔ مقادیر نیز غیر قابل قبول‌اند.} \end{cases}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به شکل مقابل می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & ۰\leq x<۱ \\ \sqrt{x-۱} & ۱\leq x<\sqrt{۲} \end{cases}$$

گام نمودار تابع f و خط $۲x-y+۲=۰$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار رسم‌شده، واضح است نقاطی از منحنی f که کم‌ترین فاصله را تا خط دارند، روی $\sqrt{x}$ قرار دارند.

گام نقاط روی $f(x)=\sqrt{x}$ را به صورت $A(x,\sqrt{x})$ نمایش می‌دهیم. فاصلهٔ این نقاط از خط $۲x-y+۲=۰$ برابر است با:

$$\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} \xrightarrow[(x,\sqrt{x})]{۲x-y+۲=۰} d(x)=\frac{|۲x-\sqrt{x}+۲|}{\sqrt{۴+۱}}$$

x در بازهٔ $[۰,۱)$ است که در این بازه، $۲x-\sqrt{x}+۲$ مثبت است، پس می‌توانیم قدرمطلق را برداریم:

$$d(x)=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\times(۲x-\sqrt{x}+۲)$$

گام از تابع $d(x)$ مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم تا طول نقاط اکسترمم به دست آیند:

$$d'(x)=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\times(۲-\frac{۱}{۲\sqrt{x}})=۰ \Rightarrow ۲-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}=۰$$

$$\Rightarrow ۲=\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow x=\frac{۱}{۱۶}$$

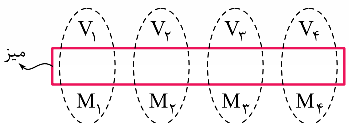
بنابراین طول نقطهٔ اکسترمم این تابع، $x=\frac{1}{16}$ است. با جای‌گذاری $x=\frac{1}{16}$ در تابع $d(x)$، جواب حاصل می‌شود:

$$d(x)=\frac{1}{\sqrt5}\times(2x-\sqrt x+2)$$

$$\Rightarrow d(\frac{1}{16})=\frac{1}{\sqrt5}\times\underbrace{(2\times\frac{1}{16}-\sqrt{\frac{1}{16}}+2)}_{\frac18-\frac14+2=\frac{15}{8}}=\frac{1}{\sqrt5}\times\frac{15}{8}=\frac{3\times\overset{\sqrt5}{\cancel{5}}}{8\cancel{\sqrt5}}=\frac{3\sqrt5}{8}$$

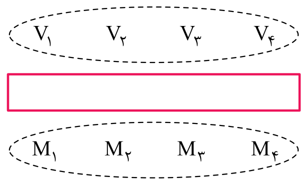
۲۱- گزینهٔ ؟

چهار وزیر را V_1، V_2، V_3 و V_4 و چهار معاونشان را هم M_1، M_2، M_3 و M_4 در نظر می‌گیریم. همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، ۴ معاون را می‌توانیم به !۴ طریق در پایین میز بچینیم. با این کار جای هر کدام از وزیران در بالای میز مشخص می‌شود. هر کدام از بسته‌های بیضی‌شکل هم !۲ جایگشت دارند؛ پس جواب برابر می‌شود با:



$$\overset{\text{جایگشت معاونین}}{4!}\times\underbrace{2!\times2!\times2!\times2!}_{\text{جایگشت داخل بسته‌ها}}=24\times16=384$$

اما متأسفانه عدد بالا در گزینه‌ها نیست و طراح (۳) رو به عنوان گزینهٔ درست انتخاب کرده است!! احتمالاً منظور طراح این بوده که همهٔ وزیران باید در کنار هم و همین‌طور همهٔ معاون‌ها هم باید کنار هم بنشینند؛ این‌جوری دیگر جایگشتِ داخل بسته‌های بیضی‌شکلِ بالا را نداریم، بلکه مطابق شکل مقابل، کل بستهٔ وزیران و کل بستهٔ معاونین !۲ جایگشت دارند؛ این‌جوری به عدد ۴۸ در (۳) می‌رسیم:



$$4!\times2!=24\times2=48$$

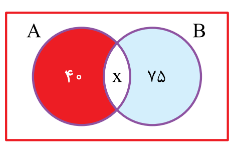
مشاوره متأسفانه در کنکورهای جدید (به‌خصوص همین کنکور) سؤالات پر ابهام و غلط زیاد شده؛ پس اگر در یک سؤال دیدید هیچ‌جوره به جواب نمی‌رسید این احتمال وجود دارد که اصلاً سؤال غلط باشد. در این‌جور مواقع از سؤال رد شوید.

۲۲- گزینه ۴

استراتژی اول نمودار ون را برای دو مجموعهٔ A و B می‌کشیم، بعد تعداد اعضای «فقط A» و «فقط B» را در ناحیهٔ مناسب می‌نویسیم. در ادامه تعداد اعضای ناحیهٔ $A\cap B$ را x در نظر می‌گیریم تا بتوانیم $\frac{P(A)}{P(B)}$ را برحسب x بنویسیم. در آخر مقدار x را طوری تنظیم می‌کنیم که $\frac{P(A)}{P(B)}$ حداکثر شود.

گام با دو پیشامد A و B طرفیم، پس نمودار ون را به صورت زیر می‌کشیم.

حالا تعداد اعضای ناحیه‌های مختلف را در نمودار مقابل می‌نویسیم. به گفتهٔ سؤال ۴۰ نفر **فقط** بلیت فیلم «الف» را خریده‌اند، پس تعداد اعضای ناحیهٔ قرمزرنگِ مقابل می‌شود ۴۰. از طرفی ۷۵ نفر هم **فقط** بلیت فیلم «ب» را خریداری کرده‌اند، این یعنی تعداد اعضای ناحیهٔ آبی‌رنگِ مقابل می‌شود ۷۵.



n(S) = ۱۵۰

گام بیایید فرض کنیم تعداد اعضای $A\cap B$، x تا باشد، در این صورت $\frac{P(A)}{P(B)}$ برابر می‌شود با:

$$\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{x+40}{\cancel{150}}}{\frac{x+75}{\cancel{150}}}\Rightarrow\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{x+40}{x+75}\quad(*)$$

نکته هر تابع هموگرافیک مثل $y=\frac{ax+b}{cx+d}$، دو شاخه دارد. در صورتی که $ad-bc>0$ باشد، هر دو شاخه اکیداً صعودی و در صورتی که $ad-bc<0$ باشد، هر دو شاخه اکیداً نزولی هستند.

طبق نکتهٔ بالا $y=\frac{x+40}{x+75}$ یک تابع هموگرافیک با شاخه‌های صعودی است، چون $ad-bc=75-40>0$ است؛ بنابراین اگر حداکثرش را می‌خواهیم باید حداکثر x را حساب کنیم.

گام همان‌طور که در نمودار ون گام (۱) می‌بینید، از ۱۵۰ نفر، «$40+75=115$» نفر در قسمت‌های رنگی هستند. x زمانی حداکثر می‌شود که همهٔ «$150-115=35$» نفر باقی‌مانده را به $A\cap B$ اختصاص بدهیم، یعنی $x_{max}=35$ است؛ بنابراین بیشترین مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ برابر می‌شود با:

$$\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{x+40}{x+75}\xrightarrow{x_{max}=35}\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{35+40}{35+75}=\frac{75}{110}=\frac{15}{22}$$

مشاوره این اولین باری است که احتمال با تابع ترکیب می‌شود. این تست پیغام می‌دهد که دیگر نباید چیزی از ریاضی را حذف کنید؛ تست‌ها دیگر ترکیبی شده‌اند.

۲۳- گزینه ۳

شفاف‌سازی منظور طراح از «این روند تا جایی ادامه می‌یابد که همهٔ اعداد زوج، غیرتکراری و با بیشترین میانگین ممکن باشند.» این است که در هر مرحله‌ای که دو عدد دلخواه را حذف می‌کنید و به جای آن دو عدد، اختلافشان را می‌نویسید، نباید هیچ عدد تکراری‌ای درست شود؛ نداشتن تکراری در مرحلهٔ آخر کافی نیست؛ در هیچ مرحله‌ای نباید تکراری داشته باشیم. در غیر این صورت جواب مسئله منحصر به فردی نخواهد داشت.

درس‌نامه (۱) اگر میانگین n دادهٔ x_1، x_2، ... و x_n برابر $\bar{x}$ باشد، در این صورت واریانسشان از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$

(۲) انحراف معیار، همان جذر واریانس است: $\text{انحراف معیار}=\sqrt{\text{واریانس}}$

گام به گفتهٔ سؤال، اعداد زیر را در اختیار داریم:

$9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19$

در هر مرحله باید دوتا عدد را انتخاب کنیم و به جای آن دو، اختلافشان را بنویسیم، به شرطی که:

۱- در **هیچ مرحله‌ای** عدد تکراری درست نشود.
۲- در آخر، همهٔ عددها زوج باشند.
۳- اعداد تا جای ممکن بزرگ‌ترین باشند تا میانگینشان هم بیشترین شود.

گام برای برقراری شرط ۲ باید عددهای فرد را حذف کنیم، پس در هر مرحله دو عدد فرد را انتخاب می‌کنیم و اختلافشان را می‌نویسیم به طوری که شرط‌های ۱ و ۳ هم برقرار شوند. طبق شرط ۳ بهتر است در مرحلهٔ اول ۹ و ۱۹ را انتخاب کنیم که بیشترین اختلاف را دارند، اما چون اختلاف این دو، عدد تکراریِ ۱۰ را به وجود می‌آورد، ۹ و ۱۷ را انتخاب می‌کنیم و به جای آن‌ها «$17-9=8$» را می‌نویسیم:

$\cancel{9},10,11,12,13,14,15,16,\overset{8}{\cancel{17}},18,19$

به همین ترتیب به جای ۱۱ و ۱۵ عدد ۴ و به جای ۱۳ و ۱۹ هم عدد ۶ را می‌نویسیم:

$\cancel{9},10,\cancel{11},12,\cancel{13},14,\overset{4}{\cancel{15}},16,\overset{8}{\cancel{17}},18,\overset{6}{\cancel{19}}$

پس داده‌ها به این صورت شدند: $4,6,8,10,12,14,16,18$

گام حالا واریانس داده‌های بالا را به دست می‌آوریم. برای این کار اول $\bar{x}$ را حساب می‌کنیم:

$$\bar{x}=\frac{4+6+8+10+12+14+16+18}{8}=\frac{88}{8}=11$$

حالا به کمک مورد (۱) درس‌نامه، واریانس را پیدا می‌کنیم:

$$\sigma^2=\frac{(4-11)^2+(6-11)^2+(8-11)^2+\cdots+(18-11)^2}{8}=\frac{168}{8}=21$$

شاید بگویید محاسبات خیلی وقت‌گیر است، حق دارید! نکتهٔ زیر را بخوانید:

نکته اگر n داده، یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d بسازند، واریانسشان را می‌توانیم مستقیماً از این رابطه حساب کنیم:

$$\sigma^2=\frac{n^2-1}{12}d^2$$

اعداد $4,6,8,\ldots,18$ یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۲ می‌سازند؛ پس طبق نکتهٔ بالا می‌توانستیم واریانسشان را مستقیماً حساب کنیم:

$$\sigma^2=\frac{8^2-1}{12}\times2^2=\frac{63}{\underset{3}{\cancel{12}}}\times\overset{1}{\cancel{4}}=\frac{63}{3}=21$$

حالا که فهمیدیم واریانس داده‌ها ۲۱ است، طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم انحراف معیار داده‌ها می‌شود $\sqrt{21}$.

مشاوره سؤالات آمار، جدیداً علاوه بر سواد، هوش شما را هم می‌سنجند. انتظار دیدن چنین سؤالاتی را در کنکور خودتان هم داشته باشید.

۲۴- گزینهٔ ۱

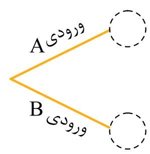
شفاف‌سازی «با کدام احتمال حرف «A» چاپ‌شده توسط دستگاه با حرف ورودی یکسان است»؛ یعنی اگر در آخر حرف «A» چاپ شود، با کدام احتمال حرف ورودی دستگاه هم «A» بوده است؛ پس باید $P(A_{\text{ورودی}} \mid A_{\text{خروجی}})$ را حساب کنیم.

ورودی A باشد به شرطی که خروجی هم A باشد.

درس‌نامه **قانون بیز:** در فرم شرطیِ احتمال کل، اول احتمال کل را به کمک نمودار درختی حساب کنید، بعد شاخهٔ مطلوب را به احتمال کل تقسیم کنید.

گام طبق شفاف‌سازی باید $P(A_{\text{ورودی}} \mid A_{\text{خروجی}})$ را حساب کنیم؛ این یعنی با فرم شرطی احتمال کل طرفیم. اول $P(A_{\text{خروجی}})$ (همان احتمال کل) را پیدا می‌کنیم.

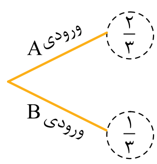
شروع نمودار درختی به این صورت است:



گام در دایرهٔ توخالی بالا باید احتمال ورودی‌بودن A و در دایرهٔ توخالی پایین باید احتمال ورودی‌بودن B را بنویسیم. به گفتهٔ سؤال احتمال انتخاب حرف A، دو برابر احتمال انتخاب حرف B است؛ این یعنی اگر $P(B)=x$ باشد، $P(A)=2x$ می‌شود. حالا جمع دو احتمال را مساوی ۱ می‌گذاریم:

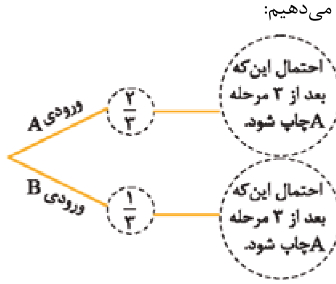
$$x+2x=1 \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} P(A)=2x=\frac{2}{3} \\ P(B)=x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

پس قسمت اول نمودار درختی به این صورت می‌شود:



قبل از این‌که به گام بعدی برویم، بیایید احتمال تغییر و عدم تغییر حرف در هر مرحله را حساب کنیم. به گفتهٔ سؤال در هر مرحله حرف ورودی با احتمال $\frac{1}{4}$ بدون تغییر به مرحلهٔ بعدی می‌رود؛ پس احتمال تغییر می‌شود $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

گام حالا شاخه‌های نمودار درختی را ادامه می‌دهیم:



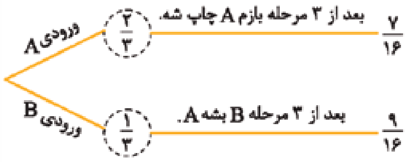
همان‌طور که می‌بینید در شاخهٔ اول می‌خواهیم ورودی A و بعد از سه مرحله خروجی هم A باشد. برای این‌که چنین اتفاقی بیفتد از این سه مرحله یا باید دو مرحله تغییر داشته باشیم یا اصلاً تغییر نداشته باشیم (صفر بار). چون با دو بار تغییر، یک بار Aمان می‌شود B و با تغییر بعدی باز هم به A می‌رسیم و با صفر بار تغییر هم که Aمان دست‌نخورده باقی ماند؛ بنابراین عددی که در شاخهٔ اول باید بنویسیم می‌شود:

$$P_1=\underset{\text{از ۳ مرحله، صفر بار تغییر}}{\binom{3}{0}}\left(\overset{\text{عدم تغییر}}{\frac{1}{4}}\times\underset{\text{عدم تغییر}}{\frac{1}{4}}\times\overset{\text{عدم تغییر}}{\frac{1}{4}}\right)\underset{\text{یا}}{+}\underset{\text{از ۳ مرحله، ۲ بار تغییر}}{\binom{3}{2}}\left(\overset{\text{تغییر}}{\frac{3}{4}}\times\underset{\text{تغییر}}{\frac{3}{4}}\times\overset{\text{عدم تغییر}}{\frac{1}{4}}\right)=\frac{1}{4^3}+\frac{3^3}{4^3}=\frac{\overset{7}{\cancel{28}}}{\underset{4^2}{\cancel{4^3}}}=\frac{7}{16}$$

در شاخهٔ دوم هم می‌خواهیم ورودی B را بعد از سه مرحله به A تبدیل کنیم، بنابراین از این ۳ مرحله یا باید ۱ بار تغییر داشته باشیم $(B\to A)$ یا ۳ بار $(B\to A\to B\to A)$؛ بنابراین عددی که باید در شاخهٔ دوم بنویسیم برابر است با:

$$P_2=\underset{\text{از ۳ مرحله، ۱ بار تغییر}}{\binom{3}{1}}\left(\overset{\text{تغییر}}{\frac{3}{4}}\times\underset{\text{عدم تغییر}}{\frac{1}{4}}\times\overset{\text{عدم تغییر}}{\frac{1}{4}}\right)\underset{\text{یا}}{+}\underset{\text{از ۳ مرحله، ۳ بار تغییر}}{\binom{3}{3}}\left(\overset{\text{تغییر}}{\frac{3}{4}}\times\underset{\text{تغییر}}{\frac{3}{4}}\times\overset{\text{تغییر}}{\frac{3}{4}}\right)=\left(3\times\frac{3}{4^3}\right)+\left(\frac{3^3}{4^3}\right)=\frac{9}{4^3}+\frac{27}{4^3}=\frac{\overset{9}{\cancel{36}}}{\underset{4^2}{\cancel{4^3}}}=\frac{9}{16}$$

پس کامل‌شدهٔ نمودار درختی به این صورت شد:



گام حالا شاخه‌ها را در هم ضرب و اعداد حاصل را با هم جمع می‌کنیم تا $P(A_{\text{خروجی}})$ پیدا شود:

$$P(A_{\text{خروجی}})=\left(\frac{2}{3}\times\frac{7}{16}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{9}{16}\right)=\frac{14}{48}+\frac{9}{48}=\frac{23}{48}$$

گام طبق قانون بیز برای محاسبهٔ $P(A_{\text{ورودی}} \mid A_{\text{خروجی}})$ باید شاخهٔ مطلوب را به احتمال کل تقسیم کنیم. شاخهٔ مطلوب، شاخه‌ای است که حرف ورودی A و خروجی هم A بوده که شاخهٔ اول است و احتمال کل هم که شد $\frac{23}{48}$؛ پس:

$$P(A_{\text{ورودی}} \mid A_{\text{خروجی}})=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{7}{16}}{\frac{23}{48}}=\frac{\frac{14}{\cancel{48}}}{\frac{23}{\cancel{48}}}=\frac{14}{23}$$

مشاوره سؤال واقعاً سختی بود، اگر حلش نکردید نگران نباشید؛ طبیعی است. لطفاً پاسخ این سؤال را خوب بخوانید تا اگر مشابه همچین سؤالی را در کنکور دیدید سورپرایز نشوید.

۲۵- گزینهٔ ۲

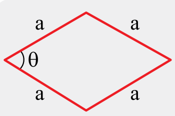
شفاف‌سازی «هر ضلع واسطهٔ هندسی دو قطر لوزی است»؛ یعنی این رابطه برقرار است:

$$\text{ضرب قطرهای لوزی} = (\text{طول ضلع لوزی})^2$$

استراتژی مساحت لوزی را یک بار برحسب زاویهٔ داخلی‌اش و یک بار هم برحسب قطرهای آن می‌نویسیم و مساوی هم می‌گذاریم.

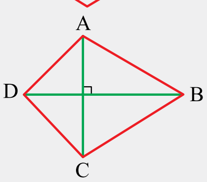
درس‌نامه

۱ مساحت لوزی به ضلع a و زاویهٔ θ برابر است با:



$$S=a^2.\sin\theta$$

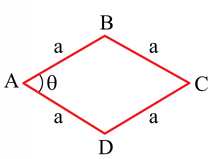
۲ مساحت هر چهارضلعی که قطرهای آن بر هم عمودند (مثل لوزی)، برابر است با نصف حاصل‌ضرب طول قطرهای آن، مثلاً مساحت چهارضلعی ABCD در شکل مقابل می‌شود:



$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC.BD$$

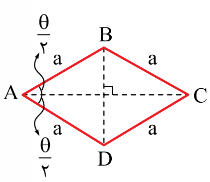
۳ قطرهای هر لوزی، نیمسازهای زاویه‌های داخلی‌اش هستند.

گام (نوشتن مساحت لوزی برحسب زاویهٔ داخلی‌اش) مطابق شکل، زاویهٔ حادهٔ این لوزی را θ و طول ضلعش را a در نظر می‌گیریم، همان‌طور که در قسمت (۱) درس‌نامه گفتیم برای مساحت این لوزی می‌توانیم رابطهٔ زیر را بنویسیم:



$$S_{ABCD}=a^2.\sin\theta \quad (1)$$

گام (نوشتن مساحت لوزی برحسب طول قطرهایش) با توجه به قسمت (۲) درس‌نامه، داریم:



$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC.BD \quad (2)$$

گام (پیداکردن خواستهٔ مسئله) طبق شفاف‌سازی می‌توانیم بنویسیم:

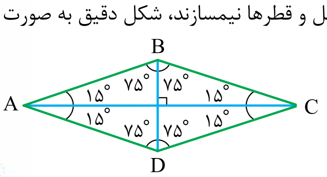
$$(\text{طول ضلع لوزی})^2=\text{ضرب قطرهای لوزی} \Rightarrow a^2=AC.BD$$

حالا سمت راست تساوی‌های (۱) و (۲) را مساوی هم می‌گذاریم و به جای AC.BD می‌نویسیم a^2:

$$a^2.\sin\theta=\frac{1}{2}\underbrace{AC.BD}_{a^2} \Rightarrow \cancel{a^2}.\sin\theta=\frac{1}{2}\cancel{a^2}$$

$$\Rightarrow \sin\theta=\frac{1}{2}\xrightarrow{\theta\ \text{حاده است}}\theta=30^\circ$$

با توجه به این‌که در لوزی، زاویه‌های مجاور، مکمل و قطرها نیمسازند، شکل دقیق به صورت مقابل می‌شود.



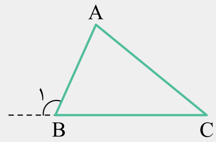
همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، وقتی قطرهای لوزی را بکشیم ۴ مثلث درست می‌شود که کوچک‌ترین زاویهٔ هر کدام 15° است.

۲۶- گزینه ۴

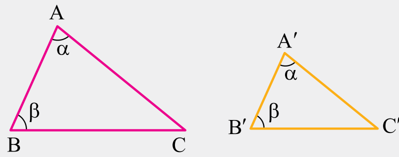
استراتژی اول نشان می‌دهیم دو مثلث DEF و ABC متشابه‌اند، بعد با نوشتن نسبت تشابه این دو مثلث، خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم.

درس‌نامه ① هر زاویهٔ خارجی یک مثلث، برابر است با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش؛ مثلاً زاویهٔ خارجی B_1 در شکل مقابل برابر می‌شود با:

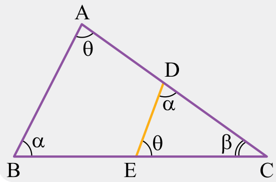
$$\hat{B}_1 = \hat{A} + \hat{C}$$



② اگر دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن‌گاه آن دو مثلث با هم متشابه‌اند. مثلاً دو مثلث ABC و $A'B'C'$، در شکل‌های مقابل با دو زاویهٔ برابر α و β متشابه‌اند.

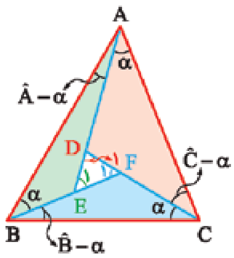


③ برای نوشتن نسبت تشابه دو مثلث، ضلع‌های رو به زاویه‌های برابر را در یک نسبت زیر هم می‌نویسیم، به طوری که در صورت، نسبت‌ها اضلاع یک مثلث و در مخرج آن‌ها اضلاع مثلث دیگر قرار داشته باشند. مثلاً نسبت تشابه مثلث‌های ABC و DEC در شکل مقابل برابر می‌شود با:



$$\underbrace{\frac{AC}{EC}}_{\text{روبه}\,\alpha} = \underbrace{\frac{AB}{DE}}_{\text{روبه}\,\beta} = \underbrace{\frac{BC}{DC}}_{\text{روبه}\,\theta}$$

گام **(اثبات متشابه‌بودن دو مثلث ABC و DEF):** سؤال گفته سه زاویهٔ ABF، CAE و BCD هم‌اندازه‌اند. این سه زاویه را با α در شکل مقابل نشان می‌دهیم، حالا می‌توانیم بنویسیم:



$$B\hat{A}E = \hat{A} - \alpha \ , \ F\hat{B}C = \hat{B} - \alpha \ , \ A\hat{C}D = \hat{C} - \alpha$$

این زاویه‌ها را هم روی شکل می‌نویسیم.

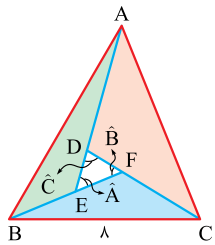
حالا خوب به رنگ‌بندی زاویه‌های مثلث DEF و بقیهٔ مثلث‌ها توجه کنید. همان‌طور که می‌بینید زاویهٔ قرمزرنگ $(\hat{D}_1)$ برای مثلث ACD یک زاویهٔ خارجی است، پس می‌توانیم بگوییم برابر می‌شود با جمع زاویه‌های α و $\hat{C} - \alpha$:

$$\hat{D}_1 = (\hat{C} - \alpha) + \alpha = \hat{C}$$

همین‌طور زاویه‌های سبز $(\hat{E}_1)$ و آبی $(\hat{F}_1)$ هم به ترتیب برای مثلث‌های ABE و BCF، یک زاویهٔ خارجی هستند؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\hat{E}_1 = (\hat{A} - \alpha) + \alpha = \hat{A} \ , \ \hat{F}_1 = (\hat{B} - \alpha) + \alpha = \hat{B}$$

پس شکل مسئله به صورت مقابل می‌شود. همان‌طور که می‌بینید؛ زاویه‌های مثلث‌های DEF و ABC برابر شدند، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه این دو مثلث متشابه‌اند.



گام **(محاسبهٔ خواستهٔ سؤال):** الان نوبت نوشتن نسبت تشابه مثلث‌های ABC و DEF است. برای این کار از مورد (۳) درس‌نامه کمک می‌گیریم:

$$\underbrace{\frac{AB}{EF}}_{\text{روبه}\,\hat{C}} = \underbrace{\frac{BC}{DF}}_{\text{روبه}\,\hat{A}} \xrightarrow[DF=۲/۵\ ,\ EF=۳]{BC=۸} \frac{AB}{۳} = \frac{۸}{۲/۵} \Rightarrow \frac{AB}{۳} = \frac{۸}{\frac{۵}{۲}}$$

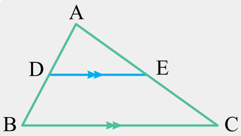
$$\Rightarrow AB = \frac{۲ \times ۸ \times ۳}{۵} = \frac{۴۸}{۵} = ۹/۶$$

مشاوره شاهد مدل جدیدی از سؤال در مورد تشابه بودیم که حتماً برای خیلی‌ها ناآشنا است و ایده‌ای برای حل آن ندارند؛ بنابراین اگر از پسِ این سؤال برنیامده‌اید، خیلی نگران نباشید، سعی کنید پاسخ آن را خوب یاد بگیرید تا در مواجهه با سؤال‌های مشابه، غافلگیر نشوید.

۲۷- گزینه ۱

استراتژی اول شکل مسئله را رسم می‌کنیم تا کوچک‌ترین مثلثی که درست می‌شود، خودش را نشان دهد؛ بعد با توجه به این‌که قطر، مساحت مستطیل را نصف می‌کند، خواستهٔ سؤال را به نسبت طول دو پاره‌خط تبدیل می‌کنیم. در آخر این نسبت را به کمک قضیهٔ تالس حساب می‌کنیم.

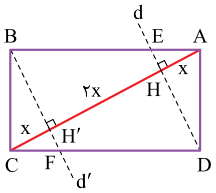
درس‌نامه ① در مثلث مقابل، اگر $DE \parallel BC$ باشد، طبق قضیهٔ تالس می‌توانیم نسبت زیر را بنویسیم:



$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad \text{(تالس جزءبه‌کل)}$$

② با رسم هر قطر یک مستطیل، دو مثلث همنهشت (و در نتیجه هم‌مساحت) ایجاد می‌شود.

گام **(رسم شکل مسئله)** شکل مسئله به صورت مقابل است.



در این شکل d و d' همان خط‌هایی هستند که قطر AC را به سه قسمت تقسیم می‌کنند. به گفتهٔ سؤال قسمت وسط (HH')، دو برابر قسمت‌های کناری (AH و CH') است، پس می‌توانیم فرض کنیم: $AH = CH' = x \ , \ HH' = ۲x$

گام **(تحلیل خواستهٔ سؤال)** همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید، کوچک‌ترین مثلثی که در مستطیل وجود دارد، مثلث AEH (یا CFH') است؛ پس خواستهٔ سؤال، یعنی نسبت مساحت مستطیل به مساحت کوچک‌ترین مثلث درست‌شده در آن، می‌شود $\frac{S_{ABCD}}{S_{\overset{\Delta}{AEH}}}$. طبق مورد (۲) درس‌نامه، مساحت مستطیل، دو برابر مساحت مثلث ABC است؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{\overset{\Delta}{AEH}}} = \frac{۲S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{AEH}}} = \frac{۲(\cancel{\frac{۱}{۲}} \times BH' \times \overset{۴x}{AC})}{\cancel{\frac{۱}{۲}} \times EH \times \underset{x}{AH}} = \frac{BH' \times ۸\cancel{x}}{EH \times \underset{۱}{\cancel{x}}} = ۸ \times \frac{BH'}{EH} \quad (*)$$

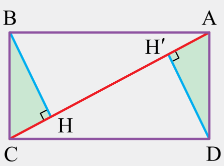
گام **(محاسبهٔ خواستهٔ سؤال)** طبق رابطهٔ $(*)$ برای محاسبهٔ خواستهٔ سؤال، باید نسبت $\frac{BH'}{EH}$ را به دست بیاوریم. خوب به مثلث ABH' نگاه کنید. پاره‌خط‌های EH و BH' در این مثلث هر دو بر قطر AC عمودند، پس می‌توانیم بگوییم $EH \parallel BH'$. حالا در مثلث ABH'، تالس می‌نویسیم:

$$\frac{AH}{AH'} = \frac{EH}{BH'} \Rightarrow \frac{x}{x + ۲x} = \frac{EH}{BH'} \Rightarrow \frac{EH}{BH'} = \frac{\overset{۱}{\cancel{x}}}{۳\cancel{x}} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{BH'}{EH} = ۳$$

در آخر تساوی بالا را در رابطهٔ $(*)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

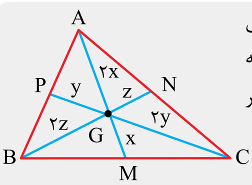
$$\frac{S_{ABCD}}{S_{\overset{\Delta}{AEH}}} = ۸ \times \frac{BH'}{EH} = ۸ \times ۳ = ۲۴$$

تله ⑰ حواستان باشد، سؤال گفته **خط‌هایی** از دو رأس مقابل، نه پاره‌خط‌هایی از دو رأس مقابل. اگر به اشتباه پاره‌خط‌های عمود بر قطر را بکشیم به شکل مقابل می‌رسیم. کوچک‌ترین مثلث درست‌شده در این شکل، مثلث BHC (یا $AH'D$) است. در این حالت اگر خواستهٔ مسئله را حساب کنیم به عدد ۸ می‌رسیم که در ④ به عنوان تله وجود دارد.



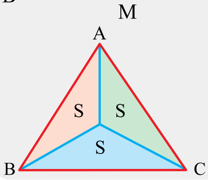
۲۸- گزینه ۴

درس‌نامه ① میانه‌های هر مثلث مطابق شکل مقابل، در نقطه‌ای به نام **مرکز ثقل** همرس‌اند. میانه‌ها همیشه به نسبت ۱ به ۲ همدیگر را قطع می‌کنند. برای درک بهتر این موضوع شکل مقابل را ببینید:

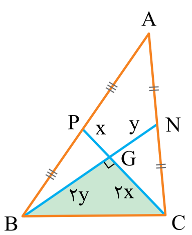


② اگر مثل شکل مقابل، از مرکز ثقل مثلث به رأس‌هایش وصل کنیم، سه مثلث هم‌مساحت درست می‌شود؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$S = \frac{۱}{۳} S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$



گام **(رسم شکل مناسب و تحلیل آن)** شکل مسئله به صورت مقابل است. طبق مورد (۱) درس‌نامه، میانه‌ها به نسبت ۱ به ۲ همدیگر را قطع می‌کنند، پس می‌توانیم طول قطعات ایجادشده روی میانه‌ها را به صورت مقابل روی شکل بنویسیم. محل برخورد میانه‌های BN و CP، همان مرکز ثقل مثلث (G) است، پس می‌توانیم از خواص همرسی میانه‌ها که در درس‌نامه گفتیم، استفاده کنیم.



گام (محاسبهٔ مساحت مثلث GBC): طبق مورد (۲) درس‌نامه، مساحت مثلث GBC، $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث ABC است؛ پس:

$$S_{\triangle GBC}=\frac{۱}{۳}S_{\triangle ABC}\xrightarrow{S_{\triangle ABC}=۱۸}S_{\triangle GBC}=۶$$

گام (محاسبهٔ x، y و خواستهٔ سؤال)

سؤال گفته $CP=۴/۵$ و این یعنی: $۳x=۴/۵ \Rightarrow x=۱/۵ \Rightarrow CG=۲x=۳$

برای پیداکردن مقدار y، از مساحت مثلث GBC که در گام قبل به دست آوردیم، استفاده می‌کنیم:

$$S_{\triangle GBC}=\frac{۱}{۲}BG.CG \xrightarrow[GC=۳]{S_{\triangle GBC}=۶} ۶=\frac{۱}{۲}BG\times ۳$$

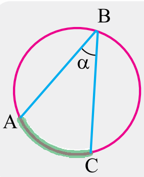
$$\Rightarrow BG=۴ \Rightarrow ۲y=۴ \Rightarrow y=۲ \Rightarrow BN=۳y=۶$$

و در نهایت، خواستهٔ سؤال می‌شود:

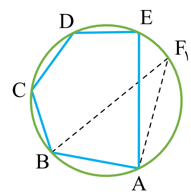
$$\frac{BN}{CP}=\frac{۶}{۴/۵}=\frac{۶}{\frac{۹}{۲}}=\frac{۱۲}{۹}=\frac{۴}{۳}$$

۲۹- گزینهٔ ؟

درس‌نامه اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی مثل α در شکل مقابل، مساوی نصف اندازهٔ کمان مقابلش است؛ یعنی $\alpha=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AC}$



همان‌طور که در شکل می‌بینید، پنج‌ضلعی ABCDE در دایره محاط است. به گفتهٔ سؤال هر ضلع این ۵ضلعی، وتر رو به یک زاویهٔ محاطی است، مثلاً در شکل مقابل، ضلع AB وتر رو به زاویهٔ محاطِ $F_۱$ است. پس طبق درس‌نامه می‌توانیم بگوییم: $\hat{F}_۱=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}$



به همین ترتیب اگر ضلع‌های BC، CD، DE و EA، وتر رو به زاویه‌های محاطیِ $F_۲$، $F_۳$، $F_۴$ و $F_۵$ باشند، می‌توانیم بنویسیم:

$$\hat{F}_۲=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BC}\ ,\ \hat{F}_۳=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{CD}\ ,\ \hat{F}_۴=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DE}\ ,\ \hat{F}_۵=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{EA}$$

پس مجموع این زاویه‌ها می‌شود:

$$\hat{F}_۱+\hat{F}_۲+\hat{F}_۳+\hat{F}_۴+\hat{F}_۵=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}+\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BC}+\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{CD}+\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DE}+\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{EA}$$

$$=\frac{۱}{۲}(\underbrace{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{EA}}_{۳۶۰^\circ})=۱۸۰^\circ$$

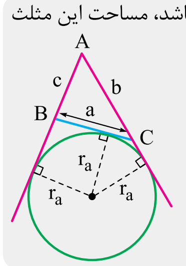
متأسفانه سازمان سنجش پاسخ این سؤال را (۳) اعلام کرده، *حالا چرا و به‌چوری نمی‌دونیم!!!*

۳۰- گزینهٔ ۴

استراتژی در واقع سؤال، شعاع یکی از دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC را می‌خواهد، پس باید اول مساحت مثلث را حساب کنیم، برای این کار هم چون طول سه ضلع مثلث را داریم، هرون بهترین انتخاب است.

درس‌نامه ۱ اگر p نصفِ محیط مثلثی با اضلاع a، b و c باشد، مساحت این مثلث برابر می‌شود با: (رابطهٔ هرون) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

۲ یکی از دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC را در شکل مقابل ببینید. این دایره بر ضلع به طول a و امتداد دو ضلع دیگر مماس است؛ به همین خاطر شعاعش را با r_a نشان می‌دهیم. برای محاسبهٔ r_a از رابطهٔ مقابل استفاده می‌کنیم: $r_a=\frac{S}{p-a}$

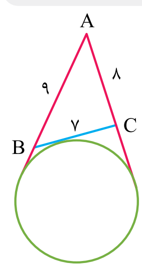


گام (تحلیل شکل مسئله و خواستهٔ سؤال)

همان‌طور که می‌بینید، دایرهٔ رسم‌شده در شکل، یکی از دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC است. دایره‌ای که بر ضلع به طول $BC=a=۷$ و امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماس است.

طبق مورد (۲) درس‌نامه شعاع این دایره برابر می‌شود با:

$$r_a=\frac{S}{p-a}\quad(*)$$



گام (محاسبهٔ مساحت مثلث ABC)

طول سه ضلع مثلث ABC را داریم $a=BC=۷$، $b=AC=۸$ و $c=AB=۹$، پس برای محاسبهٔ مساحت، می‌توانیم از رابطهٔ هرون استفاده کنیم (طبق مورد (۱) درس‌نامه).

اول p یا همان نصف محیط را حساب می‌کنیم: $p=\frac{a+b+c}{۲}=\frac{۷+۸+۹}{۲}=۱۲$

حالا داریم: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\Rightarrow S=\sqrt{۱۲(۱۲-۷)(۱۲-۸)(۱۲-۹)}=\sqrt{\underbrace{۱۲}_{۳\times۴}\times۵\times۴\times۳}=\sqrt{۳^۲\times۴^۲\times۵}=۱۲\sqrt{۵}$$

گام (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال)

حالا که مقدار a، p و S را داریم، می‌توانیم r_a را به کمک رابطهٔ (*) به دست بیاوریم:

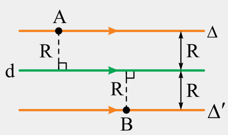
$$r_a=\frac{۱۲\sqrt{۵}}{۱۲-۷}=\frac{۱۲\sqrt{۵}}{۵}=۲/۴\sqrt{۵}$$

مشاوره سؤال ترکیبی از فصل‌های اول و سوم کتاب هندسهٔ ۲ که کاملاً قابل حل است. در میان سؤال‌های هندسهٔ پایه، باید بتوانید این مدل سؤال‌ها را شناسایی کرده و اول سراغ آن‌ها بروید.

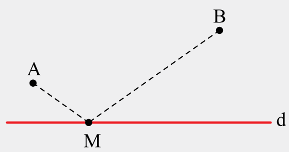
۳۱- گزینهٔ ۲

استراتژی اول ببینید رأس روبه‌روی ضلعِ ثابت (ضلع به طول ۱۵) کجاها می‌تواند باشد. این‌جوری متوجه می‌شوید که با نوع خاص مسئلهٔ هرون طرف هستید.

درس‌نامه ۱ برای پیداکردن نقطه‌هایی که از خط d به فاصلهٔ R باشند، باید دو خط موازی با d و به فاصلهٔ R در دو طرف آن رسم کنیم(Δ و Δ'). هر نقطه‌ای که روی یکی از این خط‌ها باشد (مثل A و B)، فاصله‌اش از خط d برابر R است. نگاه کنید:

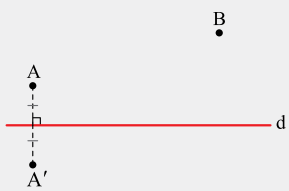


۲ **مسئلهٔ هرون:** در این مسئله مطابق شکل مقابل، دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط d قرار دارند. می‌خواهیم نقطه‌ای مثل M را روی خط d پیدا کنیم، به طوری که مسیر AMB (همون $AM+MB$) کم‌ترین طول ممکن را داشته باشد. برای پیداکردن نقطهٔ M کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

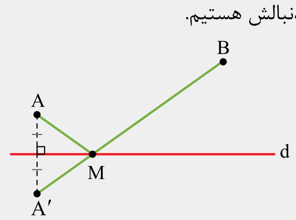


الف) نقطهٔ A را نسبت به خط d بازتاب می‌دهیم تا به نقطهٔ A' برسیم. (شکل ۱)

ب) A' را به B وصل می‌کنیم تا d را در نقطهٔ M قطع کند. M همان نقطه‌ای است که به دنبالش هستیم.

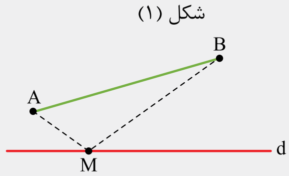


شکل (۱)

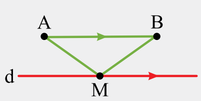


شکل (۲)

۳ بعد از پیداکردن نقطهٔ M در مسئلهٔ هرون (شکل مقابل را ببینید)، می‌توانیم بگوییم از بین همهٔ مثلث‌هایی که دو رأس آن‌ها A و B و رأس سومشان روی d قرار دارد، مثلث AMB، کم‌ترین محیط را دارد.

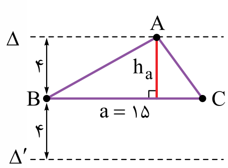


۴ حالت خاصِ مسئلهٔ هرون، وقتی اتفاق می‌افتد که AB با خط d موازی باشد (شکل مقابل را ببینید). در چنین حالتی اگر محیط مثلث AMB کم‌ترین باشد، حتماً **متساوی‌الساقین** است.



گام (پیداکردن جایِ رأسِ روبه‌روی ضلع ثابت)

سؤال در مورد مثلث‌هایی حرف می‌زند که در ضلع $BC=۱۵$ مشترک هستند. یکی از این مثلث‌ها را در شکل مقابل ببینید.

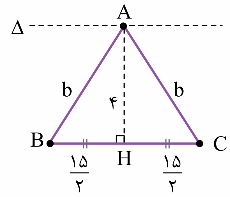


به گفتهٔ سؤال، مساحت این مثلث ۳۰ واحد مربع است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}a.h_a \Rightarrow ۳۰=\frac{۱}{۲}\times۱۵\times h_a \Rightarrow h_a=۴$$

حالا می‌توانیم بگوییم فاصلهٔ نقطهٔ متغیر A از خط ثابت BC، ۴ واحد است، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، نقطهٔ A می‌تواند روی هر کدام از دو خط Δ یا Δ' قرار بگیرد.

گام (استفاده از حالت خاص مسئلهٔ هرون)



حالا خوب به نقطهٔ A، خط Δ و ضلع BC نگاه کنید. همان‌طور که می‌بینید ضلع BC با Δ موازی است و می‌خواهیم نقطهٔ A را روی خط Δ طوری انتخاب کنیم که محیط مثلث ABC کم‌ترین شود. طبق مورد (۴) درس‌نامه (حالت خاص مسئلهٔ هرون) در چنین حالتی مثلث ABC حتماً متساوی‌الساقین است. می‌دانیم در هر مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، میانه هم هست، پس در شکل بالا ارتفاع AH میانه هم هست؛ یعنی: $BH = HC = \frac{۱۵}{۲}$

گام (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال)

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH را در شکل گام قبل ببینید، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در آن، داریم:

$$b = \sqrt{AH^۲ + BH^۲} \Rightarrow b = \sqrt{۴^۲ + (\frac{۱۵}{۲})^۲} = \sqrt{۱۶ + \frac{۲۲۵}{۴}}$$

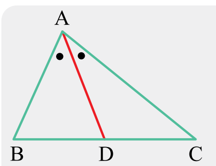
$$= \sqrt{\frac{۶۴+۲۲۵}{۴}} = \sqrt{\frac{۲۸۹}{۴}} = \frac{۱۷}{۲} \Rightarrow \text{محیط } \overset{\Delta}{ABC} = (۲ \times \frac{۱۷}{۲}) + ۱۵ = ۳۲$$

(البته اگر دقت کنید اضلاع قائم مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH به صورت $۱۵ \times \frac{۱}{۲}$ و $۸ \times \frac{۱}{۲}$ هستند که آدم را یاد اعداد فیثاغورسی $۸k$، $۱۵k$ و $۱۷k$ می‌اندازد؛ پس طول وتر آن می‌شود $۱۷ \times \frac{۱}{۲}$)

۳۲- گزینهٔ ۱

استراتژی اگر در مثلث ABC، نیمساز داخلی AE را رسم کنید، دو مثلث در شکل ایجاد می‌شود که در هر کدام آن‌ها، یک نیمساز داخلی رسم شده، حالا باید از روابط نیمساز در این دو مثلث استفاده کنید.

درس‌نامه نیمساز داخلی هر مثلث، ضلع مقابلش را به نسبت اضلاع کناری‌اش قطع می‌کند؛ این یعنی در شکل مقابل، اگر AD نیمساز باشد، داریم: $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$



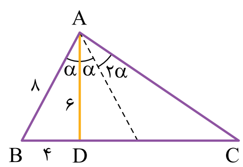
برای محاسبهٔ طول این نیمساز هم از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$AD^۲ = AB.AC - BD.CD$$

گام (تحلیل شکل مسئله)

به گفتهٔ سؤال $D\hat{A}C = ۳B\hat{A}D$ است، پس می‌توانیم بگوییم $B\hat{A}D = \alpha$ و $D\hat{A}C = ۳\alpha$؛ بنابراین $B\hat{A}C = ۴\alpha$ می‌شود.

همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، اگر نیمساز زاویهٔ BAC را رسم کنیم (AE)، یک اتفاق خوب می‌افتد؛ دو مثلث ($\overset{\Delta}{ABE}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$) در شکل ایجاد می‌شود که در آن‌ها نیمساز رسم شده است و می‌توانیم از ویژگی‌های نیمساز در این دو مثلث استفاده کنیم.



گام (استفاده از ویژگی‌های نیمساز در مثلث ABE)

در مثلث ABE، AD نیمساز است، پس طبق درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{BD}{DE} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{۴}{DE} = \frac{۸}{AE} \Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{۸}{۴} = \frac{۲}{۱} \Rightarrow AE = ۲x\,,\, DE = x$$

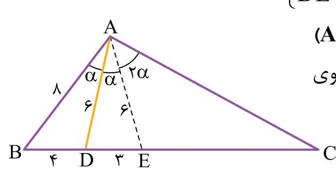
حالا به کمک فرمول طول نیمساز در مثلث ABE، x را به دست می‌آوریم:

$$AD^۲ = AB.AE - BD.DE \Rightarrow ۶^۲ = ۸(۲x) - ۴(x)$$

$$\Rightarrow ۳۶ = ۱۲x \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow \begin{cases} AE = ۲x = ۶ \\ DE = x = ۳ \end{cases}$$

گام (استفاده از ویژگی نیمساز در مثلث ABC)

چیزهایی که در گام قبل به دست آوردیم را روی شکل مقابل می‌نویسیم:



در مثلث ABC، AE نیمساز است؛ پس:

$$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{۳+۴}{CE} = \frac{۸}{AC} \Rightarrow \frac{۷}{CE} = \frac{۸}{AC} \Rightarrow \frac{AC}{CE} = \frac{۸}{۷} \Rightarrow \begin{cases} AC = ۸y \\ CE = ۷y \end{cases}$$

حالا فرمول طول نیمساز AE را در مثلث ABC می‌نویسیم تا y هم پیدا بشود:

$$AE^۲ = AB.AC - BE.CE \Rightarrow ۶^۲ = ۸(۸y) - ۷(۷y)$$

$$\Rightarrow ۳۶ = ۶۴y - ۴۹y \Rightarrow ۱۵y = ۳۶ \Rightarrow y = \frac{۳۶}{۱۵} = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

بنابراین طول AC می‌شود $AC = ۸y = ۸ \times ۲/۴ = ۱۹/۲$.

مشاوره یکی از سخت‌ترین سؤال‌های ریاضی کنکور ۱۴۰۲. اگر نتوانستید به این سؤال پاسخ دهید، اصلاً نگران نباشید؛ پاسخ را خوب بخوانید تا سؤال‌های شبیه به این سؤال را بتوانید حل کنید.

۳۳- گزینهٔ ۴

درس‌نامه ۱ دترمینان هر ماتریس ۲×۲، مثل $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$|A| = \underbrace{ad}_{\text{ضرب درایه‌های قطر اصلی}} - \overbrace{bc}^{\text{ضرب درایه‌های قطر فرعی}}$$

۲ در دنیای لگاریتم‌ها، ۴ قانون مهم زیر برقرار است:

الف) **قانون جمع لگاریتم‌ها:** $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$

ب) **قانون تفاضل لگاریتم‌ها:** $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$

پ) لگاریتم، توانی را که روی عدد جلویش نشسته باشد، به عنوان ضریب به پشت خودش منتقل می‌کند؛ یعنی: $\log_a b^m = m \log_a b$

ت) در عبارت‌هایی مثل $a^{\log_b c}$ که در آن‌ها عدد به توان لگاریتم می‌رسد، می‌توانیم جای a و c را عوض کنیم؛ یعنی: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

گام (محاسبهٔ |A|)

اول به کمک مورد (۱) درس‌نامه، دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} \log_۶ ۳ & \log_۶ ۲ \\ \log_۶ ۲ & \log_۶ ۳ \end{bmatrix}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$|A| = \underbrace{(\log_۶ ۳)^۲ - (\log_۶ ۲)^۲}_{\text{اتحاد مزدوج}} = (\log_۶ ۳ - \log_۶ ۲)(\log_۶ ۳ + \log_۶ ۲)$$

$$= \log_۶ \frac{۳}{۲} \times \underbrace{\log_۶ ۶}_{۱} = \log_۶ \frac{۳}{۲}$$

گام (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال) سؤال مقدار دترمینان ماتریس $B = \begin{bmatrix} ۶^{|A|} & ۲^{|A|} \\ ۳^{|A|} & ۳۶^{|A|} \end{bmatrix}$ را می‌خواهد که برابر است با:

$$|B| = \underbrace{(۶^{|A|} \times ۳۶^{|A|})}_{۶^{۳|A|}} - (۲^{|A|} \times ۳^{|A|}) = ۶^{۳|A|} - ۶^{|A|}$$

حالا $|A| = \log_۶ \frac{۳}{۲}$ را در تساوی بالا جای‌گذاری می‌کنیم:

$$|B| = ۶^{۳\log_۶ \frac{۳}{۲}} - ۶^{\log_۶ \frac{۳}{۲}}$$

طبق قانون (پ) درس‌نامه به جای $۳\log_۶ \frac{۳}{۲}$ می‌توانیم بنویسیم: $\log_۶ (\frac{۳}{۲})^۳ = \log_۶ \frac{۲۷}{۸}$

$$|B| = ۶^{\log_۶ \frac{۲۷}{۸}} - ۶^{\log_۶ \frac{۳}{۲}}$$

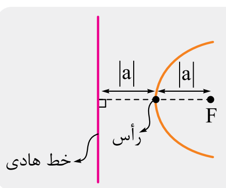
در آخر به کمک قانون (ت) درس‌نامه تساوی بالا را ساده می‌کنیم:

$$|B| = \frac{۲۷}{۸}^{\overbrace{\log_۶ ۶}^{۱}} - \frac{۳}{۲}^{\overbrace{\log_۶ ۶}^{۱}} = \frac{۲۷}{۸} - \frac{۳}{۲} = \frac{۱۵}{۸}$$

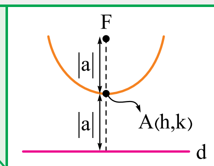
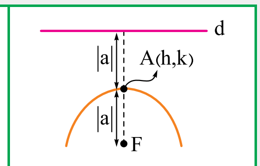
۳۴- گزینهٔ ۲

شفاف‌سازی «وتری که از کانون بر محور سهمی عمود است»، همان وتر کانونی سهمی است.

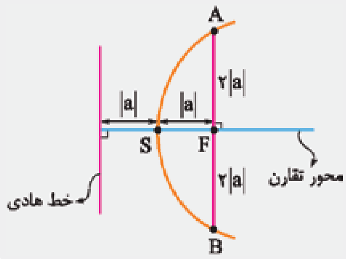
درس‌نامه ۱ همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، فاصلهٔ رأس سهمی از کانون و خط هادی یکسان است. به این فاصله، **فاصلهٔ کانونی** می‌گوییم و با $|a|$ نشانش می‌دهیم.



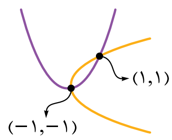
۲ اگر در معادلهٔ سهمی x^2 وجود داشته باشد، سهمی قائم و در نتیجه دهانه‌اش یا رو به بالاست یا رو به پایین. در چنین سهمی‌هایی اگر مختصات رأس سهمی به صورت $A(h,k)$ و فاصلهٔ کانونی $|a|$ باشد، معادله سهمی مطابق جدول زیر نوشته می‌شود:

شکل / مشخصات		
دهانهٔ سهمی	رو به بالا	رو به پایین
معادلهٔ سهمی	$(x-h)^2=4a(y-k)$	$(x-h)^2=-4a(y-k)$

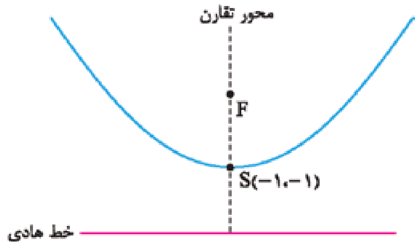
۳ مطابق شکل مقابل، اگر از کانون بر محور تقارن سهمی، یک خطِ عمود بکشیم تا سهمی را در نقاط A و B قطع کند، وتری به طول $4|a|$ درست می‌شود که به آن **وتر کانونی** می‌گوییم.



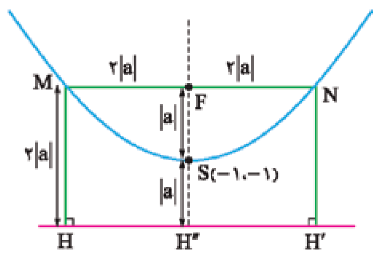
گام (تشخیص قائم یا افقی بودن سهمی) همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، سهمی‌ای که مختصات رأسش $S(-1,-1)$ باشد و از نقطهٔ $(1,1)$ بگذرد، هم می‌تواند افقی و هم می‌تواند قائم باشد.



اینجا ما فرض می‌کنیم سهمی قائم است، پس نمودارش به این صورت می‌شود:



گام (کامل‌کردن شکل مسئله و تحلیل) آن) طبق خواستهٔ سؤال وتر کانونی MN و همین‌طور عمودهای MH و NH′ را به نمودار سهمی اضافه می‌کنیم تا به شکل مقابل برسیم:



حالا می‌توانیم به کمک مورد (۱) و (۳) درسنامه طول قطعات MF، NF، SF و SH″ را برحسب $|a|$ روی شکل بنویسیم.

گام (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال برحسب $|a|$) خواستهٔ سؤال، یعنی طول قطر مستطیل MNH′H را می‌توانیم به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث MNH، برحسب $|a|$ به دست بیاوریم:

$$NH^2=MN^2+MH^2=(4|a|)^2+(2|a|)^2=16|a|^2+4|a|^2$$
$$=20|a|^2 \text{ یا } 20a^2 \quad (*)$$

بنابراین برای محاسبهٔ خواستهٔ سؤال باید a را حساب کنیم.

گام (محاسبهٔ a و خواستهٔ سؤال) طبق مورد (۲) درسنامه، معادلهٔ سهمی‌ای که مختصات رأسش $S(-1,-1)$ و دهانه‌اش رو به بالا باشد، به این صورت است:

$$(x+1)^2=4a(y+1)$$

به گفتهٔ سؤال سهمی از نقطهٔ $(1,1)$ می‌گذرد، پس حق داریم این نقطه را در معادلهٔ سهمی جای‌گذاری کنیم:

$$(1+1)^2=4a(1+1) \Rightarrow 4=8a \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

حالا که a را داریم، می‌توانیم به کمک رابطهٔ (*)، خواستهٔ سؤال را به دست بیاوریم:

$$NH^2=20a^2=20(\frac{1}{2})^2=20\times\frac{1}{4}=5 \Rightarrow NH=\sqrt{5}$$

۳۵- گزینه ۳

شفاف‌سازی «ضرب داخلی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$، $-\frac{3}{5}$ حاصل‌ضرب اندازه‌های دو بردار است»؛ یعنی: $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{3}{5}|\vec{a}||\vec{b}|$

درس‌نامه ۱ اگر زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، α باشد، در این صورت $\vec{a}.\vec{b}$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha \quad , \quad |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$$

۲ زاویهٔ بین دو بردار عددی بین صفر تا 180° است.

۳ مساحت مثلثی که روی بردارهای $\vec{\bigcirc}$ و $\vec{\square}$ ساخته می‌شود، برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}|\vec{\bigcirc}\times\vec{\square}|$$

۴ دوتا از قوانین مهم ضرب خارجیِ بردارها را ببینید:

الف) $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$ یا $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

ب) ضرب خارجی هر بردار در خودش، بردار صفر است؛ یعنی: $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

گام (محاسبهٔ سینوس و کسینوس زاویهٔ بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$) طبق شفاف‌سازی، رابطهٔ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{3}{5}|\vec{a}||\vec{b}|$ برقرار است، پس اگر فرض کنیم زاویهٔ بین دو بردار، α باشد، به کمک مورد (۱) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\cancel{|\vec{a}||\vec{b}|}\cos\alpha=-\frac{3}{5}\cancel{|\vec{a}||\vec{b}|} \Rightarrow \cos\alpha=-\frac{3}{5}$$

حالا به کمک اتحاد $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$، می‌توانیم $\sin\alpha$ را هم حساب کنیم:

$$\sin^2\alpha+(-\frac{3}{5})^2=1 \Rightarrow \sin^2\alpha+\frac{9}{25}=1 \Rightarrow \sin^2\alpha=\frac{16}{25} \Rightarrow \sin\alpha=\pm\frac{4}{5}$$

اینجا باید حواسمان باشد که طبق مورد (۲) درس‌نامه، $0^\circ<\alpha<180^\circ$ و در نتیجه $\sin\alpha>0$ است، پس $\sin\alpha=+\frac{4}{5}$ را انتخاب می‌کنیم.

گام (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال) حالا به کمک مورد (۳) درس‌نامه مساحت مثلثی را که روی بردارهای $(\frac{3\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|})$ و $(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|})$ ساخته می‌شود، به دست می‌آوریم:

$$S=\frac{1}{2}|(\frac{3\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|})\times(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|})|=\frac{1}{2}|\vec{0}-\frac{6\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}+\frac{2\vec{b}\times\vec{a}}{|\vec{a}||\vec{b}|}-\vec{0}|$$

طبق مورد (۴) درس‌نامه، می‌توانیم به جای $2\vec{b}\times\vec{a}$ بنویسیم $-2\vec{a}\times\vec{b}$:

$$S=\frac{1}{2}|-\frac{6\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}-\frac{2\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}|=\frac{1}{2}|-8\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}|=4|\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}|=\frac{4}{|\vec{a}||\vec{b}|}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

به جای $|\vec{a}\times\vec{b}|$ هم می‌نویسیم $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$:

$$S=4\frac{\cancel{|\vec{a}||\vec{b}|}\overset{\frac{4}{5}\text{ قبلاً شد}}{\sin\alpha}}{\cancel{|\vec{a}||\vec{b}|}}=4\sin\alpha=4(\frac{4}{5})=\frac{16}{5}=3/2$$

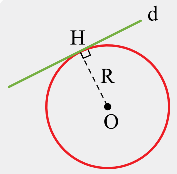
۳۶- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ معادلهٔ گستردهٔ هر دایره به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ است. برای به دست آوردن شعاع و مرکز در این معادله، از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$O(-\frac{x\text{ ضریب}}{2},-\frac{y\text{ ضریب}}{2}) \qquad r=\sqrt{(\text{طول مرکز})^2+(\text{عرض مرکز})^2-\underset{\text{عدد ثابت معادلهٔ گسترده}}{c}}$$

فقط حواستان باشد، زمانی می‌توانید از رابطه‌های بالا استفاده کنید که در معادلهٔ گسترده ضریب x^2 و y^2 برابر ۱ و عدد ثابت، سمت چپ معادله باشد. اگر معادلهٔ گستردهٔ این‌شکلی نبود، باید چنین شرایطی را خودتان بسازید.

② اگر خط d مثل شکل مقابل بر دایرهٔ $C(O,R)$ مماس باشد، می‌توانیم بگوییم فاصلهٔ مرکز دایره از خط d، مساویِ شعاع دایره است: $OH=R$



③ معادلهٔ دایره به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲$$

④ برای به دست آوردن قرینهٔ یک نقطه نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول $(y=x)$ باید جای x و y نقطه را عوض کنیم. مثلاً قرینهٔ نقطهٔ $A(۳,-۵)$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم می‌شود $A'(-۵,۳)$.

⑤ برای به دست آوردن معادلهٔ وترمشترک دو دایره، کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

الف) چک می‌کنیم که ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ در معادلهٔ گسترده‌شان ۱ باشد (اگر نبود این کار را انجام می‌دهیم).

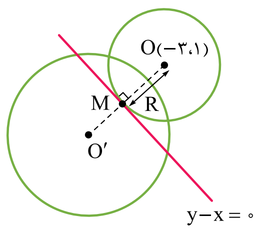
ب) طرفین معادله‌های گسترده را از هم کم می‌کنیم.

⑥ برای به دست آوردن طول نقطه‌های برخورد دو دایره:

الف) معادلهٔ وترمشترک دو دایره را پیدا می‌کنیم.

ب) معادلهٔ وترمشترک را به صورت $y=\square x+\square$ می‌نویسیم و در معادلهٔ یکی از دایره‌ها جای‌گذاری می‌کنیم. جواب‌های معادلهٔ به‌دست‌آمده، طول نقاط برخورد دو دایره هستند. با جای‌گذاری این جواب‌ها در معادلهٔ وترمشترک، عرضِ نقاطِ تقاطع هم به دست می‌آیند.

گام (پیداکردن مرکز دایرهٔ کوچک و شعاع دایره‌ها) اول یک شکل فرضی برای مسئله می‌کشیم. سؤال معادلهٔ دایرهٔ کوچک‌تر را به صورت $x^۲+y^۲+۶x-۲y=r$ داده، پس می‌توانیم بگوییم مختصات مرکزش می‌شود:



$$O(-\frac{۶}{۲},-\frac{-۲}{۲})=(-۳,۱)$$

به گفتهٔ سؤال خط $y-x=۰$ بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است؛ این یعنی فاصلهٔ مرکز دایرهٔ کوچک‌تر $(O(-۳,۱))$ از خط $y-x=۰$ برابر شعاع دایره است:

$$R=\frac{|۱-(-۳)|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۴\sqrt{۲}}{۲}=۲\sqrt{۲}$$

از طرفی سؤال می‌گوید شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر، دو برابر شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است؛ پس اگر شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر را R' در نظر بگیریم، می‌توانیم بنویسیم: $R'=۲R=۲(۲\sqrt{۲})=۴\sqrt{۲}$

گام (محاسبهٔ r) در گام قبلی دیدیم مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲+۶x-۲y=r$، نقطهٔ $O(-۳,۱)$ و شعاعش $۲\sqrt{۲}$ شد؛ پس می‌توانیم به کمک روابط مورد (۱) درس‌نامه r را حساب کنیم، اما قبلش عدد ثابت معادله، یعنی r را به سمت چپ می‌بریم تا بتوانیم از آن روابط استفاده کنیم. با این کار معادلهٔ دایره به صورت $x^۲+y^۲+۶x-۲y-r=۰$ درمی‌آید:

$$R=\sqrt{(\text{طول مرکز})^۲+(\text{عرض مرکز})^۲-c}\ \leftarrow \text{عدد ثابت}$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{۲}=\sqrt{\underbrace{(-۳)^۲+۱^۲-(-r)}_{۱۰+r}}\xrightarrow{\text{توان}۲}۸=۱۰+r\Rightarrow r=-۲$$

پس معادلهٔ دایرهٔ کوچک‌تر به این صورت می‌شود: $x^۲+y^۲+۶x-۲y+۲=۰$

گام (نوشتن معادلهٔ دایرهٔ بزرگ‌تر) برای نوشتن معادلهٔ دایرهٔ بزرگ‌تر، شعاع و مرکزش را لازم داریم. شعاعش را که به دست آوردیم $۴\sqrt{۲}$، پس فقط می‌ماند مرکزش. خوب به خط $y-x=۰$ و نقطه‌های O و O' در شکل گام (۱) نگاه کنید. به گفتهٔ سؤال، خط $y-x=۰$ که همان نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است، عمودمنصف OO' است؛ این یعنی اگر نقطهٔ O را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول قرینه کنیم به مختصات نقطهٔ O' می‌رسیم:

$$O(-۳,۱)\xrightarrow[\text{تعویض جای x و y}]{\text{قرینه نسبت به y=x}}O'(۱,-۳)$$

حالا که مرکز و شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر را داریم، می‌توانیم معادله‌اش را به کمک مورد (۳) درس‌نامه بنویسیم:

$$(x-۱)^۲+(y+۳)^۲=(۴\sqrt{۲})^۲\Rightarrow(x^۲-۲x+۱)+(y^۲+۶y+۹)=۳۲$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲-۲x+۶y-۲۲=۰$$

گام (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال) در آخر محل تقاطع دو دایره را طبق مورد (۶) درس‌نامه در دو مرحله پیدا می‌کنیم:

◇ **پیداکردن معادلهٔ وترمشترک دو دایره:** طبق مورد (۵) درس‌نامه معادلهٔ وترمشترک دایره‌های $x^۲+y^۲+۶x-۲y+۲=۰$ و $x^۲+y^۲-۲x+۶y-۲۲=۰$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(\cancel{x^۲}+\cancel{y^۲}-۲x+۶y-۲۲)-(\cancel{x^۲}+\cancel{y^۲}+۶x-۲y+۲)=۰-۰$$

$$\Rightarrow -۸x+۸y-۲۴=۰\xrightarrow{\div ۸}-x+y-۳=۰\Rightarrow y=x+۳$$

◇ **جای‌گذاری وترمشترک در معادلهٔ یکی از دایره‌ها:** حالا $y=x+۳$ را در معادلهٔ دایرهٔ $x^۲+y^۲+۶x-۲y+۲=۰$ جای‌گذاری می‌کنیم تا به یک معادلهٔ درجه۲ برحسب x (x همان طول نقاط تقاطع است) برسیم:

$$x^۲+(x+۳)^۲+۶x-۲(x+۳)+۲=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+(x^۲+۶x+۹)+۶x-۲x-۶+۲=۰\Rightarrow ۲x^۲+۱۰x+۵=۰\quad(*)$$

نکته حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲+bx+c=۰$ به شرطی که $\Delta>۰$ باشد، برابر است با: $\frac{c}{a}=$ ضرب ریشه‌ها

سؤال حاصل‌ضرب طول نقطه‌های برخورد، یعنی حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ (*) را می‌خواهد که طبق نکتهٔ بالا برابر می‌شود با: $P=\frac{c}{a}=\frac{۵}{۲}$

۳۷- گزینهٔ ۲

گام به قسمتِ اولِ صورتِ سؤال توجه کنید: «با قراردادن **عدد سه‌رقمی** $۳(\overline{a∘a})$ ...» همین‌جا می‌توانیم بگوییم $a=۱$ یا ۲ یا ۳. چون به‌ازای $a>۳$، عدد $۳(\overline{a∘a})$، چهاررقمی می‌شود.

گام سؤال می‌پرسد حداکثر چند عدد اول می‌تواند a را بشمارد. در جواب باید بگوییم وقتی $a=۱$ باشد، صفر عدد و وقتی $a=۲,۳$ باشد، ۱ عدد اول a را می‌شمارد؛ پس جواب عدد ۱ است.

۳۸- گزینهٔ ۳

استراتژی اول طرفین معادله را به پیمانهٔ ۷۷ همنهشت قرار می‌دهیم تا y حذف شود، بعد با حل معادلهٔ همنهشتی حاصل، فرم کلی x را به دست می‌آوریم. در آخر به کمک فرم کلی x، خواستهٔ مسئله را حساب می‌کنیم.

درس‌نامه ① به معادله‌هایی به شکل $ax+by=c$ (a، b و c اعدادی صحیح‌اند) معادلهٔ **سیالهٔ خطی** می‌گوییم. برای حل‌کردن این معادله‌ها، کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

الف) طرفین معادله را به پیمانهٔ ضریب کوچک‌تر (a یا b) همنهشت قرار می‌دهیم تا به یک معادلهٔ همنهشتی برسیم.

ب) با حل معادلهٔ همنهشتی، فرم کلی یکی از مجهول‌ها را به دست می‌آوریم.

پ) مجهولِ به‌دست‌آمده را در معادلهٔ سیاله جای‌گذاری می‌کنیم تا مجهول دیگر هم به دست بیاید.

② اگر طرفین یک همنهشتی به پیمانهٔ m بر عدد صحیحی مثل $a\neq ۰$ بخش‌پذیر باشند، می‌توانیم a را از طرفین همنهشتی ساده کنیم، اما باید حواسمان باشد که پیمانه را هم بر (a,m) تقسیم کنیم؛ یعنی:

$$ax\overset{m}{\equiv}ay\xrightarrow[(a,m)=d]{\div a}x\overset{\frac{m}{d}}{\equiv}y$$

③ هر همنهشتی مثل $a\overset{m}{\equiv}b$ را می‌توانیم به یک تساوی تبدیل کنیم، ببینید:

$$a\overset{m}{\equiv}b\Leftrightarrow a=mk+b$$

گام در قسمت (۱) درس‌نامه گفتیم طرفین معادلهٔ سیاله را به پیمانهٔ ضریب کوچک‌تر همنهشت قرار دهید، اما این‌جا سؤال مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی سه‌رقمی x را می‌خواهد و اصلاً به y کاری ندارد. پس به جای این‌که طرفین معادلهٔ $۶۳x+۷۷y=۲۷۳$ را به پیمانهٔ ۶۳ همنهشت قرار بدهیم، به پیمانهٔ ۷۷ همنهشت می‌گذاریم تا x را به دست بیاوریم:

$$\overset{-۷۷}{۶۳x}+\overset{۰}{\cancel{۷۷y}}\overset{۷۷}{\equiv}\overset{-۳\times۷۷}{۲۷۳}\Rightarrow -۱۴x\overset{۷۷}{\equiv}۴۲\xrightarrow[(۱۴,۷۷)=۷]{\div ۱۴}-x\overset{\frac{۷۷}{۷}}{\equiv}۳\Rightarrow x\overset{۱۱}{\equiv}-۳$$

گام طبق مورد (۳) درس‌نامه، همنهشتی بالا را می‌توانیم به یک تساوی تبدیل کنیم:

$$x=۱۱k-۳$$

کوچک‌ترین عدد طبیعی سه‌رقمی x به‌ازای $k=۱۰$ به دست می‌آید: $x=۱۱(۱۰)-۳=۱۰۷$ که مجموع ارقامش برابر $۱+۰+۷=۸$ است.

۳۹- گزینهٔ؟

متأسفانه این سؤال غلط است، چون بی‌شمار زوج مرتب به فرم $(۵k+۱,۵k)$ و $(۵k+۲,۵k-۱)$ داریم که نه مجموع مؤلفه‌های اولشان مضرب ۵ است؛ نه مجموع مؤلفه‌های دومشان.

۴۰- گزینهٔ ۴

درس‌نامه ۱ هر وقت درجهٔ رأس‌های یک گراف را داشتید و اندازهٔ گراف را می‌خواستید، از رابطهٔ مقابل استفاده کنید: تعداد یال‌ها $\times ۲ =$ مجموع درجهٔ رأس‌ها

۲ بزرگ‌ترین عدد در بین درجهٔ رأس‌های گرافِ $G = \Delta(G)$

۳ فرض کنید G یک گراف از مرتبهٔ p و a یک رأس آن باشد، در این صورت بین درجهٔ رأس a در G و $\bar{G}$ رابطهٔ زیر برقرار است:

درجهٔ رأس a در گراف G + درجهٔ رأس a در گراف $\bar{G}$ $= p-۱$

۴ تعداد رأس‌های فرد هر گراف، همیشه عددی زوج است.

گام اول ۴۸ را تجزیه می‌کنیم: $۴۸ = ۲\times۲\times۲\times۲\times۳$

۲,۲,۲,۲,۳ نمی‌تواند درجهٔ رئوس یک گراف باشد، چون تعداد رأس‌های فردش، عددی زوج نیست *(یه دونه فرد داره)*، پس حق داریم یه‌دونه ۱ به اعداد بالا اضافه کنیم؛ این‌جوری هم تعداد یک‌ها حداقل است هم تعداد رأس‌های فرد، زوج: درجهٔ رأس‌ها: ۳,۲,۲,۲,۲,۱

گام با کمی دقت به درجه‌های بالا متوجه می‌شویم که می‌توانیم دوتا از ۲ها را در هم ضرب کنیم و به جایشان ۴ را قرار بدهیم تا درجهٔ رأس‌ها به صورت ۴,۳,۲,۲,۱ دربیاید؛ این دنباله هم مشکلی ندارد.

گام $\Delta(\bar{G})$ و $q(\bar{G})$ را در هر دو دنباله به دست می‌آوریم:

◆ ۳,۲,۲,۲,۲,۱: در این دنباله چون ۶تا عدد داریم، پس ۶تا هم رأس داریم؛ بنابراین $p=۶$ است. حالا طبق مورد (۳) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم برای به دست آوردن درجهٔ رأس‌های گراف $\bar{G}$، باید همهٔ درجه‌ها را از $p-۱=۵$ کم کنیم:

درجهٔ رأس‌های $\bar{G}$: $\overset{۲}{\cancel{۵-۳}}, \overset{۳}{\cancel{۵-۲}}, \overset{۳}{\cancel{۵-۲}}, \overset{۳}{\cancel{۵-۲}}, \overset{۳}{\cancel{۵-۲}}, \overset{۴}{\cancel{۵-۱}}$

همان‌طور که می‌بینید $\Delta(\bar{G})=۴$ است. برای محاسبهٔ $q(\bar{G})$ هم از مورد (۱) درس‌نامه کمک می‌گیریم: اندازهٔ گراف $\bar{G} \times ۲ =$ مجموع درجه‌های گراف $\bar{G}$

$$\Rightarrow ۲+۳+۳+۳+۳+۴ = ۲q(\bar{G}) \Rightarrow ۱۸ = ۲q(\bar{G}) \Rightarrow q(\bar{G}) = ۹$$

بنابراین $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = ۴+۹ = ۱۳$ است. همین‌جا معلوم می‌شود که ۴ درست است، اما اگر بررسی دنبالهٔ دوم را هم می‌خواهید، خدمت شما:

◆ ۴,۳,۲,۲,۱: در این دنباله $p=۵$ است، پس برای محاسبهٔ درجهٔ رأس‌های گراف $\bar{G}$ باید همهٔ درجه‌ها را از $p-۱=۴$ کم کنیم:

درجهٔ رأس‌های $\bar{G}$: $\overset{۱}{\cancel{۴-۳}}, \overset{۰}{\cancel{۴-۴}}, \overset{۲}{\cancel{۴-۲}}, \overset{۲}{\cancel{۴-۲}}, \overset{۳}{\cancel{۴-۱}}$

در این دنباله $\Delta(\bar{G})=۳$ است. $q(\bar{G})$ هم به صورت زیر پیدا می‌شود:

$$۱+۰+۲+۲+۳ = ۲q(\bar{G}) \Rightarrow ۸ = ۲q(\bar{G}) \Rightarrow q(\bar{G}) = ۴$$

بنابراین در این حالت $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = ۳+۴ = ۷$ می‌شود که در گزینه‌ها نیست.

فیزیک

۴۱- گزینهٔ ۲

استراتژی در مسائل واپاشی، عدد جرمی قبل از فرایند را با مجموع عددهای جرمی پس از فرایند و همچنین عدد اتمی قبل از فرایند را با مجموع عددهای اتمی پس از فرایند برابر قرار بدهید و مجهول را پیدا کنید.

تعداد نوکلئون‌ها در طی فرایند واپاشی هسته‌ای پایسته است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$^{۱۱}_{۶}C \to {}^{۱۱}_{۵}B + {}^{A}_{Z}X$$

عدد جرمی: $۱۱ = ۱۱ + A \Rightarrow A = ۰$

عدد اتمی: $۶ = ۵ + Z \Rightarrow Z = ۱$ $\Rightarrow {}^{۰}_{۱}X$

ذرهٔ گسیل‌شده، ${}^{۰}_{۱}X$ است؛ یعنی این ذره پوزیترون (β^+) است.

تله اگر ۱ را انتخاب کردید، سخت در اشتباه هستید، چون نماد پروتون، ${}^{۱}_{۱}p$ است.

۴۲- گزینهٔ ۳

شفاف‌سازی گلوله در حداکثر ارتفاع خود از سطح زمین متوقف می‌شود؛ بنابراین انرژی جنبشی آن در این ارتفاع صفر است.

درس‌نامه ۱ **انرژی پتانسیل گرانشی:** اگر جسمی با جرم m در ارتفاع h نسبت به سطح زمین قرار بگیرد، آن‌گاه انرژی پتانسیل گرانشی آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید (مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را سطح زمین فرض کردیم):

$$U = \underset{\text{شتاب گرانش}\,(m/s^۲)}{\underbrace{\overset{\text{جرم}\,(kg)}{m}\,g}}\,\overset{\text{ارتفاع}\,(m)}{h}$$

۲ انرژی جنبشی جسمی که با تندی v در حال حرکت است:

$$K = \frac{۱}{۲}\underset{\text{جرم}\,(kg)}{m}v^۲$$

۳ **انرژی مکانیکی:** به مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل جسم، انرژی مکانیکی می‌گوییم.

$$E = \underset{\text{انرژی جنبشی}\,(J)}{K} + \overset{\text{انرژی پتانسیل}\,(J)}{U}$$

اگر از نیروهای اتلافی (مثل نیروی مقاومت هوا) صرف نظر کنیم، انرژی مکانیکی جسم پایسته می‌ماند: $E_۱ = E_۲ \Rightarrow K_۱ + U_۱ = K_۲ + U_۲$

گام مقاومت هوا ناچیز است؛ پس انرژی مکانیکی گلوله پایسته است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم (در تمام مراحل مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را سطح زمین در نظر گرفتیم):

$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow K_۱ + U_۱ = K_۲ + U_۲$$

$$\xrightarrow[K_۲ = K_۱ - \frac{۳۰}{۱۰۰}K_۱ = ۰/۷K_۱]{U_۱ = ۰} K_۱ = ۰/۷K_۱ + U_۲ \Rightarrow ۰/۳K_۱ = U_۲$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۱۰} \times \frac{۱}{۲}\cancel{m}v_۱^۲ = \cancel{m}gh_۲ \xrightarrow[g=۱۰\,m/s^۲]{h_۲ = ۴۲\,m} \frac{۳}{۲۰}v_۱^۲ = ۱۰ \times ۴۲ \Rightarrow v_۱^۲ = ۲۸۰۰$$

گام حداکثر ارتفاع گلوله از سطح زمین هنگامی است که تندی آن در این ارتفاع صفر شود؛ در نتیجه انرژی جنبشی آن نیز در این ارتفاع صفر است $(K_۳ = ۰)$؛ بنابراین با استفاده از پایستگی انرژی مکانیکی می‌توانیم بنویسیم: $E_۱ = E_۳ \Rightarrow K_۱ + U_۱ = K_۳ + U_۳$

$$\xrightarrow[K_۳ = ۰]{U_۱ = ۰} K_۱ = U_۳ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\cancel{m}v_۱^۲ = \cancel{m}gh_۳$$

$$\xrightarrow[g=۱۰\,m/s^۲]{v_۱^۲ = ۲۸۰۰} \frac{۱}{۲} \times ۲۸۰۰ = ۱۰h_۳ \Rightarrow h_۳ = ۱۴۰\,m$$

۴۳- گزینهٔ ۲

درس‌نامه **انبساط طولی یک جسم جامد:**

$$\Delta L = \overset{\text{ضریب انبساط طولی}\,(۱/^\circ C \text{ یا } ۱/K)}{\alpha}\,\underset{\text{طول اولیه}\,(m)}{L_۱}\,\underset{\text{تغییرات دما}\,(^\circ C \text{ یا } K)}{\Delta\theta}$$

با جای‌گذاری داده‌ها در رابطهٔ زیر، اختلاف بیشترین و کم‌ترین دمای پل را به دست می‌آوریم:

$$\Delta L = \alpha L_۱ \Delta\theta \xrightarrow[\alpha = ۱/۲۵\times۱۰^{-۵}\,K^{-۱}]{\Delta L = ۹۰۰/۹ - ۹۰۰ = ۰/۹\,m} \overset{۰/۱}{\cancel{۰/۹}} = ۱/۲۵ \times ۱۰^{-۵} \times \overset{۱۰۰}{\cancel{۹۰۰}} \times \Delta\theta$$

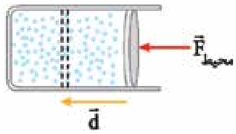
$$\Rightarrow \Delta\theta = ۸۰\,^\circ C$$

۴۴- گزینهٔ ۱

درس‌نامه **قانون اول ترمودینامیک:**

$$\Delta U = \overset{\text{گرما}}{Q} + \underset{\text{کار محیط بر روی دستگاه (گاز)}}{W}$$

شکل روبه‌رو، یک فرایند تراکمی را نشان می‌دهد. با توجه به شکل روبه‌رو، کاری که محیط بر روی گاز در فرایندهای تراکمی انجام می‌دهد، مثبت است.



$$W_{\text{محیط بر روی گاز}} = F_{\text{محیط}} d\cos\theta \xrightarrow{\theta=۰^\circ} W_{\text{محیط بر روی گاز}} > ۰$$

(۳) و (۴) پَرا!

حالا باید تغییر انرژی درونی گاز را در فرایندهای تراکم هم‌فشار و تراکم بی‌دررو بررسی کنیم.

تراکم بی‌دررو: در فرایند بی‌دررو، گرمایی بین گاز و محیط مبادله نمی‌شود $(Q=۰)$؛ بنابراین طبق قانون اول ترمودینامیک، انرژی درونی گاز در فرایند تراکم بی‌دررو افزایش می‌یابد (در واقع گاز در این فرایند انرژی از محیط انرژی می‌گیرد، اما نه به صورت گرما، بلکه از طریق کاری که محیط بر روی آن انجام می‌دهد).

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow[W>۰]{Q=۰} \Delta U > ۰$$

(۲) پَر پَرا!

گزینهٔ درست معلوم شد! اما تنبلی نکن بیا ببین چرا درسته!

تراکم هم‌فشار: فشار گاز در طی فرایند هم‌فشار ثابت است و گرما و کار هر دو مبادله می‌شوند. گاز در فرایند تراکم هم‌فشار، مقداری انرژی از طریق کاری که محیط بر روی آن انجام می‌دهد، دریافت می‌کند و مقداری انرژی از طریق گرما از دست می‌دهد. برای این‌که فشار گاز ثابت بماند، باید گرمایی که گاز از دست می‌دهد، بیشتر از کاری که محیط بر روی آن انجام می‌دهد باشد. بنابراین طبق قانون اول ترمودینامیک، انرژی درونی گاز در فرایند تراکم هم‌فشار کاهش می‌یابد.

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow[W>۰]{|Q|>|W|,\, Q<۰} \Delta U < ۰$$

۴۵- گزینه ۲

شفاف‌سازی متحرک B، ۲ s دیرتر از متحرک A به حرکت درآمده است، پس اگر مدت‌زمان t برای متحرک A بگذرد، برای متحرک B مدت‌زمان $t-۲$ سپری می‌شود.

درس نامه معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t + x_۰$$

شتاب $(m/s^۲)$ — مکان اولیه (m) — زمان (s) — سرعت اولیه (m/s)

گام ۱ متحرک‌های A و B از یک نقطه $(x_{۰A} = x_{۰B})$ با شتاب ثابت شروع به حرکت کرده‌اند، اما متحرک B، ۲ s دیرتر از متحرک A! پس وقتی که ۶ s از حرکت متحرک A می‌گذرد، متحرک B، ۴ s در حرکت بوده است. طبق گفتهٔ سؤال، ۶ s پس از حرکت متحرک A، دو متحرک به هم می‌رسند؛ پس مکان دو متحرک در این لحظه یکسان است و با استفاده از معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت این دو متحرک می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} x_A = \frac{۱}{۲}a_A t_A^۲ + v_{۰A} t_A + x_{۰A} \xrightarrow{v_{۰A}=۰\ m/s} x_A = \frac{۱}{۲}a_A t_A^۲ + x_{۰A} \\ x_B = \frac{۱}{۲}a_B t_B^۲ + v_{۰B} t_B + x_{۰B} \xrightarrow{v_{۰B}=۰\ m/s} x_B = \frac{۱}{۲}a_B t_B^۲ + x_{۰B} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[x_{۰A}=x_{۰B}]{x_A=x_B} \cancel{\frac{۱}{۲}}a_A t_A^۲ + \cancel{x_{۰A}} = \cancel{\frac{۱}{۲}}a_B t_B^۲ + \cancel{x_{۰B}}$$

$$\xrightarrow[t_A=۶\ s,\, t_B=۴\ s]{a_A=a,\, a_B=a+۰/۵\ (m/s^۲)} a\,\overset{۳۶}{\cancel{(۶)^۲}} = (a+۰/۵)\,\overset{۱۶}{\cancel{(۴)^۲}}$$

$$\Rightarrow ۹a = ۴a + ۲ \Rightarrow ۵a = ۲ \Rightarrow a = \frac{۲}{۵}\,m/s^۲ = ۰/۴\ m/s^۲$$

گام ۲ سؤال از ما فاصلهٔ دو متحرک را در لحظه‌ای که ۱۰ s از حرکت متحرک A می‌گذرد، می‌خواهد. با توجه به این‌که متحرک B، ۲ s دیرتر از متحرک A به حرکت درآمده است، پس برای متحرک B تا این لحظه، ۸ s سپری شده است. مکان هر یک از متحرک‌ها در این لحظه را محاسبه می‌کنیم:

$$x_A = \frac{۱}{۲}a_A t_A^۲ + v_{۰A} t_A + x_{۰A}$$

$$\xrightarrow[t_A=۱۰\ s]{a_A=a=۰/۴\ m/s^۲,\, v_{۰A}=۰\ m/s} x_A = \frac{۱}{\cancel{۲}_{۱}}\,\overset{۰/۲}{\cancel{(۰/۴)}}(۱۰)^۲ + x_{۰A} = ۲۰ + x_{۰A}\ (m)$$

$$x_B = \frac{۱}{۲}a_B t_B^۲ + v_{۰B} t_B + x_{۰B}$$

$$\xrightarrow[v_{۰B}=۰\ m/s,\, t_B=۸\ s]{a_B=a+۰/۵=۰/۴+۰/۵=۰/۹\ m/s^۲} x_B = \frac{۱}{۲}(۰/۹)(۸)^۲ + x_{۰B} = ۲۸/۸ + x_{۰B}\ (m)$$

گام ۳ حالا فاصلهٔ دو متحرک یعنی $x_B - x_A$ را به دست می‌آوریم:

فاصلهٔ دو متحرک A و B: $x_B - x_A = ۲۸/۸ + x_{۰B} - (۲۰ + x_{۰A})$

$\xrightarrow{x_{۰B}=x_{۰A}}$ فاصلهٔ دو متحرک A و B:

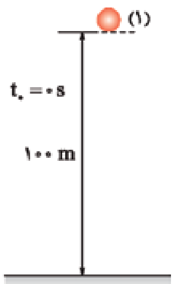
$$x_B - x_A = ۲۸/۸ + \cancel{x_{۰B}} - ۲۰ - \cancel{x_{۰A}} = ۸/۸\ m$$

۴۶- گزینه ۴

درس نامه جابه‌جایی در ثانیهٔ nام در سقوط آزاد بدون سرعت اولیه (جهت مثبت y را رو به پایین فرض کردیم): $\Delta y = (n - ۰/۵)g$

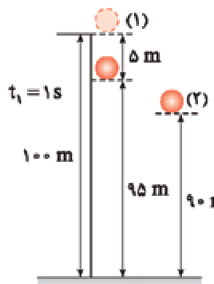
در رابطهٔ بالا، اگر $g = ۱۰\ m/s^۲$ باشد، متحرک در ثانیه‌های اول، دوم، سوم و ... به ترتیب به اندازهٔ ۵ m، ۱۵ m، ۲۵ m و ... جابه‌جا می‌شود.

گلولهٔ (۱) در لحظهٔ $t_۰ = ۰\,s$ از فاصلهٔ ۱۰۰متری زمین رها می‌شود (شکل الف).



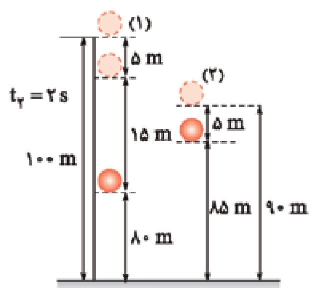
(الف)

یک ثانیه بعد $(t_۱ = ۱s)$، گلولهٔ (۲) از فاصلهٔ ۹۰متری زمین (۱۰ m پایین‌تر از مکان اولیهٔ گلولهٔ اول) رها می‌شود. در این یک ثانیه گلولهٔ اول به اندازهٔ ۵ m پایین آمده و به فاصلهٔ ۹۵متری زمین رسیده است (شکل ب).



(ب)

یک ثانیه بعد $(t_۲ = ۲s)$، گلولهٔ اول به اندازهٔ ۱۵ m و گلولهٔ دوم به اندازهٔ ۵ m به سمت پایین می‌آیند و به ترتیب در فاصلهٔ ۸۰ متری و ۸۵ متری زمین قرار می‌گیرند (شکل پ).



(پ)

همان‌طور که در شکل‌های (ب) و (پ) می‌بینید، از لحظهٔ رهاشدن گلولهٔ (۲) (شکل ب) تا لحظه‌ای که گلولهٔ (۱) به زمین می‌رسد، فاصلهٔ دو گلوله ابتدا کاهش می‌یابد، سپس افزایش می‌یابد.

۴۷- گزینه ۲

درس نامه (۱) معادلهٔ سرعت ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست:

$$v = at + v_۰$$

شتاب $(m/s^۲)$ — سرعت اولیه (m/s)

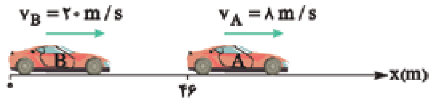
(۲) معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت بر روی خط راست:

$$x = vt + x_۰$$

سرعت (m/s) — مکان اولیه (m)

در ابتدا هر دو خودرو با سرعت ثابت در حال حرکت هستند. وقتی فاصلهٔ بین دو خودرو به ۴۶ m می‌رسد، نوع حرکت خودروی A تغییر می‌کند و با شتاب ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد و خودروی B یک ثانیه پس از خودروی A نوع حرکتش تغییر می‌کند و با شتاب ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد؛ بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که در این یک ثانیه، خودروی A با شتاب ثابت و خودروی B با سرعت ثابت در حال حرکت‌اند.

با توجه به شکل (الف)، مکان هر یک از خودروها در لحظهٔ $t=1s$ را با استفاده از معادلهٔ مکان ـ زمان آن‌ها به دست می‌آوریم:



(الف)

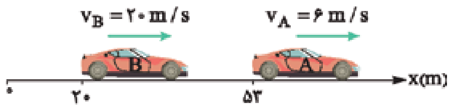
$$x_A=\frac{1}{2}a_At^2+v_{0A}t+x_{0A}$$

$$\xrightarrow[x_{0A}=46\,m]{a_A=-2\,m/s^2,\ v_{0A}=8\,m/s} x_A=\frac{1}{2}(-2)t^2+8t+46=-t^2+8t+46$$

$$\xrightarrow{t=1\,s} x_A=-(1)^2+8(1)+46=53\,m$$

$$x_B=v_Bt+x_{0B}\xrightarrow[x_{0B}=0\,m]{v_B=20\,m/s} x_B=20t\xrightarrow{t=1\,s} x_B=20(1)=20\,m$$

از این لحظه ($t=1s$) به بعد، خودروی B با شتاب ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. پس با توجه به شکل (ب)، معادله مکان ـ زمان خودروی B پس از لحظهٔ $t=1s$ را می‌نویسیم:



(ب)

$$x'_B=\frac{1}{2}a_Bt'^2+v_{0B}t'+x'_{0B}$$

$$\xrightarrow[x'_{0B}=20\,m]{a_B=-4\,m/s^2,\ v_{0B}=20\,m/s} x'_B=\frac{1}{2}(-4)t'^2+20t'+20$$

$$=-2t'^2+20t'+20$$

برای این‌که معادلهٔ مکان ـ زمان خودروی A پس از لحظهٔ $t=1s$ را بنویسیم، به سرعت آن در این لحظه نیاز داریم *(چون سرعت اولیه‌اش می‌شه)*. با استفاده از معادلهٔ سرعت ـ زمان، سرعت خودروی A در لحظهٔ $t=1s$ را به دست می‌آوریم:

$$v_A=a_At+v_{0A}\xrightarrow[v_{0A}=8\,m/s,\ t=1\,s]{a_A=-2\,m/s^2} v_A=-2(1)+8=6\,m/s$$

حالا با توجه به شکل (ب)، می‌توانیم معادلهٔ مکان ـ زمان خودروی A پس از لحظهٔ $t=1s$ را بنویسیم:

$$x'_A=\frac{1}{2}a_At'^2+v'_{0A}t'+x'_{0A}$$

$$\xrightarrow[x'_{0A}=53\,m]{a_A=-2\,m/s^2,\ v'_{0A}=6\,m/s} x'_A=\frac{1}{2}(-2)t'^2+6t'+53=-t'^2+6t'+53$$

وقتی دو خودروی A و B به هم می‌رسند، مکان آن‌ها یکسان است ($x'_A=x'_B$)؛ پس معادلهٔ مکان ـ زمان دو خودرو را برابر با یکدیگر قرار می‌دهیم تا لحظهٔ به هم رسیدن را به دست بیاوریم:

$$x'_A=x'_B\Rightarrow -t'^2+6t'+53=-2t'^2+20t'+20$$

$$\Rightarrow t'^2-14t'+33=0\Rightarrow\begin{cases}t'=11\,s & \times\\ t'=3\,s & \checkmark\end{cases}$$

دو خودروی A و B قبل از لحظهٔ $t'=11s$ متوقف می‌شوند، به خاطر همین $t'=11s$ غیر قابل قبول است. در آخر خواستهٔ سؤال یعنی سرعت خودروی B در لحظهٔ $t'=3s$ را، محاسبه می‌کنیم:

$$v_B=a_Bt'+v_{0B}\xrightarrow[t'=3\,s,\ v_{0B}=20\,m/s]{a_B=-4\,m/s^2} v_B=-4(3)+20=8\,m/s$$

۴۸- گزینه ۳

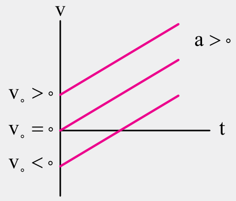
درس‌نامه ۱ اگر سرعت متحرکی در لحظهٔ t_1 برابر با v_1 و در لحظهٔ t_2 برابر با v_2 باشد، آن‌گاه شتاب متوسط آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

تغییرات سرعت (m/s)

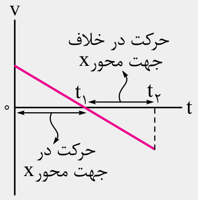
$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$$

مدت زمان (s)

۲ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی خط راست حرکت می‌کند، به صورت یک خط راست است.



۳ در نمودار سرعت ـ زمان:
- $v>0$ متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند.
- $v<0$ متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.



ابتدا اطلاعاتمان را راجع به دو متحرک A و B کامل می‌کنیم. نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B به صورت یک خط راست است؛ پس حرکت این دو متحرک از نوع حرکت با شتاب ثابت است. با توجه به نمودار سرعت ـ زمان آن‌ها، شتاب متحرک B را محاسبه می‌کنیم:

$$a=a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\Rightarrow a_B=\frac{0-(-16)}{8-0}=2\,m/s^2$$

حالا که شتاب متحرک B را حساب کردیم، معادلهٔ سرعت ـ زمان آن را نیز می‌نویسیم:

$$v_B=a_Bt+v_{0B}\xrightarrow[v_{0B}=-16\,m/s]{a_B=2\,m/s^2} v_B=2t-16$$

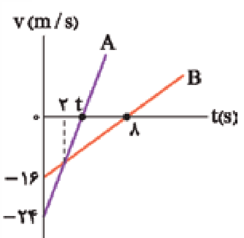
معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرک A را نیز می‌نویسیم:

$$v_A=a_At+v_{0A}\xrightarrow{v_{0A}=-24\,m/s} v_A=a_At-24$$

نمودار سرعت ـ زمان این دو متحرک را ببینید. سرعت دو متحرک A و B در لحظهٔ $t=2s$ با هم برابر شده است ($v_A=v_B$). بنابراین با استفاده از معادلهٔ سرعت ـ زمان آن‌ها می‌توانیم بنویسیم:

$$v_A=v_B\xrightarrow[v_B=2t-16]{v_A=a_At-24} a_At-24=2t-16$$

$$\xrightarrow{t=2\,s} 2a_A-24=2(2)-16\Rightarrow 2a_A=12\Rightarrow a_A=6\,m/s^2$$



(الف)

شتاب متحرک A را هم پیدا کردیم. حالا به سراغ سؤال می‌رویم! سؤال راجع به بازهٔ زمانی است که دو متحرک A و B در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند؛ پس باید این بازهٔ زمانی را پیدا کنیم. با توجه به شکل (الف)، سرعت متحرک A در لحظهٔ t صفر می‌شود و متحرک A در این لحظه تغییر جهت داده و در جهت محور x به حرکت خود ادامه می‌دهد. با استفاده از معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرک A، لحظهٔ t را به دست می‌آوریم:

$$v_A=6t-24\xrightarrow{v_A=0\,m/s} 0=6t-24\Rightarrow t=4\,s$$

همان‌طور که در نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B می‌بینید، در بازهٔ زمانی $t=4s$ تا $t'=8s$ متحرک A در جهت محور x و متحرک B در خلاف جهت محور x حرکت می‌کنند، پس در این بازهٔ زمانی این دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند. حالا برای این‌که ببینیم فاصلهٔ این دو متحرک در این بازهٔ زمانی چگونه تغییر می‌کند، ابتدا مکان هر یک از آن‌ها را در لحظهٔ $t=4s$ با استفاده از معادلهٔ مکان ـ زمان آن‌ها به دست می‌آوریم:

$$x_A=\frac{1}{2}a_At^2+v_{0A}t+x_{0A}$$

$$\xrightarrow[v_{0A}=-24\,m/s]{a_A=6\,m/s^2,\ x_{0A}=0\,m} x_A=\frac{1}{2}(6)t^2-24t+0=3t^2-24t$$

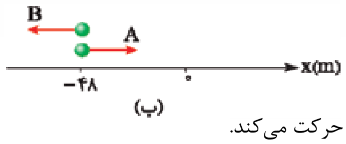
$$\xrightarrow{t=4\,s} x_A=3(4)^2-24(4)=48-96=-48\,m$$

$$x_B=\frac{1}{2}a_Bt^2+v_{0B}t+x_{0B}$$

$$\xrightarrow[v_{0B}=-16\,m/s]{a_B=2\,m/s^2,\ x_{0B}=0\,m} x_B=\frac{1}{2}(2)t^2-16t+0=t^2-16t$$

$$\xrightarrow{t=4\,s} x_B=(4)^2-16(4)=16-64=-48\,m$$

در شکل (ب)، موقعیت این دو متحرک در لحظهٔ $t = ۴\,s$ را بر روی محور x نشان دادیم.



همان‌طور که می‌بینید، متحرک B در مکان ‎−۴۸ m و در حال حرکت در خلاف جهت محور x و متحرک A در مکان ‎−۴۸ m تغییر جهت داده و در جهت محور x شروع به حرکت می‌کند.

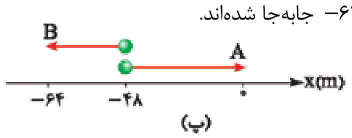
حالا مکان دو متحرک A و B را در لحظهٔ $t' = ۸\,s$ به دست می‌آوریم:

$$x_A = ۳t^۲ - ۲۴t \xrightarrow{t'=۸\,s} x'_A = ۳(۸)^۲ - ۲۴(۸) = ۱۹۲ - ۱۹۲ = ۰\,m$$

$$x_B = t^۲ - ۱۶t \xrightarrow{t'=۸\,s} x'_B = (۸)^۲ - ۱۶(۸) = ۶۴ - ۱۲۸ = -۶۴\,m$$

در شکل (پ) موقعیت این دو متحرک در لحظهٔ $t' = ۸\,s$ را بر روی محور x نشان دادیم.

همان‌طور که می‌بینید، در بازهٔ زمانی ۴ s تا ۸ s متحرک A از مکان ‎−۴۸ m به مکان ۰ m و متحرک B از مکان ‎−۴۸ m به مکان ‎−۶۴ m جابه‌جا شده‌اند.



با توجه به شکل (پ)، متحرک A، ۴۸ m در جهت محور x و متحرک B، ۱۶ m در خلاف جهت محور x در این بازهٔ زمانی جابه‌جا شده‌اند. پس در مجموع ۶۴ m‏(=۴۸+۱۶) از هم دور شده‌اند.

مشاوره سؤالات حرکت بر خط راست این آزمون از دو متحرک تشکیل شده است. معمولاً این‌جور سؤال‌ها وقت‌گیر هستند، پس اگر دیدید وقتتان را می‌گیرد، در انتهای آزمون به آن پاسخ دهید و وقتتان را صرف سؤالات دیگر کنید.

۴۹- گزینه ۲

درس نامه در جدول زیر، چهار کمیت مربوط به حرکت ماهواره به دور زمین بررسی شده است.

کمیت	رابطه	تناسب
وزن	$W = \frac{GM_e m}{r^۲}$	$W \propto \frac{۱}{r^۲}$
شتاب	$a = \frac{GM_e}{r^۲}$	$a \propto \frac{۱}{r^۲}$
تندی	$v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$	$v \propto \frac{۱}{\sqrt{r}}$
دورهٔ گردش	$T = ۲\pi\sqrt{\frac{r^۳}{GM_e}}$	$T \propto \sqrt{r^۳}$

در جدول بالا، G ثابت گرانش عمومی، M_e جرم زمین، m جرم ماهواره و r فاصله تا مرکز زمین است.

بررسی سایرگزینه‌ها: ۱) تندی ماهواره در گردش به دور زمین، با جذر فاصلهٔ آن از مرکز زمین نسبت **وارون** دارد. ۳) شتاب حرکت ماهواره با **مجذور** فاصلهٔ آن از مرکز زمین نسبت **وارون** دارد. ۴) وزن یک ماهواره با **مجذور** فاصلهٔ آن از مرکز زمین رابطهٔ عکس دارد.

۵۰- گزینه ۱

درس نامه نیروی خالص وارد بر جسم برابر با تغییر تکانهٔ جسم تقسیم بر زمان تغییر آن است و از رابطهٔ روبه‌رو به دست می‌آید: $\vec{F}_{net} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$

گام ۱ ابتدا تکانهٔ متحرک در لحظه‌های $t_۱ = ۱\,s$ و $t_۲ = ۳\,s$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{p} = (۳t - ۶)\vec{i} \xrightarrow{t_۱=۱\,s} \vec{p}_۱ = (۳(۱) - ۶)\vec{i} = -۳\vec{i}$$

$$\vec{p} = (۳t - ۶)\vec{i} \xrightarrow{t_۲=۳\,s} \vec{p}_۲ = (۳(۳) - ۶)\vec{i} = ۳\vec{i}$$

گام ۲ حالا با جای‌گذاری داده‌ها در رابطهٔ زیر، نیروی خالص متوسط در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۱\,s$ تا $t_۲ = ۳\,s$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{F}_{net} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_۲ - \vec{p}_۱}{t_۲ - t_۱} \xrightarrow[t_۱=۱\,s,\,t_۲=۳\,s]{\vec{p}_۱=-۳\vec{i},\,\vec{p}_۲=۳\vec{i}} \vec{F}_{net} = \frac{۳\vec{i} - (-۳\vec{i})}{۳ - ۱} = \frac{۶\vec{i}}{۲} = ۳\vec{i}\ (N)$$

مشاوره قرار نیست از همهٔ اطلاعات برای حل سؤال استفاده کنیم؛ مثلاً در حل این سؤال به جرم متحرک کاری نداشتیم و طراح اطلاعات اضافی داده است.

۵۱- گزینه ۳

درس نامه ۱) **نیروی اصطکاک جنبشی:**

$$f_k = \underbrace{\overset{\text{ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح}}{\mu_k}}\ \underbrace{F_N}_{\text{نیروی عمودی سطح(N)}}$$

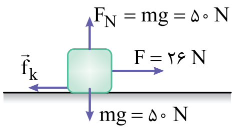
۲) اندازهٔ نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند (R)، برابر با برایند دو نیروی عمودی سطح (F_N) و نیروی اصطکاک (f) است. $R = \sqrt{F_N^۲ + f^۲}$

در رابطهٔ بالا، f می‌تواند f_s، $f_{s,max}$ یا f_k باشد.

۳) **قانون دوم نیوتون:**

$$\underbrace{F_{net}}_{\text{نیروی خالص(N)}} = \overset{\text{جرم(kg)}}{m}\ \underbrace{a}_{\text{شتاب}(m/s^۲)}$$

گام ۱ وقتی جسم حرکت می‌کند، نیروی اصطکاک جنبشی بر آن وارد می‌شود. در این حالت با استفاده از قانون دوم نیوتون می‌توانیم شتاب جسم در حین حرکت را به دست بیاوریم:



$$F_{net} = ma \Rightarrow F - f_k = ma$$

$$\xrightarrow{f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg} F - \mu_k mg = ma$$

$$\xrightarrow[F=۲۶\,N,\,\mu_k=۰/۴]{m=۵\,kg,\,g=۱۰\,m/s^۲} ۲۶ - ۰/۴ \times ۵ \times ۱۰ = ۵a$$

$$\Rightarrow ۶ = ۵a \Rightarrow a = \frac{۶}{۵} = ۱/۲\,m/s^۲$$

گام ۲ در حین حرکت، سطح به جسم نیروی عمودی سطح (F_N) و نیروی اصطکاک جنبشی (f_k) را وارد می‌کند؛ بنابراین نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند، برایند این دو نیرو است:

$$R = \sqrt{F_N^۲ + f_k^۲} \xrightarrow[f_k=\mu_k F_N=\frac{۴}{۱۰}\times۵۰=۲۰\,N]{F_N=mg=۵۰\,N} R = \sqrt{۵۰^۲ + ۲۰^۲}$$

$$= \sqrt{۲۹۰۰} = ۱۰\sqrt{۲۹}\ N$$

تله اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح را ۰/۵ در نظر بگیرید، به گزینهٔ نادرست ۲ می‌رسید.

۵۲- گزینه ۲

درس نامه **نیروی مرکزگرا در حرکت دایره‌ای یکنواخت:** $F_C = \frac{mv^۲}{r}$

در حرکت دایره‌ای یکنواخت خودرو بر روی سطح افقی، نیروی اصطکاک ایستایی، نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند. با جای‌گذاری داده‌ها در رابطهٔ زیر، اندازهٔ این نیرو را به دست می‌آوریم.

$$F_C = \frac{mv^۲}{r} \xrightarrow[v=۱۸\times\frac{۱۰}{۳۶}=۵\,m/s]{m=۲\times۱۰^۳\,kg,\,r=۲۰\,m} F_C = \frac{\overset{۱}{\cancel{۲}} \times \overset{۱۰^۲}{\cancel{۱۰^۳}} \times (۵)^۲}{\underset{۱}{\cancel{۲۰}}} = ۲۵۰۰\,N$$

۵۳- گزینه ۳

شفاف‌سازی در طول تار ۳ شکم تشکیل شده، یعنی شمارهٔ هماهنگ ۳ است.

درس نامه ۱) برای محاسبهٔ بسامد تشدیدی هماهنگ nام (f_n) با استفاده از بسامد تشدیدی اصلی $(f_۱)$ در تار مرتعش دو انتها بسته، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$f_n = nf_۱$$

تعداد شکم در طول تار مرتعش دو انتها بسته برابر با شمارهٔ هماهنگ (n) است.

۲) **بسامد تشدیدی هماهنگ nام در تار مرتعش دو انتها بسته:**

$$f_n = \frac{\overset{\text{شمارهٔ هماهنگ}}{n}\ \overset{\text{تندی انتشار}(m/s)}{v}}{۲\underbrace{L}_{\text{طول تار(m)}}}$$

گام سه شکل در طول تار ایجاد شده است، پس تار بسامد تشدیدی هماهنگ سوم خود را انجام می‌دهد $(n=۳)$. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$f_n=nf_۱ \Rightarrow ۳۰۰=۳\times f_۱ \Rightarrow f_۱=۱۰۰\,Hz$$

گام در آخر داده‌ها را در رابطهٔ زیر جای‌گذاری می‌کنیم و تندی انتشار موج عرضی در تار را به دست می‌آوریم:

$$f_n=\frac{nv}{۲L} \xrightarrow[L=۶۰\,cm=۰/۶\,m]{f_n=۳۰۰\,Hz,\,n=۳} ۳۰۰=\frac{۳v}{۲\times ۰/۶} \Rightarrow v=۱۲۰\,m/s$$

۵۴- گزینهٔ ۴

درس‌نامه ۱ **شدت صوت در فاصلهٔ r از چشمهٔ صوت:**

$$\overset{\text{شدت صوت }(W/m^۲)}{I}=\frac{\overset{\text{توان چشمهٔ صوتی }(W)}{P_{av}}}{۴\pi \underset{\text{فاصله از چشمهٔ صوت }(m)}{r^۲}}$$

۲ **رابطهٔ اختلاف تراز شدت دو صوت:**

$$\underset{\text{تراز شدت صوت ۱ }(dB)}{\overset{\text{تراز شدت صوت ۲ }(dB)}{\beta_۲-\beta_۱}}=۱۰\log\frac{\overset{\text{شدت صوت ۲ }(W/m^۲)}{I_۲}}{\underset{\text{شدت صوت ۱ }(W/m^۲)}{I_۱}}$$

گام ابتدا نسبت $\frac{I_۲}{I_۱}$ را به دست می‌آوریم:

$$I=\frac{P_{av}}{۴\pi r^۲} \Rightarrow \frac{I_۲}{I_۱}=\frac{P_{av_۲}}{P_{av_۱}}\times(\frac{r_۱}{r_۲})^۲ \xrightarrow[r_۲=\frac{۱}{۲}r_۱]{P_{av_۲}=۲P_{av_۱}} \frac{I_۲}{I_۱}=\frac{۲}{۱}\times(\frac{۱}{\frac{۱}{۲}})^۲ \Rightarrow \frac{I_۲}{I_۱}=۸$$

گام حالا با جای‌گذاری داده‌ها در رابطهٔ زیر، اختلاف تراز شدت دو صوت را محاسبه می‌کنیم:

$$\beta_۲-\beta_۱=۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱} \xrightarrow{\frac{I_۲}{I_۱}=۸} \beta_۲-\beta_۱=۱۰\log ۸$$

$$\xrightarrow[\log ۲=۰/۳]{\log ۸=\log ۲^۳=۳\log ۲} \beta_۲-\beta_۱=۱۰\times ۳\times ۰/۳=۹\,dB$$

بنابراین تراز شدت صوت ۹ dB افزایش می‌یابد.

تله با توجه به این‌که تراز شدت صوت ۹ dB افزایش یافته، ۲ به عنوان تلهٔ تستی مطرح شده تا به اشتباه ۹ برابر را انتخاب کنید.

۵۵- گزینهٔ ۳

شفاف‌سازی با توجه به این‌که دورهٔ تناوب آونگ افزایش یافته است، پس طول آونگ افزایش یافته است.

درس‌نامه **دورهٔ تناوب آونگ ساده:**

$$\underset{\text{دورهٔ تناوب }(s)}{T}=۲\pi\sqrt{\frac{\overset{\text{طول آونگ }(m)}{L}}{\underset{\text{شتاب گرانش }(m/s^۲)}{g}}}$$

گام طول آونگ تغییر کرده است و در اثر این تغییر، دورهٔ تناوب آن افزایش می‌یابد.

طبق رابطهٔ $T=۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$، برای این‌که دورهٔ تناوب آونگ ساده افزایش پیدا کند، باید طول آن افزایش یابد؛ بنابراین طول آونگ افزایش می‌یابد و می‌توانیم بنویسیم:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \frac{T_۲}{T_۱}=\sqrt{\frac{L_۲}{L_۱}} \xrightarrow[L_۲=L_۱+۱۷(cm)]{T_۲=T_۱+۱۲/۵\times۱۰^{-۲}T_۱=\frac{۹}{۸}T_۱} \frac{۹}{۸}=\sqrt{\frac{L_۱+۱۷}{L_۱}}$$

$$\Rightarrow \frac{۸۱}{۶۴}=\frac{L_۱+۱۷}{L_۱} \Rightarrow ۸۱L_۱=۶۴L_۱+۶۴\times ۱۷ \Rightarrow \overset{۱}{\cancel{۱۷}}L_۱=۶۴\times \overset{۱}{\cancel{۱۷}}$$

$$\Rightarrow L_۱=۶۴\,cm=۰/۶۴\,m$$

گام حالا می‌توانیم دورهٔ تناوب آونگ قبل از تغییر طول را به دست بیاوریم:

$$T_۱=۲\pi\sqrt{\frac{L_۱}{g}} \xrightarrow[g=\pi^۲\,m/s^۲]{L_۱=۰/۶۴\,m} T_۱=۲\pi\sqrt{\frac{۰/۶۴}{\pi^۲}}=۲\times۰/۸=۱/۶\,s$$

تله اگر به اشتباه $T_۲$ را محاسبه کنید، به ۴ می‌رسید.

۵۶- گزینهٔ ۱

شفاف‌سازی با توجه به معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر: $x=A\cos\underbrace{۵۰\pi}_{\omega}t$

درس‌نامه ۱ **فرم کلی معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده:**

$$x=\underset{\text{دامنه }(m)}{A}\cos\overset{\text{بسامد زاویه‌ای }(rad/s)}{\omega}t \quad \text{و} \quad \overset{\text{بسامد زاویه‌ای }(rad/s)}{\omega}=\frac{۲\pi}{\underset{\text{دورهٔ تناوب }(s)}{T}}$$

۲ **تندی متوسط:** نسبت مسافت طی‌شده به زمان.

$$s_{av}=\frac{\ell \rightarrow \text{مسافت }(m)}{\Delta t \rightarrow \text{مدت‌زمان }(s)}$$

گام با توجه به معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر، دورهٔ تناوب نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$x=A\cos ۵۰\pi t \xrightarrow{x=A\cos\omega t} \omega=۵۰\pi\,rad/s$$

$$\omega=\frac{۲\pi}{T} \Rightarrow ۵۰\pi=\frac{۲\pi}{T} \Rightarrow T=۰/۰۴\,s$$

گام بازهٔ زمانی داده‌شده را برحسب دورهٔ تناوب به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{t_۲-t_۱}{T} \xrightarrow[T=۰/۰۴\,s]{t_۲-t_۱=۰/۰۲\,s} \frac{\Delta t}{T}=\frac{۰/۰۲}{۰/۰۴}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \Delta t=\frac{T}{۲}$$

گام حالا مسافت طی‌شده در این بازهٔ زمانی را با استفاده از تندی متوسط نوسانگر محاسبه می‌کنیم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=۰/۰۲\,s]{s_{av}=۱/۵\,m/s} \ell=۱/۵\times۰/۰۲=۰/۰۳\,m=۳\,cm$$

گام در آخر با توجه به نکتهٔ زیر، دامنهٔ نوسان را به دست می‌آوریم.

نکته مسافتی که نوسانگر هماهنگ ساده در مدت‌زمان نصف دورهٔ تناوب $(\frac{T}{۲})$ طی می‌کند، برابر با $۲A$ است.

$$\Delta t=\frac{T}{۲} \Rightarrow \ell=۲A \xrightarrow{\ell=۳\,cm} ۲A=۳ \Rightarrow A=۱/۵\,cm$$

۵۷- گزینهٔ ۴

شفاف‌سازی مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا هر یک از ذرات تار یک نوسان کامل انجام دهند، برابر با دورهٔ تناوب موج است.

درس‌نامه دورهٔ تناوب و بسامد معکوس یکدیگرند:

$$\text{دورهٔ تناوب }(s) \leftarrow T=\frac{۱}{\underset{\text{بسامد }(Hz)}{f}}$$

گام با جای‌گذاری داده‌ها در رابطهٔ زیر، بسامد تشدیدی هماهنگ اول تار (f) را به دست می‌آوریم:

$$f=\frac{nv}{۲L} \xrightarrow[L=۵۰\,cm=۰/۵\,m]{n=۱,\,v=۲۵۰\,m/s} f=\frac{۲۵۰}{۲\times۰/۵}=۲۵۰\,Hz$$

گام مدت‌زمانی که هر یک از ذرات تار یک نوسان کامل انجام می‌دهد، برابر با دورهٔ تناوب موج است. بنابراین دورهٔ تناوب موج را با استفاده از بسامد آن محاسبه می‌کنیم:

$$T=\frac{۱}{f} \xrightarrow{f=۲۵۰\,Hz} T=\frac{۱}{۲۵۰}=۰/۰۰۴\,s=۴\,ms$$

۵۸- گزینهٔ ۱

درس‌نامه ۱ **انرژی الکترون در اتم هیدروژن در مدار nام:**

$$E_n=-\frac{۱۳/۶\,eV}{\underset{\text{شمارهٔ مدار الکترون}}{n^۲}}$$

۲ در اتم هیدروژن وقتی که الکترون از یک حالت مانا با انرژی بیشتر (E_U) به یک حالت مانا با انرژی کم‌تر (E_L) می‌رود، یک فوتون گسیل می‌شود. انرژی این فوتون برابر با اختلاف انرژی بین دو مدار اولیه و نهایی است: $E_U-E_L=hf$

همچنین اگر به الکترونی که در یک حالت مانا با انرژی کم‌تر (E_L) قرار دارد، فوتونی با انرژی E_U-E_L بتابانیم، الکترون با دریافت این انرژی به یک حالت مانا با انرژی بیشتر (E_U) می‌رود.

این الکترون وقتی از مدار n به مدار n′ می‌رود، فوتونی با انرژی ۱۲/۷۵ eV گسیل می‌کند،

بنابراین با جای‌گذاری داده‌ها در رابطهٔ زیر می‌توانیم n و n' را پیدا کنیم:

$$E_U - E_L = ۱۲/۷۵\ eV \xrightarrow[E_L=-\frac{E_R}{n'^۲}]{E_U=-\frac{E_R}{n^۲}} -\frac{E_R}{n^۲} - (-\frac{E_R}{n'^۲}) = ۱۲/۷۵$$

$$\xrightarrow{E_R=۱۳/۶\ eV} \frac{۱۳/۶}{n'^۲} - \frac{۱۳/۶}{n^۲} = ۱۲/۷۵$$

$$\Rightarrow ۱۳/۶(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲}) = ۱۲/۷۵ \Rightarrow \frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲} = \frac{\overset{۱۵×۰/۸۵}{\cancel{۱۲/۷۵}}}{\underset{۱۶×۰/۸۵}{\cancel{۱۳/۶}}} = \frac{۱۵}{۱۶}$$

$$\Rightarrow n'=۱\ ,\ n=۴$$

۵۹- گزینه ۲

درس‌نامه **بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها در اثر فوتوالکتریک:**

ثابت پلانک (eV.s)

تندی انتشار امواج الکترومغناطیسی درخلأ (m / s)

$$K_{max} = \frac{hc}{\lambda} - W_0$$

طول موج (m)

تابع کار فلز (eV)

کافی است دو بار از معادلهٔ فوتوالکتریک استفاده کنیم و دستگاه تشکیل بدهیم.

$$K_{max} = \frac{hc}{\lambda} - W_0 \xrightarrow[\lambda_۲=\frac{۱}{۲}\lambda_۱]{W_0=۴\ eV} \begin{cases} K_{max_۱} = \frac{hc}{\lambda_۱} - ۴ \\ ۶K_{max_۱} = \frac{۲hc}{\lambda_۱} - ۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۶K_{max_۱} = -\frac{۶hc}{\lambda_۱} + ۲۴ \\ ۶K_{max_۱} = \frac{۲hc}{\lambda_۱} - ۴ \end{cases} \Rightarrow \frac{\overset{۱}{\cancel{۴}}\,hc}{\lambda_۱} = \overset{۵}{\cancel{۲۰}}$$

$$\xrightarrow[c=۳×۱۰^۸\ m/s]{h=۴×۱۰^{-۱۵}\ eV.s} \frac{۴×۱۰^{-۱۵}×۳×۱۰^۸}{\lambda_۱} = ۵$$

$$\Rightarrow \lambda_۱ = \frac{۱۲}{۵}×۱۰^{-۷}\ m \Rightarrow \lambda_۱ = ۲۴۰×\overset{n}{۱۰^{-۹}}\ m = ۲۴۰\ nm$$

۶۰- گزینه ۴

برای استفاده از اورانیم به عنوان سوخت در نیروگاه‌های هسته‌ای یا استفاده در انفجارهای هسته‌ای، باید فراوانی ایزوتوپ ۲۳۵ را در یک نمونهٔ اورانیم افزایش بدهیم. به فرایند افزایش درصد یا غلظت ایزوتوپ ۲۳۵ در یک نمونه، غنی‌سازی می‌گوییم.

تله ایزوتوپ‌های یک عنصر را نمی‌توانیم به یکدیگر تبدیل کنیم. اگر به این نکته توجه نکنید، ممکن است گزینهٔ نادرست ۲ را انتخاب کنید. *طراح زده به مفهوم!*

مشاوره این سؤال از متن کتاب درسی طراحی شده است. خط‌به‌خط کتاب درسی را بخوانید تا سؤال ساده‌ای مثل این سؤال را از دست ندهید.

۶۱- گزینه ۳

استراتژی ابتدا نسبت بار الکتریکی خازن در دو حالت $(\frac{Q_۲}{Q_۱})$ را محاسبه کنید، سپس نسبت انرژی آن در دو حالت $(\frac{U_۲}{U_۱})$ را به دست بیاورید و در آخر کسر تغییر انرژی خازن را پیدا کنید.

درس‌نامه ۱ **رابطهٔ بار الکتریکی با ظرفیت خازن و اختلاف پتانسیل دو سر آن:**

بار الکتریکی (C)

ظرفیت خازن (F)

$$Q = CV$$

اختلاف پتانسیل دو سر خازن (V)

۲ **انرژی ذخیره‌شده در خازن:**

انرژی (J)

$$U = \frac{۱}{۲}QV$$

گام با توجه به این‌که نسبت اختلاف پتانسیل الکتریکی در دو حالت $(\frac{V_۲}{V_۱})$ معلوم است، نسبت بار الکتریکی خازن در دو حالت $(\frac{Q_۲}{Q_۱})$ را محاسبه می‌کنیم.

$$Q = CV \Rightarrow \frac{Q_۲}{Q_۱} = \frac{C_۲}{C_۱}×\frac{V_۲}{V_۱} \xrightarrow[\frac{V_۲}{V_۱}=\frac{۳}{۴}]{C_۲=C_۱} \frac{Q_۲}{Q_۱} = \frac{۳}{۴}$$

گام حالا نسبت انرژی خازن در حالت دوم به حالت اول را پیدا می‌کنیم.

$$U = \frac{۱}{۲}QV \Rightarrow \frac{U_۲}{U_۱} = \frac{Q_۲}{Q_۱}×\frac{V_۲}{V_۱} \xrightarrow[\frac{V_۲}{V_۱}=\frac{۳}{۴}]{\frac{Q_۲}{Q_۱}=\frac{۳}{۴}} \frac{U_۲}{U_۱} = \frac{۳}{۴}×\frac{۳}{۴} = \frac{۹}{۱۶}$$

گام در آخر با توجه به این‌که انرژی خازن کاهش یافته است، کسر تغییر انرژی آن را به دست می‌آوریم:

$$U_۲ = \frac{۹}{۱۶}U_۱ \Rightarrow \frac{U_۱-U_۲}{U_۱} = \frac{U_۱ - \frac{۹}{۱۶}U_۱}{U_۱} = \frac{\frac{۷}{۱۶}U_۱}{U_۱} = \frac{۷}{۱۶}$$

مشاوره تست‌های مربوط به خازن در اغلب کنکورهای چند سال اخیر به چشم می‌خورند. پس توجه ویژه‌ای به مبحث خازن داشته باشید.

۶۲- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ **اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه از میدان الکتریکی:**

تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی (J)

اختلاف پتانسیل الکتریکی (V)

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$$

بار الکتریکی (C)

حواستون باشه! توی این رابطه باید بار q رو با علامتش بذارین.

۲ اگر ذره‌ای با بار الکتریکی منفی در جهت میدان الکتریکی حرکت کند، انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش و اگر در خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت کند، انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می‌یابد.

انرژی پتانسیل الکتریکی این بار الکتریکی در حرکت از نقطهٔ A تا نقطهٔ B افزایش یافته است. با توجه به این‌که علامت این بار الکتریکی منفی است، پس در جهت میدان الکتریکی حرکت کرده است (رد ۱ و ۲). با جای‌گذاری داده‌ها در رابطهٔ زیر، مقدار $V_B - V_A$ را به دست می‌آوریم:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \xrightarrow[q=-۲۰×۱۰^{-۹}\ C]{\Delta U=۲×۱۰^{-۳}\ J} V_B - V_A = \frac{۲×۱۰^{-۳}}{-۲۰×۱۰^{-۹}} = -۱۰^۵\ V$$

تیزبازی علامت این بار الکتریکی منفی است و انرژی پتانسیل الکتریکی آن در حرکت از نقطهٔ A تا نقطهٔ B افزایش یافته است؛ بنابراین این بار الکتریکی در جهت میدان الکتریکی حرکت کرده است (رد ۱ و ۲). همچنین با توجه به این‌که با حرکت در جهت میدان الکتریکی پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد، پس $V_B < V_A$ و در نتیجه $V_B - V_A < ۰$ است. بنابراین فقط ۴ می‌تواند درست باشد.

۶۳- گزینه ۱

استراتژی ۱ میدان الکتریکی حاصل از بار $q_۱$ در نقطهٔ M را $E_۱$ می‌نامیم و میدان الکتریکی حاصل از بارهای $q_۲$ و $q_۳$ در نقطهٔ M را برحسب $E_۱$ می‌نویسیم، سپس میدان الکتریکی خالص هر سهٔ آن‌ها (E) را به دست می‌آوریم.

۲ در حالتی که بار $q_۲$ حذف شده، میدان الکتریکی خالص (E') حاصل از بارهای $q_۱$ و $q_۳$ در نقطهٔ M را برحسب $E_۱$ می‌نویسیم.

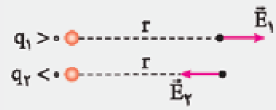
۳ نسبت $\frac{E'}{E}$ را پیدا می‌کنیم.

درس نامه ۱ اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از یک ذرهٔ باردار q در فاصلهٔ r از آن:

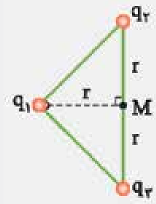
$$E = k\frac{|q|}{r^2}$$

اندازهٔ میدان الکتریکی (N/C) — اندازهٔ بار الکتریکی (C) — ثابت کولن ($\frac{N.m^2}{C^2}$) — فاصله (m)

۲ جهت میدان الکتریکی، از بارهای مثبت رو به خارج و به سوی بارهای منفی است.



۳ در یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است و همچنین میانه و عمودمنصف بر هم منطبق هستند.



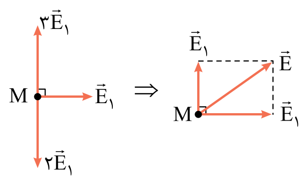
گام میدان الکتریکی حاصل از بار q_1 در نقطهٔ M را E_1 می‌نامیم: $E_1 = k\frac{q_1}{r^2}$

سپس میدان‌های الکتریکی حاصل از بارهای q_2 و q_3 در نقطهٔ M را برحسب E_1 می‌نویسیم:

$$E_2 = k\frac{q_2}{r^2} \xrightarrow{q_2=2q_1} E_2 = 2E_1$$

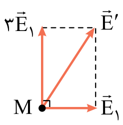
$$E_3 = k\frac{q_3}{r^2} \xrightarrow{q_3=3q_1} E_3 = 3E_1$$

گام میدان الکتریکی خالص ناشی از هر سه بار را در نقطهٔ M به دست می‌آوریم:



$$\Rightarrow E = \sqrt{E_1^2 + E_1^2} = \sqrt{2}E_1$$

گام بعد از حذف بار q_2، میدان الکتریکی خالص ناشی از بارهای q_1 و q_3 در نقطهٔ M را به دست می‌آوریم:



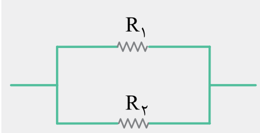
$$E' = \sqrt{E_1^2 + (3E_1)^2} = \sqrt{10E_1^2} = \sqrt{10}E_1$$

گام نسبت $\frac{E'}{E}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{E'}{E} = \frac{\sqrt{10}E_1}{\sqrt{2}E_1} = \sqrt{5}$$

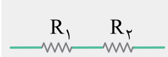
۶۴- گزینهٔ ۲

درس نامه ۱ مقاومت معادل دو مقاومت موازی R_1 و R_2:



$$R_{eq} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

۲ مقاومت معادل دو مقاومت متوالی R_1 و R_2:



$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

۳ تعریف مقاومت الکتریکی: نسبت اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر یک رسانا به جریان الکتریکی عبوری از آن.

$$R = \frac{V}{I}$$

مقاومت‌الکتریکی (Ω) — اختلاف پتانسیل الکتریکی (V) — جریان الکتریکی (A)

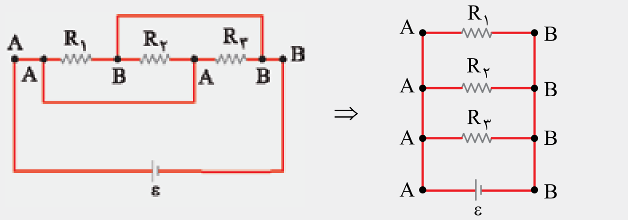
۴ جریان الکتریکی خروجی از باتری:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}$$

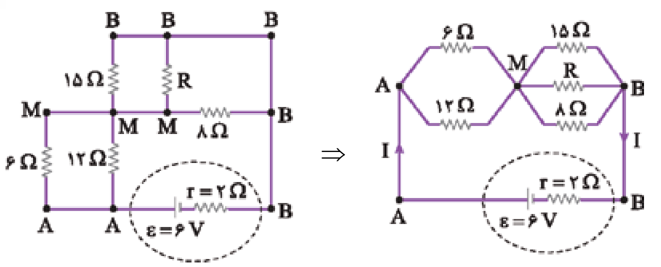
جریان الکتریکی (A) — نیروی محرکهٔ مولد (V) — مقاومت معادل مدار (Ω) — مقاومت درونی مولد (Ω)

۵ ساده‌کردن شکل مدار به روش نام‌گذاری نقاط هم‌پتانسیل:

برای این کار، نقاطی از مدار را که با سیم به یکدیگر وصل شده‌اند، با یک نام مشترک در نظر می‌گیریم، بعد از نام‌گذاری چنین نقاطی از مدار، دو سر مولد یا دو سر مدار را مبنا قرار داده و سایر اجزای مدار را بین نقطه‌های نام‌گذاری‌شده، جای‌گذاری می‌کنیم تا شکل ساده‌تری از مدار به دست بیاید.



گام نقاط هم‌پتانسیل را نام‌گذاری می‌کنیم (شکل الف) و شکل ساده‌تری از مدار را رسم می‌کنیم (شکل ب).



(الف) (ب)

گام مقاومت معادل حاصل از دو مقاومت موازی ۶ اُهمی و ۱۲ اُهمی را محاسبه می‌کنیم:

$$R_{AM} = \frac{6\times12}{6+12} = \frac{72}{18} = 4\,\Omega$$

گام اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌های موازی با اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت معادل آن‌ها برابر است. همچنین از آن‌جا که اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌های ۶ اُهمی و ۸ اُهمی برابر است، می‌توانیم بنویسیم:

$$V_{AM} = V_{MB} \Rightarrow R_{AM}\times I_{AM} = R_{MB}\times I_{MB}$$

$$\xrightarrow[R_{AM}=4\,\Omega]{I_{AM}=I_{MB}=I} R_{MB} = 4\,\Omega$$

بنابراین مقاومت معادل مدار برابر است با: $R_{eq} = R_{AM} + R_{MB} = 4+4 = 8\,\Omega$

گام حالا جریان الکتریکی گذرنده از مولد (I) را محاسبه می‌کنیم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq}+r} \xrightarrow[R_{eq}=8\,\Omega,\,r=2\,\Omega]{\varepsilon=6\,V} I = \frac{6}{8+2} = 0/6\,A$$

در ادامه اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ A و M را با استفاده از رابطهٔ $V = RI$ پیدا می‌کنیم:

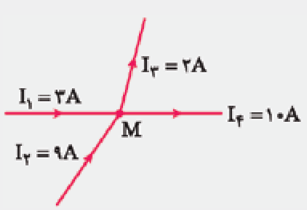
$$V_{AM} = R_{AM}\times I \xrightarrow[I=0/6\,A]{R_{AM}=4\,\Omega} V_{AM} = 4\times0/6 = 2/4\,V$$

گام در آخر جریان گذرنده از مقاومت ۸ اُهمی را به دست می‌آوریم:

$$I_{8\Omega} = \frac{V_{MB}}{8} \xrightarrow{V_{MB}=V_{AM}=2/4\,V} I_{8\Omega} = \frac{2/4}{8} = 0/3\,A$$

۶۵- گزینهٔ ۴

درس نامه ۱ **قاعدهٔ انشعاب:** مجموع جریان‌هایی که به هر نقطهٔ انشعاب (گره) وارد می‌شوند برابر با مجموع جریان‌هایی است که از آن نقطهٔ انشعاب (گره) خارج می‌شوند؛ مثلاً در شکل روبه‌رو، جریان $I_1+I_2=12\,A$ به گره M وارد شده و جریان $I_3+I_4=12\,A$ از آن خارج شده است.



۲ **قانون اختلاف پتانسیل‌ها:** در هر حلقهٔ بسته، مجموع جبری اختلاف پتانسیل‌ها صفر است.

$$\sum V = 0 \Rightarrow \sum\varepsilon - \sum RI = 0$$

در به کار بردن این قانون، به نکات زیر توجه کنید:

۱) یک جهت چرخش اختیاری در نظر می‌گیریم.

۲) جهت جریان را در هر حلقه به دلخواه انتخاب می‌کنیم.

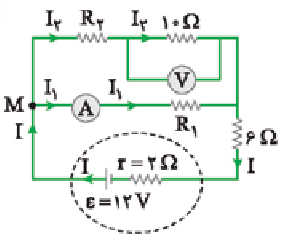
۳) برای نوشتن εها، با توجه به جهت چرخش در مدار، اگر از پایانهٔ مثبت باتری خارج شویم ( )، نیروی محرکهٔ باتری را مثبت $(+\varepsilon)$ و اگر از پایانهٔ منفی باتری خارج شویم ( )، نیروی محرکهٔ باتری را منفی $(-\varepsilon)$ در نظر می‌گیریم.

۴) برای نوشتن RIها، اگر در جهت جریان از مقاومت R عبور کنیم، چون پتانسیل الکتریکی در حال کاهش است، RI را منفی $(-RI)$ و اگر در خلاف جهت جریان از مقاومت R عبور کنیم، چون پتانسیل الکتریکی در حال افزایش است، RI را مثبت $(+RI)$ در نظر می‌گیریم. اگر علامت جریان مثبت به دست آمد، یعنی جهت انتخابی درست است و اگر منفی به دست آمد، فقط جهت جریان در شاخهٔ مورد نظر را برعکس می‌کنیم.

گام با استفاده از رابطهٔ $I=\frac{V}{R}$، جریانی را که از مقاومت ۱۰ اُهمی می‌گذرد، به دست می‌آوریم:

$$I=\frac{V}{R}\xrightarrow[R=۱۰\,\Omega]{V=۵\text{ V}}I_۲=\frac{۵}{۱۰}=۰/۵\text{ A}$$

گام قانون گره (انشعاب) را در نقطهٔ M می‌نویسیم. (حواستون باشه! از شاخه‌ای که ولت‌سنج آرمانی قرار دارد، جریان الکتریکی عبور نمی‌کند.)



$$I=I_۱+I_۲\xrightarrow[I_۲=۰/۵\text{ A}]{I_۱=۰/۲۵\text{ A}}I=۰/۲۵+۰/۵=۰/۷۵\text{ A}$$

گام قانون اختلاف پتانسیل‌ها را در حلقهٔ پایین مدار به کار می‌بریم و در جهت ساعتگرد از اجزای مدار می‌گذریم.

$$-I_۱R_۱-۶I-rI+\varepsilon=۰$$

$$\xrightarrow[r=۲\,\Omega,\varepsilon=۱۲\text{ V}]{I_۱=۰/۲۵\text{ A},I=۰/۷۵\text{ A}}-۰/۲۵R_۱-۶\times۰/۷۵-۲\times۰/۷۵+۱۲=۰$$

$$\Rightarrow ۶=۰/۲۵R_۱\Rightarrow R_۱=۲۴\,\Omega$$

تیزبازی مقاومت $R_۱$ با مجموع مقاومت‌های $R_۲$ و $۱۰\,\Omega$ به طور موازی بسته شده‌اند؛ پس داریم:

$$V_{R_۱}=V_{R_۲}+V_{۱۰\Omega}\Rightarrow V_{R_۱}>V_{۱۰\Omega}\Rightarrow I_۱R_۱>۵$$

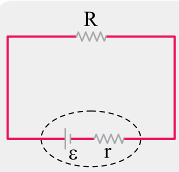
$$\Rightarrow ۰/۲۵R_۱>۵\Rightarrow R_۱>۲۰\,\Omega$$

پس تنها جواب ممکن ۴ است.

۶۶- گزینهٔ ۳

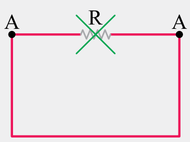
شفاف‌سازی وقتی کلید را می‌بندیم، مقاومت الکتریکی R اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌شود.

درس‌نامه ۱ اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری برابر با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت معادل خارجی است.

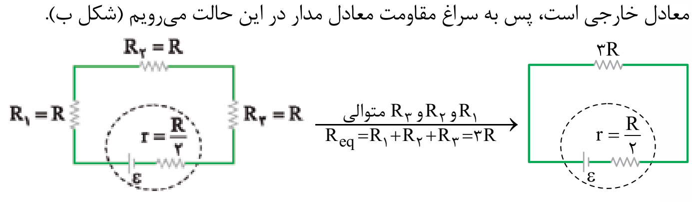


$$V_{\text{باتری}}=V_R$$

۲ **اتصال کوتاه:** اگر دو سر مقاومتی را با یک سیم بدون مقاومت به هم وصل کنیم، پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت الکتریکی یکسان شده و در نتیجه اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن صفر می‌شود. در این حالت مقاومت الکتریکی اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌گردد.



گام در ابتدا کلید باز است و مقاومت $R_۲$ در مدار حضور دارد (شکل الف). با توجه به این‌که اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری برابر با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت معادل خارجی است، پس به سراغ مقاومت معادل مدار در این حالت می‌رویم (شکل ب).



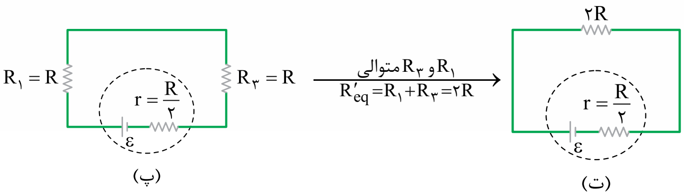
(الف) (ب)

گام حالا جریان خروجی از باتری را محاسبه می‌کنیم تا بتوانیم با استفاده از آن، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت ۳R را که برابر با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری است، به دست بیاوریم.

$$I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}\xrightarrow[r=\frac{R}{۲}]{R_{eq}=۳R}I=\frac{\varepsilon}{۳R+\frac{R}{۲}}=\frac{۲\varepsilon}{۷R}$$

و $$V_{\text{باتری}}=R_{eq}I\xrightarrow[I=\frac{۲\varepsilon}{۷R}]{R_{eq}=۳R}V_{\text{باتری}}=(۳R)(\frac{۲\varepsilon}{۷R})=\frac{۶}{۷}\varepsilon$$

گام در حالت دوم، وقتی کلید را می‌بندیم، پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت $R_۲$ یکسان شده و در نتیجه اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن صفر می‌شود. در این حالت مقاومت $R_۲$ اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌شود (شکل پ). مانند گام اول، به سراغ مقاومت معادل مدار در این حالت می‌رویم (شکل ت).



(پ) (ت)

گام حالا جریان خروجی از باتری در حالت دوم را محاسبه می‌کنیم تا بتوانیم با استفاده از آن، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت ۲R را که برابر با اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری است، به دست بیاوریم.

$$I'=\frac{\varepsilon}{R'_{eq}+r}\xrightarrow[r=\frac{R}{۲}]{R'_{eq}=۲R}I'=\frac{\varepsilon}{۲R+\frac{R}{۲}}=\frac{۲\varepsilon}{۵R}$$

و $$V'_{\text{باتری}}=R'_{eq}I'\xrightarrow[I'=\frac{۲\varepsilon}{۵R}]{R'_{eq}=۲R}V'_{\text{باتری}}=(۲R)(\frac{۲\varepsilon}{۵R})=\frac{۴}{۵}\varepsilon$$

گام در آخر خواستهٔ سؤال یعنی نسبت $\frac{V'_{\text{باتری}}}{V_{\text{باتری}}}$ را محاسبه می‌کنیم و تمام!

$$\frac{V'_{\text{باتری}}}{V_{\text{باتری}}}=\frac{\frac{۴}{۵}\varepsilon}{\frac{۶}{۷}\varepsilon}=\frac{۱۴}{۱۵}$$

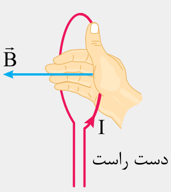
۶۷- گزینهٔ ۱

درس‌نامه ۱ بزرگی میدان مغناطیسی در مرکز پیچهٔ مسطح:

$$B=\frac{\mu_۰ NI}{۲R}$$

تراوایی مغناطیسی خلأ $(\frac{T.m}{A})$ ← $\mu_۰$؛ تعداد حلقه‌ها ← N؛ جریان الکتریکی (A) ← I؛ شعاع (m) ← R

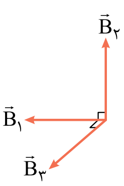
۲ برای تشخیص جهت میدان مغناطیسی در اطراف حلقهٔ حامل جریان از قاعدهٔ دست راست استفاده می‌کنیم. طبق این قاعده، اگر انگشت شست دست راست را در جهت جریان قرار بدهیم، جهت خمشدن چهار انگشت دست راست، جهت میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد.



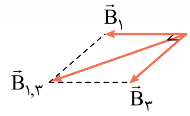
گام با توجه به این‌که جریان عبوری از هر حلقه و شعاع آن‌ها با یکدیگر یکسان است، پس میدان مغناطیسی حاصل از هر حلقه در مرکز حلقه‌ها (نقطهٔ O) نیز یکسان است و می‌توانیم بنویسیم:

$$B_۱=B_۲=B_۳=B=\frac{\mu_۰NI}{۲R}=\frac{۱۲\times۱۰^{-۷}\times۱\times۰/۵}{۲\times(۰/۱۵)}=۲\times۱۰^{-۶}\text{ T}$$

گام طبق قاعدهٔ دست راست، اگر انگشت شست دست راست را در جهت جریان قرار بدهیم، جهت خمشدن چهار انگشت جهت میدان مغناطیسی در مرکز حلقه را نشان می‌دهد. جهت میدان مغناطیسی ناشی از سه حلقه را به دست می‌آوریم.

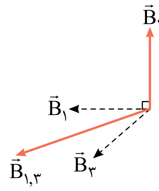


گام برایند میدان مغناطیسی ناشی از $\vec{B}_۱$ و $\vec{B}_۲$ را محاسبه می‌کنیم.



$$B_{۱,۲}=\sqrt{B_۱^۲+B_۲^۲}\xrightarrow{B_۱=B_۲=B}B_{۱,۲}=B\sqrt{۲}$$
$$\xrightarrow{B=۲\times۱۰^{-۶}\,T}B_{۱,۲}=۲\sqrt{۲}\times۱۰^{-۶}\,T$$

گام $\vec{B}_{۱,۲}$ بر $\vec{B}_۲$ عمود است، پس برایند میدان مغناطیسی ناشی از $\vec{B}_{۱,۲}$ و $\vec{B}_۲$ را به دست می‌آوریم:

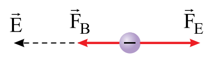


$$B_T=\sqrt{B_{۱,۲}^۲+B_۲^۲}=\sqrt{(۲\sqrt{۲}\times۱۰^{-۶})^۲+(۲\times۱۰^{-۶})^۲}$$
$$\Rightarrow B_T=۲\times۱۰^{-۶}\sqrt{(\sqrt{۲})^۲+(۱)^۲}=۲\sqrt{۳}\times۱۰^{-۶}\,T$$

۶۸- گزینه ۴

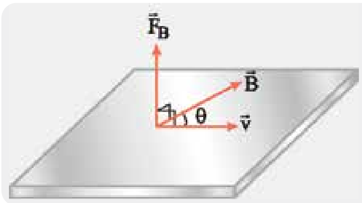
گام برای این‌که الکترون بدون انحراف در مسیر حرکت کند، باید نیرویی که از طرف میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی به الکترون وارد می‌شود، با هم برابر و در خلاف جهت هم باشند.

ذرهٔ باردار و نیروهای واردشده را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم (چون ذرهٔ باردار منفی است، پس جهت نیروی الکتریکی وارد بر ذره، در خلاف جهت میدان الکتریکی است.)

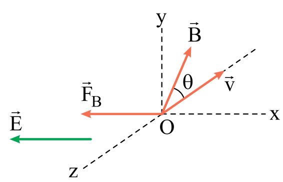


گام

نکته نیرویی که از طرف میدان مغناطیسی بر ذرهٔ باردار وارد می‌شود، هم بر راستای حرکت ذره و هم بر میدان مغناطیسی عمود است.



با توجه به نکتهٔ بالا، نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون ($\vec{F}_B$) بر صفحه‌ای که بردار $\vec{v}$ و بردار $\vec{B}$ تشکیل می‌دهند، عمود است؛ بنابراین میدان مغناطیسی ($\vec{B}$) و راستای حرکت ($\vec{v}$) باید به صورت روبه‌رو در صفحهٔ yoz باشند تا نیروی مغناطیسی به سمت چپ باشد.



همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، میدان الکتریکی عمود بر راستای حرکت است ($\vec{E}$ در خلاف جهت محور x و $\vec{v}$ در صفحهٔ yoz است). اما $\vec{v}$ و $\vec{B}$ هر زاویهٔ دلخواهی به غیر از صفر و ۱۸۰° می‌توانند داشته باشند.

۶۹- گزینه ۱

شفاف‌سازی عدد ۱۵/۷ به ما آلارم می‌دهد که مقدار π را باید ۳/۱۴ در نظر بگیریم.

درس‌نامه ضریب القاوری سیم‌لولهٔ آرمانی و بدون هسته:

$$L=\frac{\mu_۰N^۲A}{\ell}$$

ضریب القاوری (H) ← L ؛ تعداد دور ← N ؛ سطح مقطع سیم‌لوله ($m^۲$) ← A ؛ طول سیم‌لوله (m) ← ℓ

کافیست داده‌ها را در رابطهٔ زیر جای‌گذاری کنیم و ضریب القاوری سیم‌لوله را به دست بیاوریم *(تبدیل واحد یادت نره!)*

$$L=\frac{\mu_۰N^۲A}{\ell}\xrightarrow[\mu_۰=۴\pi\times۱۰^{-۷}\frac{T.m}{A},\ \ell=۱۵/۷\times۱۰^{-۲}\,m]{N=۱۰۰۰,\ A=۸\times۱۰^{-۴}\,m^۲}$$

$$L=\frac{۴\pi\times۱۰^{-۷}\times(۱۰۰۰)^۲\times۸\times۱۰^{-۴}}{۱۵/۷\times۱۰^{-۲}}$$

$$=\frac{۴\times\overset{۲}{\cancel{۳/۱۴}}\times۱۰^{-۷}\times۱۰^۶\times۸\times۱۰^{-۴}}{\underset{۱}{\cancel{۱۵/۷}}\times۱۰^{-۱}}=۶/۴\times\overset{m}{۱۰^{-۳}}\,H=۶/۴\,mH$$

۷۰- گزینه ۲

درس‌نامه نیروی محرکهٔ القایی متوسط برای پیچه یا سیم‌لوله‌ای که از N دور مشابه تشکیل شده است:

$$\varepsilon_{av}=-N\frac{\Delta BA\cos\theta}{\Delta t}$$

نیروی محرکهٔ القایی متوسط (V) ← ε_{av} ؛ تعداد دور ← N ؛ تغییر میدان مغناطیسی (T) ← ΔB ؛ مساحت حلقه ($m^۲$) ← A ؛ مدت‌زمان (s) ← Δt ؛ زاویهٔ بین بردار میدان مغناطیسی و نیم‌خط عمود بر سطح حلقه ← θ

برای تبدیل گاوس به تسلا (و برعکس) به صورت مقابل عمل می‌کنیم: $G\underset{\times۱۰^۴}{\overset{\div۱۰^۴}{\rightleftarrows}}T$

کافیست داده‌ها را در رابطهٔ زیر جای‌گذاری کنیم:

$$\varepsilon_{av}=-N\frac{\Delta BA\cos\theta}{\Delta t}\xrightarrow[A=\pi r^۲=۳/۱۴\times۱۰^{-۲}\,m^۲,\ \theta=۹۰^\circ-۳۰^\circ=۶۰^\circ]{N=۱,\ \Delta B=-۶۰۰۰\times۱۰^{-۴}\,T,\ \Delta t=۱۵/۷\times۱۰^{-۳}\,s}$$

$$\varepsilon_{av}=-۱\times\frac{(-۶۰۰۰\times۱۰^{-۴})\times\overset{۰/۲}{\cancel{۳/۱۴}}\times۱۰^{-۲}\times\overset{\frac{۱}{۲}}{\cancel{\cos۶۰^\circ}}}{\underset{۱}{\cancel{۱۵/۷}}\times۱۰^{-۳}}=۰/۶\,V$$

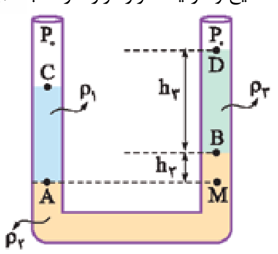
تله اگر به اشتباه θ را ۳۰° در نظر بگیرید، به گزینهٔ نادرست ۱ می‌رسید.

۷۱- گزینه ۱

گام نقاط C و D در سطح آزاد مایع‌ها هستند و فشار این دو نقطه یکسان و برابر با $P_۰$ است.

$P_C=P_D=P_۰$

گام فشار در نقاط A و M، به دلیل این‌که در یک مایع و در یک تراز قرار دارند، با هم برابر است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:



$$P_A=P_M\Rightarrow P_A=P_B+\rho_۲gh_۲$$
$$\Rightarrow P_A>P_B$$

گام فشار در نقطهٔ B ناشی از فشار هوا و مایع $\rho_۲$ است؛ بنابراین داریم:

$$P_B=P_۰+\rho_۲gh_۲\xrightarrow{P_۰=P_C}P_B=P_C+\rho_۲gh_۲\Rightarrow P_B>P_C$$

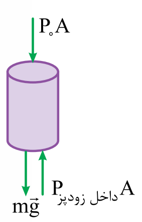
پس در نتیجه $P_A>P_B>P_C=P_D$ است.

تیزبازی با توجه به این‌که $P_C=P_D=P_۰$ است، ۲ رد می‌شود، چون $P_C>P_D$ نیست. همچنین ۳ و ۴ هم رد می‌شوند؛ چون در این دو گزینه، با توجه به این‌که $P_C=P_D$ است، $P_A=P_B$ می‌شود که درست نیست.

۷۲- گزینه ۴

درس‌نامه به اختلاف فشار مطلق (P) و فشار جو ($P_۰$)، فشار پیمانه‌ای می‌گوییم و آن را با P_g نشان می‌دهیم. $P_g=P-P_۰$

شکل مقابل وضعیت وزنه را که روی روزنه قرار دارد، نشان می‌دهد. برای این‌که وزنه در تعادل باشد، باید برایند نیروهای وارد بر وزنه صفر باشد؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم: $P_۰A+mg=P_{\text{داخل زودپز}}A$



$$\Rightarrow P_۰+\frac{mg}{A}=P_{\text{داخل زودپز}}\Rightarrow\frac{mg}{A}=\underbrace{P_{\text{داخل زودپز}}-P_۰}_{P_g=\text{فشار پیمانه‌ای بخار داخل زودپز}}$$

$$\Rightarrow P_g=\frac{mg}{A}\Rightarrow ۱۰^۵=\frac{m\times۱۰}{۵\times۱۰^{-۶}}\Rightarrow m=۵\times۱۰^{-۲}\,kg=۵۰\,g$$

مشاوره تمام تمرین‌ها، مثال‌ها، شکل‌ها و ... کتاب درسی را بخوانید. این سؤال مشابه تمرین کتاب درسی است.

۷۳- گزینهٔ ۱

درس نامه ۱ **کار نیروی ثابت F:**

$$W = \underset{\text{نیرو (N)}}{F}\,\overset{\text{جابه‌جایی (m)}}{d}\cos\underset{\text{زاویهٔ بین نیرو و جابه‌جایی}}{\theta}$$

۲ **قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی:** کار کل وارد بر یک جسم در یک جابه‌جایی معین برابر با تغییر انرژی جنبشی آن است. $W_t = \Delta K$

با استفاده از قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی می‌توانیم بنویسیم (کار نیروی وزن و نیروی عمودی سطح چون بر جابه‌جایی عمود هستند، صفر است):

$$W_t = \Delta K \Rightarrow \cancelto{0}{W_{mg}} + \cancelto{0}{W_{F_N}} + W_F + W_{f_k} = \Delta K$$

$$\Rightarrow Fd\cos37^\circ + f_k d\cos180^\circ = \Delta K$$

$$\Rightarrow 6000\times5\times0/8 + 4000\times5\times(-1) = \Delta K$$

$$\Rightarrow \Delta K = 24000 - 20000 = 4000\,J$$

۷۴- گزینهٔ ۴

درس نامه طبق قانون پایستگی انرژی، جمع جبری گرماهای مبادله‌شده تا رسیدن به حالت تعادل، برابر با صفر است.

$$Q_1+Q_2+Q_3=0 \Rightarrow m_1c_1(\theta-\theta_1)+m_2c_2(\theta-\theta_2)+m_3c_3(\theta-\theta_3)=0$$

طبق قانون پایستگی انرژی، جمع جبری گرماهای مبادله‌شده تا رسیدن به حالت تعادل، برابر با صفر است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم: $Q_1+Q_2+Q_3=0$

$$\Rightarrow m_{\text{آب}}c_{\text{آب}}(\theta-\theta_{\text{آب}})+m'_{\text{آب}}c_{\text{آب}}(\theta-\theta'_{\text{آب}})+m_{\text{ظرف}}c_{\text{ظرف}}(\theta-\theta_{\text{ظرف}})=0$$

$$\Rightarrow 80\times10^{-3}\times4200(\theta-20)+20\times10^{-3}\times4200(\theta-80)$$

$$+300\times10^{-3}\times400(\theta-32)=0$$

$$\xrightarrow{\div 4000\times10^{-3}} 84(\theta-20)+21(\theta-80)+30(\theta-32)=0$$

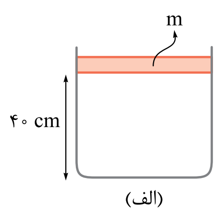
$$\Rightarrow 84\theta-1680+21\theta-1680+30\theta-960=0 \Rightarrow 135\theta=4320 \Rightarrow \theta=32^\circ C$$

۷۵- گزینهٔ ۳

درس نامه با توجه به معادلهٔ حالت گاز کامل $(PV=nRT)$، برای مقایسهٔ دو حالت مختلف، رابطهٔ کلی مقابل را در نظر بگیرید و هر کمیتی را که در سؤال ثابت فرض شده بود، از طرفین این رابطه حذف کنید.

$$\frac{\overset{\text{فشار}}{P_1}\overset{\text{حجم}}{V_1}}{\underset{\text{تعداد مول}}{n_1}\underset{\text{دما (K)}}{T_1}}=\frac{P_2V_2}{n_2T_2}$$

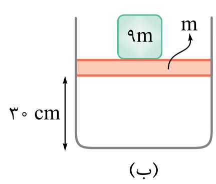
گام در حالت اول، فشار گاز زیر پیستون برابر با مجموع فشار هوا و فشار ناشی از وزن پیستون قرارگرفته در بالای گاز است. با توجه به شکل (الف)، فشار گاز و حجم گاز در حالت اول را به دست می‌آوریم (جرم پیستون را m فرض می‌کنیم).



(الف)

$$P_1=\frac{mg}{A}+P_0\ ,\ V_1=40\times A=40A$$

گام فشار گاز و حجم گاز در حالت دوم را که وزنه‌ای با جرم ۹ برابر جرم پیستون روی آن قرار داده‌ایم، به دست می‌آوریم (شکل ب).



(ب)

$$P_2=\frac{(9m+m)g}{A}+P_0$$

$$=\frac{10mg}{A}+P_0\ ,\ V_2=A\times30=30A$$

گام حالا با جای‌گذاری داده‌ها در رابطهٔ زیر، P_0 را به دست می‌آوریم:

$$\frac{P_1V_1}{n_1T_1}=\frac{P_2V_2}{n_2T_2}\xrightarrow[T_1=T_2]{n_1=n_2}P_1V_1=P_2V_2\Rightarrow(P_0+\frac{mg}{A})\times\cancelto{4}{40A}$$

$$=(P_0+\frac{10mg}{A})\times\cancelto{3}{30A}\Rightarrow 4P_0+\frac{4mg}{A}=3P_0+\frac{30mg}{A}\Rightarrow P_0=\frac{26mg}{A}$$

$$\Rightarrow P_0=\frac{26\times1/75\times10}{50\times10^{-4}}=9/1\times10^4\,Pa$$

شیمی

۷۶- گزینهٔ ۲

نکته

تعیین تعداد الکترون‌های ظرفیتی اتم‌ها

- اگر آرایش الکترونی به زیرلایهٔ s ختم شود: الکترون‌های ظرفیت = (الکترون‌های زیرلایهٔ $(n-1)d$ در صورت وجود) + (الکترون‌های زیرلایهٔ ns)
- اگر آرایش الکترونی به زیرلایهٔ p ختم شود: الکترون‌های ظرفیت = (مجموع الکترون‌های آخرین زیرلایه‌های s (ns) و p (np))

گام ابتدا آرایش الکترون‌های ظرفیتی اتم X و عدد اتمی آن را به دست می‌آوریم: بیست و چهارمین عنصر جدول تناوبی، کروم ($_{24}Cr$) است که آرایش الکترون‌های ظرفیت آن به صورت $3d^5 4s^1$ است؛ بنابراین عنصر X فلزی واسطه است و آرایش الکترونی آن به $(n-1)\,d^5 ns^1$ ختم می‌شود.

$$_{24}Cr:[_{18}Ar]\underbrace{3d^5 4s^1}_{\text{الکترون‌های ظرفیتی}}$$

روش عنصر X، فلزی واسطه بوده و بنابراین یون پایدار آن کاتیون است و طبق اطلاعات داده‌شده در سؤال با تبدیل‌شدن به کاتیون، شمار الکترون‌های آن با شمار الکترون‌های نخستین عنصر واسطهٔ دورهٔ پنجم جدول برابر می‌شود؛ بنابراین عنصر X در دورهٔ پنجم قرار دارد $(n=5)$ و آرایش الکترونی آن به $4d^5 5s^1$ ختم شده و عدد اتمی آن ۴۲ است:

$$_{42}X:[_{36}Kr]\underbrace{4d^5 5s^1}_{\text{الکترون‌های ظرفیتی}}$$

روش نخستین عنصر واسطهٔ دورهٔ پنجم (Y)، در گروه ۳ قرار دارد و عدد اتمی آن، ۳ واحد بیشتر از گاز نجیب دورهٔ چهارم ($_{36}Kr$) است؛ بنابراین عدد اتمی آن ۳۹ = ۳ + ۳۶ است. از طرفی عنصر X همانند عنصر $_{24}Cr$ در گروه ۶ جدول قرار دارد که با توجه به اطلاعات داده‌شده با از دست دادن الکترون و تبدیل‌شدن به کاتیون، شمار الکترون‌های آن به ۳۹ رسیده است؛ بنابراین:

$$\text{عدد اتمی عنصر X}: \underbrace{39}_{\text{عدد اتمی Y (نخستین عنصر واسطهٔ دورهٔ ۵)}}+\underbrace{3}_{\text{اختلاف شمارهٔ گروه دو عنصر X و Y}}=42$$

گام به دست آوردن شمار نوترون‌های اتم $^{96}_{42}X$: شمار نوترون‌ها = ۹۶ − ۴۲ = ۵۴

۷۷- گزینهٔ ۳

طیف نشری خطی، وسیلهٔ شناسایی عنصرها است، دقیقاً مثل بارکد یا خط نماد روی بسته‌های مواد غذایی و کالاها! (که اطلاعاتی مانند نوع کالا، قیمت، تاریخ انقضا و ... در آن درج شده است.) یعنی طیف نشری خطی و خط نماد، از نظر این‌که وسیلهٔ شناسایی هستند، به هم شبیه‌اند ولی طیف نشری خطی عنصرها، کاربردی در خط نماد کالاها ندارد و در آن استفاده نشده است!

تله در حاشیهٔ یکی از صفحه‌های فصل ۱ کتاب درسی شیمی دهم می‌خوانیم که کاربرد طیف‌های نشری خطی از برخی جنبه‌ها مانند کاربرد خط نماد (بارکد) روی جعبه یا بستهٔ مواد غذایی و کالاهاست؛ بنابراین طیف نشری خطی و خط نماد روی بستهٔ کالاها فقط از نظر کاربرد، شبیه هم‌اند. طراح در این عبارت با جابه‌جایی کلمات، مفهوم جملهٔ کتاب درسی را به شکل هوشمندانه‌ای تغییر داده و گفته که یکی از کاربردهای طیف نشری خطی در «خط نماد» روی بستهٔ کالاهاست که *غلطه!* و باید خیلی دقیق باشی تا تو دام این عبارت نیفتی!

بررسی سایر گزینه‌ها: ① هر عنصر (چه فلز، چه نافلز و چه شبه‌فلز) طیف نشری خطی ویژهٔ خود را دارد؛ یعنی تعداد خطوط و محل قرارگیری آن‌ها (طول موج خط‌های طیفی) در طیف نشری خطی برای هر عنصر اختصاصی است و مانند اثر انگشت می‌توان از این طیف‌ها برای شناسایی عنصرها استفاده کرد. ② در ناحیهٔ مرئی طیف نشری خطی هر یک از اتم‌های H و Li، ۴ خط یا نوار رنگی وجود دارد. ④ رنگ شعلهٔ نمک‌ها به دلیل وجود عنصر فلزی در آن‌هاست، بنابراین با استفاده از تغییر رنگ شعله، می‌توان به وجود عنصر **فلزی** (نه نافلزی!) در آن پی برد.

۷۸- گزینه ۴

نکته تعیین شمارهٔ دوره و گروه عنصرها با استفاده از عدد اتمی گازهای نجیب:

تعیین شمارهٔ دوره: کافی است عدد اتمی عنصر مورد نظر را بین عدد اتمی دو گاز نجیب قرار دهیم، شمارهٔ دورهٔ عنصر با شمارهٔ دورهٔ گاز نجیب بعد از آن یکسان است.

عدد اتمی گازهای نجیب:	۲	۱۰	۱۸	۳۶	۵۴	۸۶	۱۱۸
	دورهٔ ۱	دورهٔ ۲	دورهٔ ۳	دورهٔ ۴	دورهٔ ۵	دورهٔ ۶	دورهٔ ۷

تعیین شمارهٔ گروه: برای تعیین شمارهٔ گروه:

① اگر عدد اتمی عنصر مورد نظر یک یا دو واحد بیشتر از عدد اتمی یکی از گازهای نجیب باشد، شمارهٔ گروه عنصر به ترتیب برابر ۱ یا ۲ است:

مثال: $_{19}X : 19-\underset{\text{عدد اتمی } _{18}Ar}{18}=1 \Rightarrow$ شمارهٔ گروه عنصر $_{19}X$ $=1$

② عنصرهایی که در دو ردیف در پایین جدول قرار دارند (عنصرهای ۵۷ تا ۷۰ و ۸۹ تا ۱۰۲ جدول) را می‌توان متعلق به گروه ۳ دانست.

③ برای بقیهٔ عنصرها که عدد اتمی آن‌ها بیش از ۲ واحد از عدد اتمی گاز نجیب قبل از خود بیشتر است، باید اختلاف عدد اتمی عنصر و گاز نجیب **هم‌دوره‌اش** را از عدد ۱۸ کم کنیم:

مثال: $_{47}A \Rightarrow$ شمارهٔ گروه $=18-(\underset{\text{گاز نجیب هم‌دوره}}{54}-\underset{\text{عدد اتمی عنصر}}{47})=11$

گام ۱ ابتدا شمارهٔ دوره و گروه عنصر X در جدول دوره‌ای را به دست می‌آوریم:

تعیین شمارهٔ دورهٔ عنصر X: عنصرهایی با عددهای اتمی ۱۹ تا ۳۶ در دورهٔ چهارم قرار دارند؛ بنابراین عنصر X مانند $_{28}Ni$ متعلق به دورهٔ چهارم است.

تعیین شمارهٔ گروه عنصر X: عنصر X با نخستین عنصر ساخت بشر، یعنی تکنسیم با عدد اتمی ۴۳ ($_{43}Tc$) هم‌گروه است و هر دو متعلق به گروه ۷ جدول دوره‌ای‌اند.

$_{43}Tc \Rightarrow$ شمارهٔ گروه $=18-(\underset{\text{گاز نجیب هم‌دوره}}{54}-\underset{\text{عدد اتمی تکنسیم}}{43})=18-11=7$

گام ۲ با توجه به شمارهٔ دوره و گروه عنصر X، آرایش الکترونی آن را می‌نویسیم. عنصر X در دورهٔ چهارم و گروه ۷ قرار دارد، بنابراین آرایش الکترونی آن به $3d^5 4s^2$ ختم شده و همان منگنز ($_{25}Mn$) است: $X:\ _{25}Mn:[_{18}Ar]\,3d^5 4s^2$

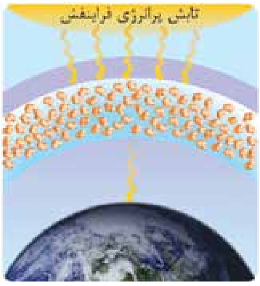
گام ۳ با توجه به فرمول‌های شیمیایی داده‌شده در گزینه‌ها، بار کاتیون X^{n+} را تشخیص داده و آرایش الکترونی آن را می‌نویسیم. با توجه به بار یون‌های O^{2-}، Cl^- و فرمول‌های داده‌شده در گزینه‌ها، X می‌تواند دو نوع کاتیون دو بار مثبت (X^{2+}) و سه بار مثبت (X^{3+}) تشکیل دهد. $X:\ _{25}Mn:[_{18}Ar]\,3d^5 4s^2$

$$X_2O_3 \Rightarrow X^{3+}:[_{18}Ar]\,3d^4$$

$$XCl_2 \Rightarrow X^{2+}:[_{18}Ar]\,3d^5$$

تیزبازی با یه نگاه به گزینه‌ها می‌شه فهمید که عنصر X یک فلز واسطه است و از آن‌جا که در آرایش الکترونی کاتیون فلزهای واسطه، زیرلایهٔ ns وجود ندارد، ① و ② سریع حذف می‌شن. از اون‌جایی که عنصر X مانند $_{43}Tc$ متعلق به گروه ۷ جدوله، آرایش الکترونی آن به $(n-1)d^5ns^2$ و با توجه به دو گزینهٔ باقی‌مانده آرایش الکترونی کاتیون‌های X^{2+} و X^{3+} آن به ترتیب به $(n-1)d^5$ و $(n-1)d^4$ ختم می‌شه، پس جواب می‌شه ④ و تمام!

۷۹- گزینه ۱



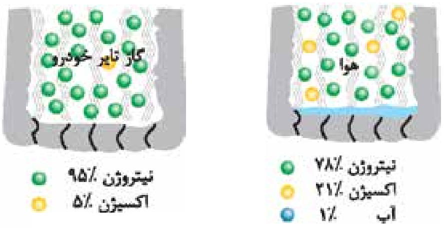
بررسی گزینه‌ها: ① با توجه به شکلی که در فصل ۲ کتاب درسی شیمی دهم در رابطه با لایهٔ اوزون آورده شده است، از هر ۵ پرتو فرابنفش، ۴تای آن‌ها توسط اوزون جذب شده و فقط یکی از آن‌ها می‌تواند فرار کند؛ پس می‌شه گفت حدود $\frac{4}{5}\times100=80$ درصد تابش فرابنفش توسط لایهٔ اوزون جذب می‌شود که *بیشتر از ۷۵ درصده!*

② در فرایند هابر (تهیهٔ NH_3 از گازهای N_2 و H_2)، باید فراورده (آمونیاک) را از مخلوط جدا کنیم که برای این کار (مایع‌شدن آمونیاک)، دما را باید کمی پایین‌تر از نقطهٔ جوش آمونیاک (حدود $-34\ ^\circ C$) بیاوریم. دقت کنید که در این فرایند دما را به هیچ وجه نباید پایین‌تر از دمای جوش نیتروژن ($-196\ ^\circ C$) و هیدروژن ($-253\ ^\circ C$) آورد، چون *این‌طوری* این گازها نیز مایع شده و با آمونیاک مایع *قاطی‌پاتی!* می‌شوند.

نکته مقایسهٔ نقطهٔ جوش مواد شرکت‌کننده در واکنش تولید آمونیاک *این‌جوریاست*:

نقطهٔ جوش: $\underset{-34\ ^\circ C}{NH_3} > \underset{-196\ ^\circ C}{N_2} > \underset{-253\ ^\circ C}{H_2}$

③ نسبت درصد گاز نیتروژن در هوا به درصد این گاز در تایر خودرو حدود $\frac{78}{95}$ است که قطعاً با ۰/۹۵ برابر نیست.



④ گاز نیتروژن (N_2)، فراوان‌ترین جزء سازندهٔ هواکره است که واکنش‌پذیری ناچیزی دارد، اما در صنعت، مواد مختلفی از آن تهیه می‌کنند.

مشاوره ① و ③، تحلیل‌های عددی از شکل‌های کتاب درسی است که تاکنون به این صورت در کنکور مطرح نشده بودن، متأسفانه طراحان کنکور برای پررنگ‌کردن اهمیت کتاب درسی، رو به طرح این عبارت‌های غیراستاندارد برده‌اند! *چی بگیم*؟! از اهمیت کتاب درسی غافل نشید.

۸۰- گزینه ۴

ابتدا معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش‌ها را می‌نویسیم:

$$\text{I)}\ N_2+O_2 \rightarrow 2NO$$

$$\text{II)}\ 2NO+O_2 \rightarrow 2NO_2$$

روش ۲ استفاده از کسرهای تناسب:

ضریب مادهٔ مشترک (NO)، در دو واکنش برابر است (نیازی به یکسان‌سازی ضریب این ماده در واکنش‌ها نداریم)؛ بنابراین می‌تونیم به طور مستقیم بین واکنش‌دهنده‌های واکنش (I) و فراوردهٔ واکنش (II)، برای قسمت دوم سؤال، روابط استوکیومتری بنویسیم:

$$1\,mol\,N_2, 1\,mol\,O_2 \sim 2\,mol\,NO \sim 2\,mol\,NO_2$$

$$\underset{O_2-N_2}{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}}=\underset{NO}{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}}=\underset{NO_2}{\frac{\text{حجم}}{\text{حجم مولی}\times\text{ضریب}}}$$

نکته در مسائل استوکیومتری واکنش، در مواردی که به جای جرم یک ماده، مجموع یا تفاوت جرم دو ماده خواسته شده یا داده می‌شود، کسر تناسب مربوط به جرم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}} \nearrow \frac{\text{مجموع جرم دو ماده}}{(\text{جرم مولی مادهٔ ۱}\times\text{ضریب مادهٔ ۱})+(\text{جرم مولی مادهٔ ۲}\times\text{ضریب مادهٔ ۲})}$$

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}} \searrow \frac{\text{تفاوت جرم دو ماده}}{(\text{جرم مولی مادهٔ ۱}\times\text{ضریب مادهٔ ۱})-(\text{جرم مولی مادهٔ ۲}\times\text{ضریب مادهٔ ۲})}$$

$$\Rightarrow \frac{0/125}{\underbrace{(1\times 32)}_{O_2}-\underbrace{(1\times 28)}_{N_2}}=\frac{x}{\underbrace{2\times 30}_{NO}}=\frac{x'}{\underbrace{2\times 22/4}_{NO_2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\overbrace{0/125}^{\frac{1}{8}}}{\underbrace{4}_{\frac{1}{32}}}}=\frac{x}{2\times 30}=\frac{x'}{2\times 22/4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\cancel{2}^{1}\times \cancel{30}^{15}}{\cancel{32}_{8}}=\dfrac{15}{8}=\dfrac{16}{8}-\dfrac{1}{8}=2-0/125=1/875\ g\ NO \\[2ex] x'=\dfrac{\cancel{2}^{1}\times 22/4}{\cancel{32}_{16}}=\dfrac{22/4}{16}=1/4\ L\ NO_2 \end{cases}$$

روش ۲ استفاده از کسر تبدیل: برای قسمت اول سؤال با توجه به معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش (I)، به ازای واکنش ۱ مول یا ۲۸ گرم N_2 با ۱ مول یا ۳۲ گرم O_2، ۲ مول گاز NO حاصل می‌شود؛ یعنی اگر تفاوت جرم دو گاز N_2 و O_2 در آغاز واکنش برابر با $32-28=4$ گرم باشد، ۲ مول گاز NO خواهیم داشت؛ بنابراین:

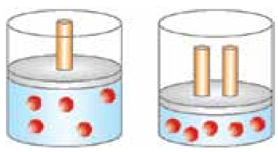
$$0/125\ g\begin{pmatrix}\text{تفاوت جرم}\\ N_2 \text{ و } O_2\end{pmatrix}\times\frac{2\ mol\ NO}{4\ g\begin{pmatrix}\text{تفاوت جرم}\\ N_2 \text{ و } O_2\end{pmatrix}}\times\frac{30\ g\ NO}{1\ mol\ NO}=1/875\ g\ NO$$

قسمت دوم سؤال هم که یک مسئلهٔ استوکیومتری ساده است:

$$1/875\ g\ NO\times\frac{1\ mol\ NO}{30\ g\ NO}\times\underbrace{\frac{2\ mol\ NO_2}{2\ mol\ NO}}_{\text{در واکنش (II)}}\times\frac{22/4\ L\ NO_2}{1\ mol\ NO_2}=1/4\ L\ NO_2$$

۸۱- گزینه ۳

فاصلهٔ بین مولکول‌های یک نمونهٔ گازی، به فشار آن بستگی دارد، به طوری که هر چه فشار وارده بر یک گاز بیشتر باشد، فاصلهٔ بین مولکول‌های آن کم‌تر شده و حجم نمونهٔ گازی کاهش می‌یابد.



بررسی سایر گزینه‌ها: ① گازها حجم معینی ندارند، ولی مایع‌ها حجم معینی دارند. ② با افزایش فشار بر یک نمونه گاز، فاصلهٔ بین مولکول‌های آن کم می‌شود و نه حجم مولکول‌ها! شکل مقابل را ببینید:

④ در دما و فشار ثابت، حجم شمار **مول‌های یکسانی** از دو گاز با هم برابر است نه حجم جرم‌های یکسانی از دو گاز! جرم مولی CO و CO_2 با هم متفاوت است؛ بنابراین در یک گرم از آن‌ها، تعداد مول یکسانی وجود ندارد.

۸۲- گزینه ۴

گام ۱ معادلهٔ واکنش را موازنه می‌کنیم: $Ba(OH)_2+2HCl \rightarrow BaCl_2+2H_2O$

گام ۲ جرم $Ba(OH)_2$ در محلول را به دست می‌آوریم:

با توجه به این‌که چگالی محلول برابر با $1\ g.mL^{-1}$ است، لذا ۲۰۰ میلی‌لیتر محلول، جرمی معادل با ۲۰۰ گرم دارد. با توجه به فرمول ppm می‌توان نوشت:

$$ppm_{Ba(OH)_2}=\frac{\text{جرم } Ba(OH)_2}{\text{جرم محلول}}\times 10^6 \Rightarrow 21375=\frac{x}{200}\times 10^6$$

$$\Rightarrow x=42750\times 10^{-4}\ g$$

گام ۳ با استفاده از روابط استوکیومتری از جرم $Ba(OH)_2$ به حجم محلول HCl می‌رسیم.

روش ۱ استفاده از کسر تناسب: $Ba(OH)_2 \sim 2HCl$

برای $Ba(OH)_2$ کسر تناسب مربوط به جرم و برای HCl کسر تناسب مربوط به غلظت مولی را می‌نویسیم:

$$\underbrace{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}}_{Ba(OH)_2}=\underbrace{\frac{\text{حجم}\times\text{غلظت مولی}}{1\times\text{ضریب}}}_{HCl} \Rightarrow \frac{\cancel{42750}^{21375}\times 10^{-4}}{1\times 171}=\frac{\cancel{0/4}^{0/1}\times x}{\cancel{2}_{1}\times 1}$$

$$\Rightarrow x=\frac{21375}{171}\times 10^{-3}\ (L)=\frac{21375}{171}(mL)>100 \Rightarrow ④$$

روش ۲ استفاده از کسر تبدیل:

$$\cancel{42750}^{250}\times 10^{-4}\ g\ Ba(OH)_2\times\frac{1\ mol\ Ba(OH)_2}{\cancel{171}_{1}\ g\ Ba(OH)_2}\times\frac{2\ mol\ HCl}{1\ mol\ Ba(OH)_2}$$

$$\times\frac{1\ L\ HCl(aq)}{0/4\ mol\ HCl}\times\frac{1000\ mL}{1\ L}=\frac{21375}{171}>100 \Rightarrow ④$$

نکته ① برای تبدیل درصد جرمی و غلظت ppm به یکدیگر از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم: $ppm=\text{درصد جرمی}\times 10^4$

② برای تبدیل درصد جرمی و غلظت مولار یک محلول به یکدیگر از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$M(\text{غلظت مولار})=\frac{10\overset{\overset{\text{درصد جرمی محلول}}{\uparrow}}{a}d\rightarrow(g/mL)\ \text{چگالی محلول}}{\text{جرم مولی حل‌شونده}}$$

می‌توانیم ابتدا غلظت مولی محلول باریم هیدروکسید را به دست آورده و سپس محاسبات را انجام بدیم.

$$\text{غلظت مولی}=\frac{10ad}{\text{جرم مولی}}\ ,\ a=ppm\times 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \text{غلظت مولی } Ba(OH)_2=\frac{10\times 21375\times 10^{-4}\times 1}{171}=\frac{21375}{171}\times 10^{-3}\ mol.L^{-1}$$

روش ۱ استفاده از کسر تناسب: $Ba(OH)_2 \sim 2HCl$

$$\underbrace{\frac{\text{حجم}\times\text{غلظت مولی}}{1\times\text{ضریب}}}_{Ba(OH)_2}=\underbrace{\frac{\text{حجم}\times\text{غلظت مولی}}{1\times\text{ضریب}}}_{HCl}$$

$$\Rightarrow \frac{21375\times\overbrace{10^{-3}\times 200}^{\cancel{0/2}}}{171\times 1}=\frac{\cancel{0/4}^{\cancel{0/2}}\times x}{\cancel{2}_{1}\times 1} \Rightarrow x=\frac{21375}{171}>100 \Rightarrow ④$$

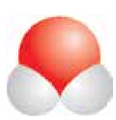
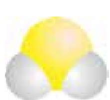
روش ۲ روش استفاده از کسر تبدیل:

$$\cancel{200}\ mL\ Ba(OH)_2(aq)\times\frac{\frac{21375}{171}\times\cancel{10^{-3}}\ mol\ Ba(OH)_2}{1\ L\ Ba(OH)_2(aq)}$$

$$\times\frac{\cancel{2}\ mol\ HCl}{1\ mol\ Ba(OH)_2}\times\frac{1\ L\ HCl(aq)}{\cancel{0/4}\ mol\ HCl}=\frac{21375}{171}>100 \Rightarrow ④$$

۸۳- گزینه ۱

نکته در جدول زیر برخی از ویژگی‌های آب (H_2O) در مقایسه با هیدروژن سولفید (H_2S)، در فشار ۱ atm آمده است:

ماده	آب	هیدروژن سولفید
فرمول شیمیایی	H_2O	H_2S
مدل فضاپرکن		
قطبیت مولکول	قطبی	قطبی
گشتاور دوقطبی (μ)	$1/85D$	$0/97D$
جرم مولی ($g.mol^{-1}$)	۱۸	۳۴
حالت فیزیکی (۲۵ °C)	مایع	گاز
نقطهٔ جوش (°C)	۱۰۰	۶۰-

دلیل تفاوت نقطهٔ جوش مواد مولکولی *برمی‌گردد* به قدرت نیروهای بین مولکولی آن‌ها! از آن‌جایی که نیروی بین مولکولی آب (H_2O) برخلاف هیدروژن سولفید (H_2S) از نوع پیوند هیدروژنی است، آب نقطهٔ جوش بالاتری دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها: (۲) ساختار هر دو مولکول، خمیده (Vشکل) است. (۳) با این‌که شعاع اتمی و جرم مولی اتم گوگرد از اکسیژن بیشتر است ولی به دلیل وجود پیوندهای هیدروژنی میان مولکول‌های آب، نقطهٔ جوش آب بسیار بالاتر از نقطهٔ جوش هیدروژن سولفید می‌باشد. در واقع نقش بسزا در تفاوت نقطهٔ جوش رو *پیوند هیدروژنی* داره! (۴) هر دو مولکول H_2O و H_2S قطبی‌اند ولی گشتاور دوقطبی آب (۱/۸۵D) بیشتر از گشتاور دوقطبی هیدروژن سولفید (۰/۹۷D) است؛ یعنی تفاوت گشتاور دوقطبی‌شون زیاده!
اما مولکول‌های CS_2 و CO_2 هر دو ناقطبی بوده و تفاوت گشتاور دوقطبی آن‌ها برابر صفر است.

۸۴- گزینه ۲

عبارت‌های (الف) و (ب) درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها: (الف) آرایش الکترونی کاتیون پایدار فلزهای اصلی (فلزهای دستهٔ s و p) به $1s^2$ یا ns^2 یا ns^2np^6 یا $(n-1)d^{10}$ ختم می‌شود.

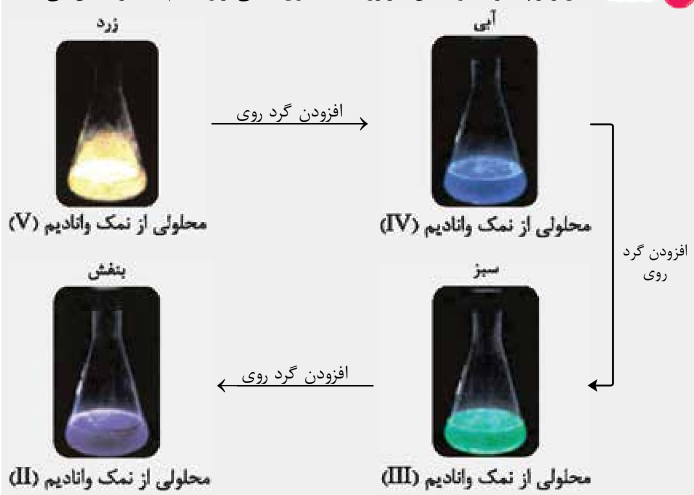
مثال:

$$_{20}Ca:[_{18}Ar]4s^2 \Rightarrow {}_{20}Ca^{2+}:[_{18}Ar]:[_{10}Ne]3s^23p^6$$
$$_{31}Ga:[_{18}Ar]3d^{10}4s^24p^1 \Rightarrow {}_{31}Ga^{3+}:[_{18}Ar]3d^{10}$$
$$_{50}Sn:[_{36}Kr]4d^{10}5s^25p^2 \Rightarrow {}_{50}Sn^{2+}:[_{18}Ar]4d^{10}5s^2$$

(ب) یون‌های پایدار $_{31}Ga$ و $_{30}Zn$ به ترتیب $_{31}Ga^{3+}$ و $_{30}Zn^{2+}$ است که آرایش الکترونی هر دو به $3d^{10}$ ختم می‌شود:

$$_{30}Zn:[_{18}Ar]3d^{10}4s^2 \Rightarrow {}_{30}Zn^{2+}:[_{18}Ar]3d^{10}$$
$$_{31}Ga:[_{18}Ar]3d^{10}4s^24p^1 \Rightarrow {}_{31}Ga^{3+}:[_{18}Ar]3d^{10}$$

نکته شکل زیر پیشرفت واکنش فلز روی با محلول نمکی از وانادیم (V) را نشان می‌دهد:



- با گذشت زمان، عدد اکسایش وانادیم در هر مرحله، ۱ واحد کاهش می‌یابد؛ بنابراین **نمک وانادیم** در هر مرحله، **نقش اکسنده** را دارد.
- **فلز روی** در این واکنش‌ها به یون Zn^{2+} اکسید می‌شود و بنابراین **نقش کاهنده** را دارد.

(پ) لزوماً در واکنش فلز روی با محلول نمک وانادیم، رنگ محلول از زرد (محلول نمک وانادیم (V)) به بنفش (محلول نمک وانادیم (II)) تغییر نمی‌کند و بستگی به مقدار فلز روی دارد. در ضمن در این واکنش، فلز روی اکسایش می‌یابد و نه محلول نمک وانادیم! نمک وانادیم نقش اکسنده را دارد و کاهش می‌یابد.

نکته روش گیاه‌پالایی برای استخراج فلزهای Ni و Zn نامناسب ولی برای استخراج فلزهای Au و Cu مناسب است.

(ت) طبق اطلاعات کتاب درسی، روش گیاه‌پالایی برای استخراج فلزهای نیکل (Ni) و روی (Zn) مناسب نیست.

۸۵- گزینه ۳

A و D (مواد اولیهٔ واکنش) دو مادهٔ محلول در آب هستند (مخلوط آن‌ها با آب از نوع محلول است). در اثر واکنش این دو ماده با یکدیگر، یک مخلوط ناهمگن تشکیل شده؛ پس نتیجه می‌گیریم که مادهٔ M نامحلول در آب بوده و انحلال‌پذیری آن از دو مادهٔ A و D، قطعاً کم‌تر است.

مثال: $\underbrace{H_2SO_4(aq)+Ba(OH)_2(aq)}_{\text{محلول}} \rightarrow \underbrace{BaSO_4(s)+2H_2O(l)}_{\text{مخلوط ناهمگن}}$

۸۶- گزینه ۱

دام اول بریم سراغ موازنهٔ معادله، *چغر و بدبدن* داده‌شده!

۱) به ترتیب موازنهٔ Cr، K و S:

$$\overset{5}{\_}H_2SO_4+\overset{2}{\_}K_2CrO_4+\_NaNO_2 \rightarrow \overset{1}{\_}Cr_2(SO_4)_3+\overset{2}{\_}K_2SO_4+\_NaNO_3+\_H_2O$$

۲) موازنهٔ H:

$$\overset{5}{\_}H_2SO_4+\overset{2}{\_}K_2CrO_4+\_NaNO_2 \rightarrow \overset{1}{\_}Cr_2(SO_4)_3+\overset{2}{\_}K_2SO_4+\_NaNO_3+\overset{5}{\_}H_2O$$

۳) موازنهٔ Na، N و O: ضریب دو مادهٔ دارای این سه عنصر، مجهول است و نمی‌توان ضریب این دو ماده را به طور مستقیم تعیین کرد. با توجه به این‌که Na و N فقط در ساختار این دو ماده وجود دارند، ضریب آن‌ها باید با هم برابر باشد. این ضریب را a در نظر گرفته و با نوشتن معادلهٔ مربوط به موازنهٔ اکسیژن، a را به دست می‌آوریم:

$$\text{موازنهٔ O}: (5\times4)+(2\times4)+2a=(4\times3)+(2\times4)+3a+5$$
$$28+2a=25+3a \Rightarrow a=3$$

در نهایت، معادلهٔ موازنه‌شده به صورت زیر است:

$$5H_2SO_4+2K_2CrO_4+3NaNO_2 \rightarrow Cr_2(SO_4)_3+2K_2SO_4+3NaNO_3+5H_2O$$

$$\text{مجموع ضرایب}=5+2+3+1+2+3+5=21$$

دام برای قسمت دوم سؤال، باید بازده درصدی واکنش رو محاسبه کنیم.

روش۱ استفاده از کسر تناسب: باید کسر تناسب‌های مربوط به جرم را برای $NaNO_2$ و $Cr_2(SO_4)_3$ بنویسیم و در صورت کسر واکنش‌دهنده $NaNO_2$، کسر «$\frac{\text{بازده درصدی}}{100}$» را ضرب کنیم.

$$3NaNO_2 \sim Cr_2(SO_4)_3$$

$$\underbrace{\frac{\text{جرم}\times\frac{\text{بازده درصدی}}{100}}{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}}_{NaNO_2}=\underbrace{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}}_{Cr_2(SO_4)_3} \Rightarrow \frac{\cancelto{0/4}{82/8}\times\frac{x}{100}}{\cancelto{1}{\cancelto{207}{3\times69}}}=\frac{141/12}{1\times392}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\cancelto{35280}{141120}}{\cancelto{1}{4}\times392}=\frac{35280}{392} \Rightarrow \text{با توجه به گزینه‌ها، ۷۵ یا ۹۰} \Rightarrow x=90$$

تیزبازی بچه‌ها تا جایی که می‌شه سر جلسهٔ آزمون، خودتون رو درگیر محاسبهٔ ضرب و تقسیم‌های طولانی نکنید. مثلاً این‌جا حاصل $\frac{35280}{392}$ که بازده درصدی واکنش هست، با توجه به گزینه‌ها، ۷۵ یا ۹۰ می‌شه، خب! انجام ضرب ۳۹۲×۹۰ راحت‌تره! و جوابش هم اتفاقاً می‌شه ۳۵۲۸۰، پس بازده ۹۰ درصده و تمام!

روش۲ استفاده از کسر تبدیل: اول با استفاده از محاسبات استوکیومتری، مقدار نظری فراورده ($Cr_2(SO_4)_3$) را محاسبه می‌کنیم:

$$\cancelto{0/4}{82/8}\,g\,NaNO_2\times\frac{1mol\,NaNO_2}{\cancelto{1}{69}\,g\,NaNO_2}\times\frac{1mol\,Cr_2(SO_4)_3}{\cancelto{1}{3}\,mol\,NaNO_2}\times\frac{392g\,Cr_2(SO_4)_3}{1mol\,Cr_2(SO_4)_3}$$
$$=156/8\,g$$

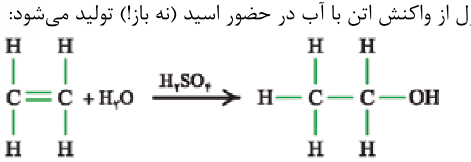
مقدار عملی $Cr_2(SO_4)_3$، ۱۴۱/۱۲ گرم است؛ بنابراین:

$$\text{بازده درصدی}=\frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}}\times100=\frac{141/12}{156/8}\times100$$

$$\xrightarrow{156/8\times90=14112} x\text{(بازده درصدی واکنش)}=\%90$$

۸۷- گزینه ۳

بررسی گزینه‌ها: (۱) اتانول از واکنش اتن با آب در حضور اسید (نه باز!) تولید می‌شود:



اتن اتانول

۲) همهٔ آلکن‌ها به دلیل داشتن پیوند دوگانهٔ کربن ـ کربن سیرنشده‌اند؛ بنابراین همهٔ آن‌ها با برم مایع واکنش می‌دهند. به شمار اتم‌های کربن بستگی *ندارد!* ۳) نفت کوره دارای مولکول‌های بزرگ‌تری نسبت به نفت سفید است و نقطهٔ جوش بالاتری دارد؛ بنابراین اگر در یک دمای مشخص، نفت کوره به صورت بخار باشد، یعنی دما بالاتر از نقطهٔ جوش نفت کوره باشد، قطعاً آن دما، بالاتر از نقطهٔ جوش نفت سفید نیز خواهد بود و نفت سفید هم به صورت بخار است.

نفت کوره > گازوئیل > نفت سفید > بنزین و خوراک پتروشیمی :مقایسهٔ اندازه و جرم مولکول

۴) در برج تقطیر، از پایین به بالا، دما کاهش می‌یابد. از طرفی در ارتفاعات بالاتر برج، مولکول‌های سبک‌تر (مانند بنزین و خوراک پتروشیمی) خارج می‌شوند؛ پس روند تغییر دما و اندازهٔ مولکول‌های خروجی، مانند یکدیگر است.

۸۸- گزینه ۲

در سمت چپ معادله، ۸ پیوند $C-H$ داریم که ۶تای آن‌ها، با پیوندهای $C-H$ سمت راست معادله ساده می‌شوند:

$$۲\,H-\underset{H}{\overset{H}{C}}-H \longrightarrow H-\underset{H}{\overset{H}{C}}-\underset{H}{\overset{H}{C}}-H + H-H \quad ; \quad \Delta H = +۶۵\ kJ$$

نکته

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}]$$

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [۲\Delta H(C-H)] - [\Delta H(C-C) + \Delta H(H-H)]$$

$$\Rightarrow ۶۵ = ۲\Delta H(C-H) - ۳۴۸ - ۴۳۵ \Rightarrow ۲\Delta H(C-H) = ۸۴۸$$

$$\Rightarrow \Delta H(C-H) = ۴۲۴\ kJ.mol^{-1}$$

تیزبازی با توجه به گزینه‌ها، در این سؤال می‌شه بدون حساب کتاب و سریع‌تر به جواب رسید. می‌دانیم که به طور کلی، هر چه شعاع اتم‌های تشکیل‌دهندهٔ پیوند کووالانسی، کوچک‌تر باشند، انرژی لازم برای شکستن آن و در نتیجه آنتالپی پیوند بیشتر است؛ بنابراین:

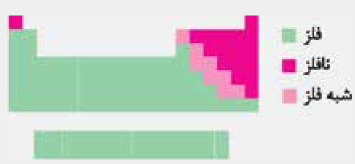
$$\text{شعاع اتمی: } H < C \Rightarrow \text{آنتالپی پیوند } (kJ.mol^{-1})\text{: } \underset{۴۳۵}{H-H} > H-C > \underset{۳۴۸}{C-C}$$

پس میانگین آنتالپی پیوند $C-H$ که سؤال از ما خواسته، عددی بزرگ‌تر از ۳۴۸ (رد ۳) و ۴)) و کوچک‌تر از ۴۳۵ (رد ۱)) است که می‌شه ۲) و تمام!

۸۹- گزینه ۴

درس‌نامه شبه‌فلزها:

۱ همهٔ شبه‌فلزها به دستهٔ p جدول دوره‌ای تعلق دارند. **این عنصرها در جدول دوره‌ای همانند مرزی بین فلزها و نافلزها قرار دارند.**



۲ عنصرهایی که در سمت راست این شبه‌فلزها قرار گرفته‌اند، نافلز و عنصرهایی که در سمت چپ این شبه‌فلزها قرار گرفته‌اند، فلز هستند (البته به‌جز هیدروژن که یک نافلز است).

۳ *بدانید و آگاه باشید!* که در هر دوره (به‌جز دورهٔ اول که شامل H و He است و دورهٔ هفتم که چند عنصر با ویژگی‌های نامشخص *داره!*) حداقل یک عنصر شبه‌فلز وجود دارد.

۴ همانند فلزها ← خواص فیزیکی ← شبه‌فلزها → رفتار شیمیایی → همانند نافلزها

روند تغییر خصلت فلزی و نافلزی در عناصر جدول دوره‌ای

در یک دوره از چپ به راست:
- خصلت فلزی و واکنش‌پذیری فلزها کاهش می‌یابد.
- خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری نافلزها افزایش می‌یابد.

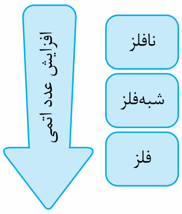
در یک گروه از بالا به پایین:
- خصلت فلزی و واکنش‌پذیری فلزها افزایش می‌یابد.
- خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری نافلزها کاهش می‌یابد.

همهٔ عبارت‌های داده‌شده درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

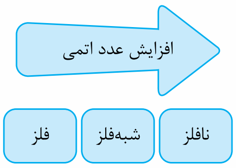
◆ همهٔ شبه‌فلزها در دستهٔ p جدول دوره‌ای قرار دارند.

◆ می‌دانیم که در یک گروه از بالا به پایین، خاصیت فلزی عنصرها افزایش می‌یابد و گروه‌هایی که دارای هر سه نوع عنصر فلزی، نافلزی و شبه‌فلزی هستند، با عنصرهای نافلزی شروع شده و به عنصرهای فلزی ختم می‌شوند؛ پس عدد اتمی یک عنصر فلزی، به یقین بیشتر از عدد اتمی نافلز هم‌گروه آن است.



◆ برم ($_{۳۵}Br$) تنها نافلز مایع جدول دوره‌ای است. این عنصر در دورهٔ چهارم قرار دارد. تنها عنصر گازی این دوره، گاز نجیب است که واکنش‌پذیری ناچیزی دارد.

◆ در یک دوره از چپ به راست، خصلت فلزی عنصرها کاهش و خصلت نافلزی آن‌ها افزایش می‌یابد.



بنابراین عنصرهای سمت چپ شبه‌فلز X در یک دوره، یا شبه‌فلز و یا فلز هستند و با توجه به این‌که خواص فیزیکی شبه‌فلزها بیشتر به فلزها شبیه است، به طور کلی می‌توان گفت که عنصرهای سمت چپ شبه‌فلز X، خواص فیزیکی فلزات را دارند.

۹۰- گزینه ۲

گام ابتدا معادلهٔ موازنهٔ واکنش را نوشته و جدول تغییرات مقدار مول مواد را می‌نویسیم:

	$۴NH_3$	+	$۵O_2$	→	$۴NO$	+	$۶H_2O$
$t=۰$	۰/۲		۰/۲۵		۰		۰
$t=۳۰s$	$۰/۲-۴x$		$۰/۲۵-۵x$		$۴x$		$۶x$

مجموع=۰/۴۵+x

گام حالا با توجه به رابطهٔ سرعت یکی از مواد (مثلاً NH_3)، x را حساب می‌کنیم:

نکته سرعت متوسط واکنش از تقسیم سرعت متوسط تولید یا مصرف یک مادهٔ شرکت‌کننده در واکنش بر ضریب استوکیومتری آن در معادلهٔ موازنه‌شده به دست می‌آید:

$$aA + bB \rightarrow cC + dD$$

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}(A)}{a} = \frac{\bar{R}(B)}{b} = \frac{\bar{R}(C)}{c} = \frac{\bar{R}(D)}{d}$$

$$\bar{R}(\text{واکنش}) = \frac{\bar{R}(NH_3)}{۴} \Rightarrow \bar{R}(NH_3) = ۴ \times ۰/۰۲ = ۰/۰۸\ mol.L^{-1}.min^{-1}$$

$$\text{مول } NH_3 \text{ مصرف‌شده} = ۳۰\ s \times \frac{۱\ min}{۶۰\ s} \times \frac{۰/۰۸\ mol.L^{-1}}{۱\ min} \times ۲\ L = ۰/۰۸\ mol$$

$$\Rightarrow ۴x = ۰/۰۸ \Rightarrow x = ۰/۰۲$$

گام با به دست آمدن پارامتر x، مجموع مول مواد گازی در ظرف که همهٔ مواد شرکت‌کننده در واکنش هستند، را به دست می‌آوریم:

$$\text{مجموع شمار مول‌های گازی پس از ۳۰ ثانیه} = ۰/۴۵ + x = ۰/۴۵ + ۰/۰۲ = ۰/۴۷\ mol$$

گام برای قسمت دوم سؤال، با توجه به فرض ثابت‌بودن سرعت واکنش، کافیه که با توجه به مقدار اولیه و مصرفی یکی از مواد واکنش‌دهنده تا ثانیهٔ ۳۰، مقدار باقی‌ماندهٔ آن را به دست بیاریم و با استفاده از رابطهٔ سرعت، زمان لازم برای مصرف این مقدار باقی‌مانده را حساب کنیم.

با گذشت ۳۰ ثانیه، ۰/۰۸ مول آمونیاک مصرف شده و $۰/۱۲ = ۰/۰۸ - ۰/۲$ مول آن باقی مانده است؛ حالا باید ببینیم که چه‌قدر زمان نیاز است تا ۰/۱۲ مول آمونیاک دیگر هم مصرف شود:

روش ۱

$$?\ s = ۰/۱۲\ mol \times \frac{۱\ min}{۰/۰۸\ mol.L^{-1} \times ۲L} \times \frac{۶۰\ s}{۱\ min} = ۴۵\ s$$

روش ۲

$$\bar{R}(NH_3) = \frac{|\Delta n(NH_3)|}{\Delta t} \Rightarrow ۰/۰۸ \times ۲\ mol.min^{-1}$$

$$= \frac{۰/۱۲}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = ۰/۷۵\ min \times \frac{۶۰\ s}{۱\ min} = ۴۵\ s$$

۹۱- گزینهٔ ۱

درس‌نامه در رابطه با **سرعت واکنش** نکات زیر را به خاطر بسپاریم:

۱ سرعت متوسط تولید یا مصرف یک ماده، با ضریب استوکیومتری آن ماده در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش، متناسب است. برای مثال در واکنش $A+2B \rightarrow C$، سرعت متوسط مصرف B در یک بازهٔ زمانی خاص، ۲ برابر سرعت متوسط مصرف A است.

۲ شیب نمودار «مول یا غلظت ـ زمان»، بیانگر سرعت متوسط تولید یا مصرف یک ماده بوده و متناسب با ضریب استوکیومتری آن ماده است.

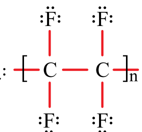
۳ سرعت متوسط واکنش از تقسیم سرعت متوسط تولید یا مصرف یک ماده بر ضریب استوکیومتری آن در معادلهٔ موازنهٔ واکنش، به دست می‌آید. برای مثال در واکنش $2A+C \rightarrow 3B$؛ داریم:

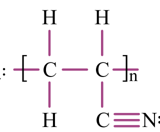
$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_A}{2} = \frac{\bar{R}_C}{1} = \frac{\bar{R}_B}{3}$$

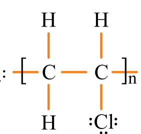
با توجه به درس‌نامهٔ بالا، همهٔ عبارت‌های داده‌شده، درست و از مفاهیم اولیهٔ سرعت واکنش هستند که *باید بلدشون باشید!*

۹۲- گزینهٔ ۳

در ساختار هر سه پلیمر گفته‌شده، جفت‌الکترون ناپیوندی وجود دارد:

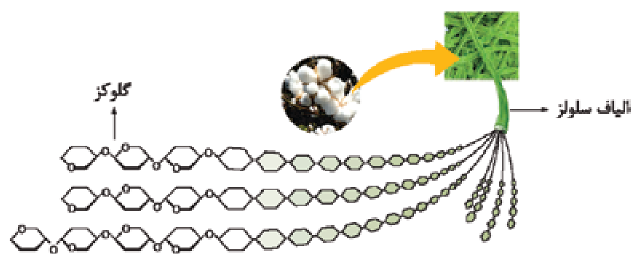

پلی‌تترافلوئورو اتن:


پلی‌سیانو اتن:

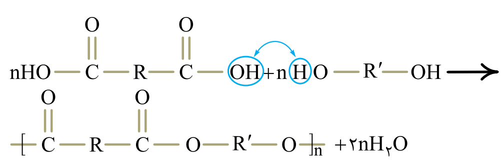

پلی‌وینیل کلرید:

بررسی سایر گزینه‌ها: ۱ به طور کلی، تعداد مونومرهایی که در ساختار هر مولکول پلیمر به هم متصل شده‌اند، مشخص نیست؛ به همین دلیل، برای پلیمرها نمی‌توان فرمول مولکولی دقیقی نوشت.

اگر به شکل الیاف پنبه هم دقت کنید، می‌بینید که طول زنجیرهای آن با هم برابر نیست!



۲ روغن زیتون برخلاف پلی‌اتن و انسولین، پلیمر نیست و جرم مولی آن از هر دو ماده کم‌تر است. ۴ در تشکیل پلیمرها، لزوماً اتم‌های کربن مونومرها به هم متصل نمی‌شود؛ مثلاً در تشکیل پلی‌استرها از دی‌اسیدها و دی‌الکل‌ها، اتم کربن به اتم اکسیژن متصل شده و گروه عاملی استری را می‌سازد؛ به عبارت دیگر اتم اکسیژن باعث اتصال مونومرها به یکدیگر می‌شود.



مشاوره ۱، ۲ و ۴ این سؤال، عبارت‌های روتینی نیستند ولی اگر به مفاهیم اصلی کتاب درسی تسلط کافی داشته باشی، با خوندن ۳، می‌تونی به یقین درستی اون رو تأیید کنی.

۹۳- گزینهٔ ۴

- افزودن $I^-(aq)$ به محلول هیدروژن پراکسید برای تجزیهٔ آن: تأثیر استفاده از کاتالیزگر

$$2H_2O_2(aq) \rightarrow 2H_2O(l) + O_2(g)$$

- سوزاندن الیاف آهن در محفظهٔ اکسیژن: تأثیر غلظت بر سرعت واکنش: الیاف آهن گداخته در هوا نمی‌سوزند ولی در محفظهٔ اکسیژن خالص می‌سوزند.
- سوزاندن گرد آهن از طریق پاشیدن آن بر روی شعله: تأثیر سطح تماس بر سرعت واکنش: گرد آهن پاشیده‌شده بر شعله به خاطر سطح تماس بالا با حرارت شعله می‌سوزد.

۹۴- گزینهٔ ۲

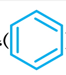
عبارت‌های (الف) و (ت) درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها: (الف) ترکیب داده‌شده دارای ۱۶ اتم کربن و ۱۶ پیوند $C-H$ است. *مواستون باشه* که ترکیب مورد نظر در مجموع ۱۷ اتم هیدروژن دارد که یکی از آن‌ها به نیتروژن و ۱۶تای دیگر به کربن متصل‌اند.

تله در ساختار ترکیب داده‌شده، اتم گوگردی وجود دارد که ۴ پیوند اشتراکی تشکیل داده است؛ بنابراین اگر می‌خواهید از فرمول برای تعیین شمار اتم‌های هیدروژن استفاده کنید، باید حواستون باشه که برخلاف اتم اکسیژن، اتم گوگرد در اینجا (به خاطر ۴ پیوند اشتراکی) **بر روی شمار اتم‌های هیدروژن تأثیر دارد** و در فرمول کلی، به خاطر گوگرد، ۲ اتم هیدروژن را نیز باید اضافه کنید؛ یعنی:

$$\text{شمار اتم‌های هیدروژن} = (2n+2) - 2(\text{تعداد حلقه‌ها} + \text{تعداد پیوندهای دوگانه})$$
$$-4(\text{تعداد پیوندهای سه‌گانه}) + (\text{تعداد اتم‌های نیتروژن}) + \underbrace{2}_{\text{به خاطر گوگرد}}$$
$$= (2\times16)+2-2(8+3)+3+2=17$$

اگر این ۲ اتم هیدروژن را محاسبه نکنید، شمار اتم‌های هیدروژن ۱۵تا می‌شه و عبارت (الف) رو به اشتباه غلط در نظر می‌گیرید. پس بهتره، در مواردی که ساختار ترکیب آلی دارای گروه‌های جدید (مثل $-\overset{\overset{\displaystyle O}{\|}}{S}-$) است، شمار اتم‌های H رو از روی شکل به دست بیارید نه فرمول.

(ب) یکی از حلقه‌ها، ۵کربنی خواهد شد، در حالی که حلقهٔ بنزنی ()، ۶ اتم کربن دارد.

(پ) مولکول داده‌شده، ۱۶ اتم کربن دارد، در حالی که آلکان مورد نظر، ۱۴کربنی است.

۳، ۶ـ دی‌اتیل ـ۴ـ متیل نونان
۹ ، ۱ ، ۲×۲=۴
۹+۱+۴=۱۴

(ت)

نکته اکسنده‌ترین و کاهنده‌ترین عنصرهای جدول دوره‌ای:

گونهٔ اکسنده ← تمایل به گرفتن الکترون ← دارای E° بزرگ‌تر ← اگر عنصر نافلزی باشد نافلز واکنش پذیرتر

مقایسهٔ واکنش‌پذیری نافلزها (خصلت نافلزی): $F > O > N > Cl > Br > I > S > C > H$

گونهٔ کاهنده ← تمایل به از دست دادن الکترون ← دارای E° کوچک‌تر ← در میان عنصرها Li کاهنده‌ترین عنصر است.

در ساختار مولکول داده‌شده، ۸ پیوند دوگانه وجود دارد. از طرفی از بین اتم‌های این مولکول (C، H، N، S و O)، اکسیژن بیشترین قدرت اکسندگی را دارد. دو اتم اکسیژن در مجموع دارای ۴ جفت‌الکترون ناپیوندی هستند: $\frac{8}{4}=2$

۹۵- گزینهٔ ۴

مقدار pH با غلظت H^+ رابطهٔ وارونه دارد؛ به طوری که هر چه غلظت یون هیدرونیوم $(H_3O^+ = H^+)$ در محلولی بیشتر باشد، آن محلول اسیدی‌تر است و pH کم‌تری دارد.

$$pH = -\log[H^+] \Rightarrow [H^+]\uparrow \Rightarrow pH\downarrow$$

دقت کنید که در محلول‌های اسیدهای تک‌پروتون‌دار (HX)، $[H^+]$ با $[X^-]$ برابر است؛ بنابراین:

$$\text{مقایسهٔ } [H^+] \text{ در محلول‌های اسیدی}: HA > HX$$

$$\Rightarrow \text{مقایسهٔ pH محلول‌های اسیدی}: pH(HA) < pH(HX)$$

بررسی سایر گزینه‌ها: ۱ هیدروفلوئوریک اسید، یک اسید ضعیف است و $[H^+]$ در آن کم‌تر از $[HF]$ است. ۲ گاز هیدروژن کلرید (HCl) یک مادهٔ مولکولی است و به کار بردن واژهٔ «تفکیک یونی» برای آن نادرست است.

۷) **تله** اگر در این گزینه به جای واژهٔ «تفکیک یونی» از «فرایند یونیده‌شدن» استفاده می‌شد، این عبارت کاملاً درست بود؛ بنابراین اگر دقت کافی نداشته باشی و همهٔ گزینه‌ها رو بررسی نکنی، این گزینه *می‌تونه خیلی راحت و شیک، تو رو تو دام بندازه!*

۳) با افزایش شمار اتم‌های کربن در کربوکسیلیک اسیدها، ثابت یونش و قدرت اسیدی آن‌ها کاهش می‌یابد؛ بنابراین در شرایط یکسان، خاصیت اسیدی محلول فرمیک اسید $(HCOOH)$ بیشتر از محلول استیک اسید (CH_3COOH) است.

۹۶- گزینه ۴

عبارت‌های (الف) و (پ) درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

(الف)
$$[OH^-] = M\alpha = 0/1 \times 0/16 = 1/6 \times 10^{-2}$$
$$[H^+] = \frac{10^{-14}}{[OH^-]} = \frac{10^{-14}}{1/6 \times 10^{-2}} = 6/25 \times 10^{-13}$$

(ب) با افزایش شمار اتم‌های کربن، بخش ناقطبی بزرگ‌تر شده و از میزان انحلال‌پذیری آن در آب کاسته می‌شود. در نتیجه پاک‌کنندگی آن نیز کاهش می‌یابد.

(پ) انحلال Li_2O و N_2O_5 در آب به صورت زیر است:

$$Li_2O + H_2O \rightarrow 2LiOH \rightarrow 2Li^+ + 2OH^-$$
$$N_2O_5 + H_2O \rightarrow 2HNO_3 \rightarrow 2H^+ + 2NO_3^-$$

با انحلال مول‌های برابر از این مواد در حجم برابر آب، $[H^+]=[OH^-]$ خواهد بود و محلولی با pH خنثی حاصل می‌شود.

(ت) قسمت اول درست است و با افزایش غلظت مولی هر اسیدی (قوی یا ضعیف)، $[H^+]$ بالا رفته و pH کاهش می‌یابد اما بر روی ثابت تعادل (ثابت یونش) **فقط و فقط** دما تأثیرگذار *است و بس!*

۹۷- گزینه ۲

استراتژی اول رابطهٔ ثابت یونش رو برای هر دو اسید بنویس (می‌دونی که برای محاسبهٔ ثابت تعادل، غلظت تعادلی مواد در رابطهٔ ثابت تعادل قرار می‌گیره)، از اون‌جا که سؤال $\frac{K_a(HD)}{K_a(HA)}$ رو بهت داده، رابطهٔ ثابت یونش HD رو بر HA تقسیم و کسر حاصل رو ساده کن. در نهایت از دو طرف معادله $-\log$ بگیر تا $[H^+]$ در رابطه به pH تبدیل شه و خواستهٔ مسئله رو بتونی به دست بیاری.

از رابطهٔ محاسبهٔ ثابت یونش استفاده می‌کنیم:

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{[HX]_{\text{تعادلی}}} \xrightarrow{[HX]_{\text{تعادلی}}=\text{یکسان}=0/05} \frac{K_a(HD)}{K_a(HA)} = \left(\frac{[H^+]_{HD}}{[H^+]_{HA}}\right)^2$$

$$\Rightarrow 10^{-6} = \left(\frac{[H^+]_{HD}}{[H^+]_{HA}}\right)^2 \Rightarrow \frac{[H^+]_{HD}}{[H^+]_{HA}} = 10^{-3} \Rightarrow [H^+]_{HD} = 10^{-3}[H^+]_{HA}$$

$$\xrightarrow{\text{می‌گیریم}-\log} \underbrace{-\log[H^+]_{HD}}_{pH(HD)} = \underbrace{-\log 10^{-3}}_{3} \underbrace{-\log[H^+]_{HA}}_{pH(HA)}$$

$$\Rightarrow pH(HA) = pH(HD) - 3$$

۹۸- گزینه ۳

درس‌نامه هنگامی که یک قطعه آهن در هوای مرطوب قرار می‌گیرد، همانند سلول‌های گالوانی یک واکنش اکسایش ـ کاهش خودبه‌خودی $(E^\circ_{\text{سلول}} > 0)$ در حضور O_2 در سطح آن رخ می‌دهد. نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش و واکنش کلی فرایند زنگ‌زدن آهن به صورت زیر است:

نیم‌واکنش اکسایش: $4(Fe(s) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + 2e^-)$

نیم‌واکنش کاهش: $3(O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq))$

نیم‌واکنش اکسایش: $4(Fe^{2+}(aq) \rightarrow Fe^{3+}(aq) + e^-)$

آهن (II) به آهن (III)

واکنش کلی: $4Fe(s) + 3O_2(g) + 6H_2O(l) \rightarrow \underbrace{4Fe^{3+}(aq) + 12OH^-(aq)}_{4Fe(OH)_3(s)}$

به‌جز عبارت دوم، بقیهٔ عبارت‌ها درست‌اند.

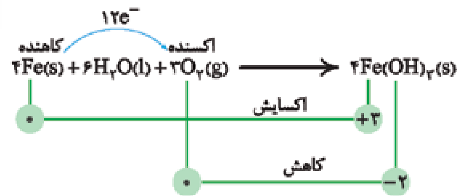
بررسی عبارت‌ها:

◇ واکنش‌های طبیعی و خودبه‌خودی دارای $E^\circ > 0$ هستند.

◇ فراوردهٔ نیم‌واکنش‌های اکسایش، کاتیون است نه آنیون!

$$Fe(s) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + 2e^-$$
$$Fe^{2+}(aq) \rightarrow Fe^{3+}(aq) + e^-$$

◇



◇ در واکنش زنگ‌زدن آهن، در نهایت Fe به Fe^{3+} تبدیل می‌شود؛ بنابراین می‌توان گفت به ازای مصرف هر مول آهن، ۳ مول الکترون مبادله می‌شود.

۹۹- گزینه ۱

درس‌نامه رابطهٔ ثابت یونش و درجهٔ یونش:

اگر درجهٔ یونش اسید ضعیف HX برابر α و غلظت اولیهٔ اسید برابر M باشد، اسید به اندازهٔ $M\alpha$ یونیده شده و غلظت تعادلی آن برابر با $M - M\alpha$ خواهد بود؛ پس می‌توان نوشت:

	HX	$\rightleftharpoons$	H^+	+	X^-
غلظت اولیه:	M		0		0
تغییر غلظت:	$-M\alpha$		$+M\alpha$		$+M\alpha$
غلظت تعادلی:	$M - M\alpha$		$M\alpha$		$M\alpha$

$$K_a = \frac{[H^+][X^-]}{[HX]} = \frac{(M\alpha)(M\alpha)}{M - M\alpha} = \frac{M^2\alpha^2}{M(1-\alpha)} = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \quad , \quad K_a = \frac{[H^+]^2}{M - [H^+]}$$

برای اسیدهای خیلی ضعیف (معمولاً با K_a کوچک‌تر از 10^{-5}) و یا مقادیر کم α (معمولاً کم‌تر از $0/05$)، می‌توان در عبارت «$1-\alpha$» از α صرف نظر کرده و از رابطهٔ تقریبی زیر استفاده کرد: $K_a = M\alpha^2$

بررسی گزینه‌ها: ۱) با ۴ برابر شدن حجم محلول، غلظت مولی آن $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود. با توجه به این‌که K_a اسید کوچک است، می‌توانیم از رابطهٔ تقریبی $K_a = M\alpha^2$ استفاده کنیم:

$$K_a = \text{ثابت} \Rightarrow M_1\alpha_1^2 = M_2\alpha_2^2 \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2 \Rightarrow \alpha_2 = 2\alpha_1$$

گزینهٔ درست همین‌جا لو رفت!

۲) با دو برابر کردن جرم و در نتیجه دو برابر شدن تعداد مول اسید و همچنین نصف‌کردن حجم محلول، غلظت محلول ۴ برابر می‌شود؛ چون غلظت تغییر کرده، pH محلول نیز تغییر خواهد کرد.

$$\text{غلظت محلول} = \frac{\text{مول حل‌شونده} \uparrow \text{۲ برابر}}{\text{حجم محلول} \downarrow \frac{1}{2}\text{ برابر}} \Rightarrow \text{۴ برابر}$$

۳) ابتدا باید غلظت مولی محلول را حساب کنیم:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\frac{8\ g}{50\ g.mol^{-1}}}{\frac{400}{1000}\ L} = 0/4\ mol.L^{-1}$$

$$K_a \simeq \frac{[H^+]^2}{M} \Rightarrow [H^+]^2 = 10^{-5}\times 4\times 10^{-1} = 4\times 10^{-6} \Rightarrow [H^+] = 2\times 10^{-3}\ mol.L^{-1}$$

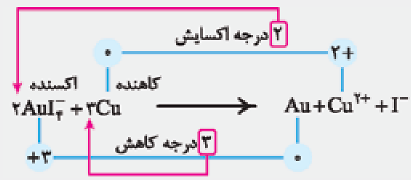
$$[OH^-] = \frac{10^{-14}}{[H^+]} = \frac{10^{-14}}{2\times 10^{-3}} = 5\times 10^{-12}\ mol.L^{-1}$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log(2\times 10^{-3}) = 3 - \log 2 = 3 - 0/3 = 2/7$$ ④

۱۰۰- گزینه ۱

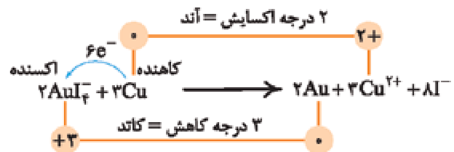
درس‌نامه **موازنه به روش تغییر عدد اکسایش:** به طور کلی برای موازنهٔ واکنش‌های اکسایش ـ کاهش، ابتدا تغییر عدد اکسایش اتم‌ها را حساب می‌کنیم، سپس مقدار تغییر عدد اکسایش گونهٔ کاهنده را ضریب گونهٔ اکسنده و مقدار تغییر عدد اکسایش گونهٔ اکسنده را ضریب کاهنده قرار می‌دهیم و در آخر، با توجه به ضرایبی که معلوم هستند، ضرایب بقیهٔ گونه‌ها را تعیین می‌کنیم. *حواستون باشه* که اگر عنصری که عدد اکسایش آن تغییر کرده است، دارای زیروند باشد، باید تغییر عدد اکسایش آن را در زیروندش ضرب کنیم و سپس جابه‌جایی تغییر عدد اکسایش‌ها را انجام بدهیم.

مثال:



$$\Rightarrow 2AuI_4^- + 3Cu \rightarrow 2Au + 3Cu^{2+} + 8I^-$$

همهٔ عبارت‌های داده‌شده درست‌اند. معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش به صورت زیر است:



بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: $E^\circ(\text{واکنش}) = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند}) = 0/56 - 0/34 = 0/22$

$\Rightarrow E^\circ(\text{واکنش}) > 0 \Rightarrow$ خودبه‌خودی و انجام‌پذیر

عبارت دوم:

نکته

تغییر عدداکسایش یک اتم × زیروند اتم اکسنده یا کاهنده × ضریب = تعداد مول الکترون مبادله‌شده

تعداد مول الکترون‌های مبادله‌شده برابر است با:

براساس گونهٔ کاهنده $\Rightarrow 3\times 1\times 2 = 6e^-$

براساس گونهٔ اکسنده $\Rightarrow 2\times 1\times 3 = 6e^-$

عبارت سوم: یون AuI_4^- با گرفتن الکترون از Cu، به عنوان اکسنده عمل می‌کند.

عبارت چهارم: مجموع ضرایب $= 2+3+2+3+8 = 18$

۱۰۱- گزینه ۴

درس‌نامه **تکنیک مقایسهٔ آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور ترکیب‌های یونی:**

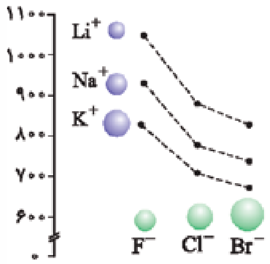
به طور کلی برای مقایسهٔ ΔH فروپاشی شبکهٔ ترکیب‌های یونی می‌توان از روش زیر استفاده کرد:

گام هر چه مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون در یک ترکیب یونی بزرگ‌تر باشد، ΔH فروپاشی شبکهٔ آن بزرگ‌تر است.

گام اگر مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون برای دو ترکیب یونی برابر باشد، هر چه شعاع یون‌های ترکیب یونی کوچک‌تر باشد، ΔH فروپاشی آن بزرگ‌تر است.

با توجه به نمودار، مقایسهٔ آنتالپی فروپاشی ۵ ترکیب داده‌شده به صورت $e>c>a>d>b$ است.

بررسی گزینه‌ها: ① آنتالپی فروپاشی ترکیب‌های a، b و d، کم‌تر از $1000\ kJ.mol^{-1}$ است. با توجه به نمودار کتاب درسی، آنتالپی فروپاشی اغلب هالیدهای فلزهای قلیایی نیز کم‌تر از $1000\ kJ.mol^{-1}$ است؛ پس آنیون ترکیب a می‌تواند یک هالید باشد.



② آنیون‌های سازندهٔ یک دوره، بارهای متفاوتی دارند. اگر عناصر سازندهٔ آنیون‌های a و b، در یک دوره بود، به دلیل اختلاف بار آن‌ها، تفاوت آنتالپی فروپاشی آن‌ها خیلی بیشتر از *اینی می‌شد* که در نمودار نشان داده شده! ③ *نه اصلاً!* مثلاً e و c به ترتیب می‌توانند MgO و CaO باشند که بار یون‌های هر دو، ۲+ و ۲− است اما به دلیل کم‌تر بودن شعاع Mg^{2+}، آنتالپی فروپاشی ترکیب e بیشتر از c شده است. ④ آنتالپی فروپاشی ترکیب‌های b و d بسیار به هم نزدیک است؛ بنابراین اختلاف بار یون‌های سازندهٔ آن‌ها را *بی‌خیال می‌شیم و فقط می‌ریم* سراغ مقایسهٔ شعاع یون‌ها! می‌دانیم که آنتالپی فروپاشی شبکه با شعاع یون‌ها رابطهٔ وارونه دارد. با توجه به این‌که آنتالپی فروپاشی d از b بیشتر و شعاع آنیون آن بیشتر است، پس حتماً باید شعاع کاتیون آن کم‌تر باشد.

مشاوره این سؤال، چالشی‌ترین سؤال این کنکور بوده، سر جلسهٔ آزمون این‌جور سؤال‌ها رو باید حتماً در دور اول رها کنید و در آخر اگر زمان داشتید بیایید سراغش.

۱۰۲- گزینه ۲

گام ابتدا شمار مول‌های تعادلی مواد (n) و سپس غلظت‌های تعادلی ([ ]) آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}} \quad , \quad \text{مولی} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}}$$

$$\begin{cases} n_{Br_2} = \frac{24}{160} = 0/15\ mol \\ [Br_2] = \frac{0/15}{3} = 0/05\ M \end{cases} , \begin{cases} n_{NO} = \frac{18}{30} = 0/6\ mol \\ [NO] = \frac{0/6}{3} = 0/2\ M \end{cases} , \begin{cases} n_{NOBr} = \frac{66}{110} = 0/6\ mol \\ [NOBr] = \frac{0/6}{3} = 0/2\ M \end{cases}$$

گام حالا از رابطهٔ ثابت تعادل استفاده می‌کنیم:

$$2NO(g) + Br_2(g) \rightleftharpoons 2NOBr(g)$$

$$K = \frac{[NOBr]^2}{[NO]^2[Br_2]} = \frac{(0/2)^2}{(0/2)^2\times 0/05} = 20$$

گام برای قسمت دوم سؤال، با توجه به اطلاعات داده‌شده میزان مصرفی Br_2 ٪۶۰ بوده؛ پس ٪۴۰ از آن باقی مانده است یعنی مقدار Br_2 در حال تعادل، ٪۴۰ مقدار اولیه‌اش است.

$$\frac{40}{100}\times n_{\text{اولیه}} = 0/15\ mol \Rightarrow n_{Br_2\ \text{اولیه}} = \frac{0/15\times 100}{40} = 0/375\ mol$$

تله اگر به اشتباه، ٪۶۰ مقدار آغازی Br_2 را برابر با مقدار تعادلی آن (0/15 mol) در نظر بگیرید به عدد ۰/۲۵ و گزینهٔ اشتباه ① می‌رسید.

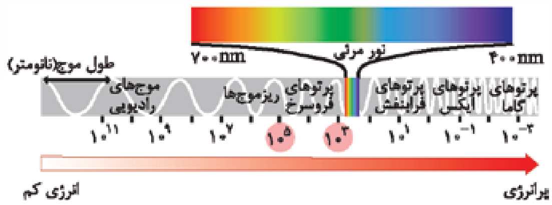
۱۰۳- گزینه ۳

انرژی فعال‌سازی سوختن گاز هیدروژن در هوا و در دمای اتاق تأمین نمی‌شود اما این انرژی برای فسفر سفید تأمین شده و فسفر سفید برخلاف گاز هیدروژن، در هوا و در دمای اتاق می‌سوزد.

E_a: سوختن فسفر سفید > سوختن گاز هیدروژن در هوا و در دمای اتاق

بررسی سایر گزینه‌ها:

① محدودهٔ طول موج nm 10^5 ـ 10^3، مربوط به محدودهٔ پرتوهای فروسرخ است. گروه‌های عاملی می‌توانند بخش معینی از پرتوهای الکترومغناطیسی در این محدوده را جذب کنند؛ به همین دلیل برای شناسایی گروه‌های عاملی از طیف‌سنجی فروسرخ استفاده می‌شود.



۲) انرژی فعال‌سازی واکنش‌های گفته‌شده، بالا بوده و در دمای اتاق انجام نمی‌شود.

$N_2 + H_2 \xrightarrow{\text{در دمای اتاق}}$ انجام نمی‌شود.

$N_2 + O_2 \xrightarrow{\text{در دمای اتاق}}$ انجام نمی‌شود.

۴) *اصلاً تعریف طیف همینه!*

۱۰۴- گزینه ۲

نکته **اثر عوامل مختلف بر تعادل:**

عامل			عکس‌العمل تعادل به تغییر	چگونگی تغییر ثابت تعادل (K) با جابه‌جاشدن تعادل
تغییر غلظت		افزایش غلظت یک ماده	جابه‌جایی در جهت مصرف آن ماده	تغییر نمی‌کند.
		کاهش غلظت یک ماده	جابه‌جایی در جهت تولید آن ماده	تغییر نمی‌کند.
تغییر حجم (فشار)		افزایش حجم (کاهش فشار) سامانه	جابه‌جایی در جهت شمار مول‌های گازی بیشتر	تغییر نمی‌کند.
		کاهش حجم (افزایش فشار) سامانه	جابه‌جایی در جهت شمار مول‌های گازی کم‌تر	تغییر نمی‌کند.
تغییر دما	واکنش‌های گرماده	کاهش دما	جابه‌جایی در جهت تولید گرما (جهت رفت)	افزایش می‌یابد.
		افزایش دما	جابه‌جایی در جهت مصرف گرما (جهت برگشت)	کاهش می‌یابد.
	واکنش‌های گرماگیر	کاهش دما	جابه‌جایی در جهت تولید گرما (جهت برگشت)	کاهش می‌یابد.
		افزایش دما	جابه‌جایی در جهت مصرف گرما (جهت رفت)	افزایش می‌یابد.

هر عاملی که سبب جابه‌جایی تعادل در جهت رفت شود، مقدار فراورده را افزایش خواهد داد.

بررسی همهٔ موارد:

◊ افزایش فشار: تعادل را به سمت مول‌های گازی کم‌تر جابه‌جا می‌کند:

$$\overrightarrow{CO(g) + 2H_2(g) \rightleftharpoons CH_3OH(g)}\uparrow$$

◊ خارج‌کردن ۵۰ درصد از CH_3OH:

$$\overrightarrow{CO(g) + 2H_2(g) \rightleftharpoons CH_3OH(g)}\downarrow$$

تله دقت کنید که در این سؤال منظور طراح **فقط جابه‌جایی تعادل در جهت رفت (افزایش مقدار فراورده) است**، نه افزایش مقدار فراورده نسبت به تعادل اولیه!
اگر به اشتباه مقدار فراورده رو پس از اعمال تغییر نسبت به تعادل اولیه بررسی کنید، این مورد رو غلط در نظر می‌گیرید؛ زیرا با خارج‌کردن ٪۵۰ CH_3OH (فراورده) از تعادل اولیه، مقدار فراورده در تعادل جدید نسبت به تعادل اولیه، کم‌تر می‌شود.

◊ کاهش دما: چون واکنش گرماده است، کاهش دما تعادل را در جهت رفت جابه‌جا می‌کند.

$$\overrightarrow{CO + 2H_2 \rightleftharpoons CH_3OH}\uparrow + Q$$

◊ خارج‌کردن ۵۰ درصد از H_2 و CO به صورت همزمان: با کاهش مقدار H_2 و CO، تعادل در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود.

$$\overleftarrow{\downarrow CO + \downarrow 2H_2 \rightleftharpoons CH_3OH}\downarrow$$

◊ تزریق CO به ظرف واکنش: با افزایش مقدار CO، تعادل در جهت رفت و مصرف آن پیش می‌رود.

$$\overrightarrow{\uparrow CO + 2H_2 \rightleftharpoons CH_3OH}\uparrow$$

۱۰۵- گزینه ۱

درس‌نامه **روند تغییر شعاع یونی در جدول دوره‌ای:**

۱) در یک گروه جدول دوره‌ای، درست مانند شعاع اتمی، شعاع یونی هم از بالا به پایین افزایش می‌یابد.

مثال: شعاع یونی فلزهای قلیایی: $_{3}Li^+ < {}_{11}Na^+ < {}_{19}K^+ < {}_{37}Rb^+ < {}_{55}Cs^+$

شعاع یونی هالیدها: $_{9}F^- < {}_{17}Cl^- < {}_{35}Br^- < {}_{53}I^-$

۲) در یون‌های هم‌الکترون، هر چه عدد اتمی بیشتر باشد، شعاع یون کوچک‌تر است.

مثال: شعاع: $\underbrace{_{7}N^{3-} > {}_{8}O^{2-} > {}_{9}F^- > {}_{11}Na^+ > {}_{12}Mg^{2+} > {}_{13}Al^{3+}}_{\text{همگی ۱۰ الکترون دارند.}}$

شعاع: $\underbrace{_{15}P^{3-} > {}_{16}S^{2-} > {}_{17}Cl^- > {}_{19}K^+ > {}_{20}Ca^{2+} > {}_{21}Sc^{3+}}_{\text{همگی ۱۸ الکترون دارند.}}$

همان‌طور که دیدید در یون‌های هم‌الکترون، شعاع آنیون‌ها از شعاع کاتیون‌ها بزرگ‌تر است.

۳) در دوره‌های دوم و سوم، کاتیون‌ها نسبت به آنیون‌ها یک لایهٔ الکترونی کم‌تر دارند، به همین دلیل، شعاع کاتیون‌ها از شعاع آنیون‌ها کوچک‌تر است.

مثال: دورهٔ سوم: $\underbrace{_{13}Al^{3+} < {}_{12}Mg^{2+} < {}_{11}Na^+}_{\text{۱۰ الکترون دارند}} < \underbrace{_{17}Cl^- < {}_{16}S^{2-} < {}_{15}P^{3-}}_{\text{۱۸ الکترون دارند}}$

یون‌های داده‌شده در ۱)، هم‌الکترون هستند. در یون‌های هم‌الکترون، هر چه عدد اتمی بیشتر باشد، شعاع یون کوچک‌تر است:

شعاع: $\underbrace{_{16}S^{2-} > {}_{17}Cl^- > {}_{19}K^+ > {}_{20}Ca^{2+}}_{\text{همگی ۱۸ الکترون دارند.}}$

بررسی سایر گزینه‌ها:

(برای رد هر گزینه، دنبال ۱ مورد غلط می‌گردیم.)

۲) دقت کنید که شعاع $_{19}K^+$ با داشتن یک لایهٔ الکترونی بیشتر، از شعاع $_{12}Mg^{2+}$، بیشتر است.

شعاع: $\underbrace{_{35}Br^- > {}_{17}Cl^-}_{\text{یون‌های هم‌گروه}} > \underset{\text{۳ لایهٔ الکترونی}}{_{19}K^+} > \underset{\text{۲ لایهٔ الکترونی}}{_{12}Mg^{2+}}$ (هم‌الکترون)

۳) یون‌های داده‌شده در این گزینه، همگی در دورهٔ سوم قرار دارند (هم‌دوره‌اند). در دورهٔ سوم، شعاع کاتیون‌ها از شعاع آنیون‌ها کوچک‌تر است:

شعاع: $_{16}S^{2-} > {}_{17}Cl^- > {}_{12}Mg^{2+} > {}_{13}Al^{3+}$

۴) در یون‌های هم‌الکترون، با افزایش عدد اتمی، شعاع یونی کوچک‌تر می‌شود:

شعاع: $\underbrace{_{8}O^{2-} > {}_{9}F^- > {}_{12}Mg^{2+}}_{\text{همگی ۱۰ الکترون دارند.}}$

مشاوره برای این مدل سؤال‌های مقایسه‌ای، بهتره با رد گزینه به پاسخ صحیح برسید؛ یعنی در هر گزینه، یک مورد غلط رو پیدا کنید و گزینه رو حذف کنید.