آزمون شماره ۹ سراسری ۱۴۰۲ نوبت دوم - داخل

نام درس	دهم	یازدهم	دوازدهم	ترکیبی	آسان	متوسط	سخت
زیست شناسی	۷	۹	۱۷	۱۲	۰	۳۳	۱۲
فیزیک	۶	۹	۱۵	–	۱۰	۱۴	۶
شیمی	۹	۹	۱۲	۵	۴	۲۰	۱۱
ریاضی	۵	۶	۵	۱۴	۱	۱۳	۱۶
زمین شناسی	–	۱۵	–	–	۲	۱۰	۳

زیست‌شناسی

۱- گزینهٔ ۳

شفاف‌سازی مری و نای لوله‌های طویلی هستند که با حفرهٔ دهانی ارتباط دارند.

مری در جابه‌جایی مواد غذایی و نای در انتقال گازهای تنفسی دخالت دارد. طبق واکنش تنفس یاخته‌ای هم گلوکز (موجود در مواد غذایی) و هم اکسیژن (در هوای تنفسی) در تولید انرژی بدن نقش دارند.

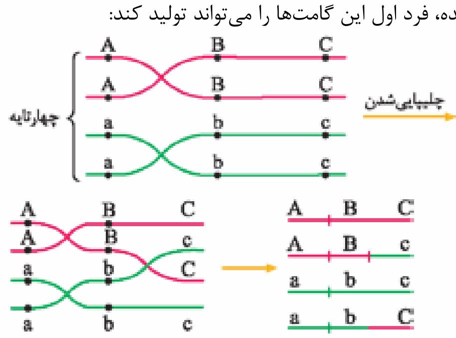
بررسی سایرگزینه‌ها: ① صفاق اندام‌های موجود در حفرهٔ شکمی را به همدیگر متصل می‌کند. نای و بخش عمدهٔ مری در قفسهٔ سینه هستند. ② در لایهٔ مخاطی مری یاختهٔ مژک‌دار وجود ندارد. ④ در دیوارهٔ مری، لایهٔ غضروفی ـ ماهیچه‌ای وجود ندارد. لایهٔ زیرمخاطی مری به لایهٔ ماهیچه‌ای آن چسبیده است.

درس‌نامه

	مری	نای
به حفرهٔ دهانی راه دارد.	✓	✓
تعداد لایه‌های دیواره	۴	۴
وجود غضروف در دیواره	×	✓
واردشدن به حفرهٔ شکمی	✓	×
انتقال مولکول مؤثر در تنفس یاخته‌ای	✓	✓
منشعب می‌شود.	×	✓

۲- گزینهٔ ۱

با توجه به کراسینگ‌اور مطرح‌شده، فرد اول این گامت‌ها را می‌تواند تولید کند:



با توجه به امکان کراسینگ‌اوری که در فرد شمارهٔ ۱ طبق فرض صورت سؤال آورده شده، گامت‌های تولیدشده توسط این فرد شامل موارد زیر است:

ABC ـ ABc ـ abc ـ abC؛ فرد شمارهٔ ۲ هم فقط می‌تواند گامت‌های ABC و abc را تولید کند.

نتیجهٔ آمیزش می‌شود این:

$$ABc \times \begin{cases} ABC \Rightarrow \dfrac{A\,B\,c}{A\,B\,C} \\ abc \Rightarrow \dfrac{A\,B\,c}{a\,b\,c} \end{cases} \qquad ABC \times \begin{cases} ABC \Rightarrow \dfrac{A\,B\,C}{A\,B\,C} \\ abc \Rightarrow \dfrac{A\,B\,C}{a\,b\,c} \end{cases}$$

$$abc \times \begin{cases} ABC \Rightarrow \dfrac{a\,b\,c}{A\,B\,C} \\ abc \Rightarrow \dfrac{a\,b\,c}{a\,b\,c} \end{cases} \qquad abC \times \begin{cases} ABC \Rightarrow \dfrac{a\,b\,C}{A\,B\,C} \\ abc \Rightarrow \dfrac{a\,b\,C}{a\,b\,c} \end{cases}$$

با توجه به موارد مطرح‌شده و همچنین با توجه به عدم وقوع کراسینگ‌اور بین الل‌های a و A در فرد شمارهٔ ۱، هیچ‌گاه فرزندی با ژنوتیپ $\frac{aBC}{abc}$ متولد نمی‌شود.

مشاوره طراحان کنکور علاقهٔ زیادی به شگفتانه!کردن داوطلبان دارند. این سؤال که ظاهر عجیبی دارد یکی از سوژه‌هایی است که در نظام قدیم بیشتر مورد علاقهٔ طراحان است. به هر حال حفظ خونسردی در چنین شرایطی از بهترین کارها است!

۳- گزینهٔ ۱

فقط مورد «الف» درست است.

بررسی همهٔ موارد: (الف) قطع‌شدن اتصال رنای ناقل و توالی آمینواسیدی در مراحل طویل‌شدن و پایان رخ می‌دهد و در هر دوی این مراحل، حین قطع‌شدن این اتصال، جایگاه E ریبوزوم خالی است. (ب) در مرحلهٔ طویل‌شدن هر رنای ناقل واردشده به جایگاه A یک آمینواسید دارد. در ابتدای مرحلهٔ طویل‌شدن، زمانی که رنای ناقل وارد جایگاه A می‌شود، در جایگاه P رنای ناقل متصل به یک آمینواسید مستقر است نه توالی آمینواسیدی! (ج) قرارگرفتن رنای ناقل حامل توالی آمینواسیدی در جایگاه P در مراحل طویل‌شدن و پایان ترجمه مشاهده می‌شود، ولی در مرحلهٔ پایان ترجمه، بر طول پلی‌پپتید افزوده نمی‌شود. (د) در شروع مرحلهٔ طویل‌شدن ترجمه زمانی که اولین رنای ناقل ورودی به جایگاه A، به این جایگاه وارد می‌شود هنوز پیوند پپتیدی ایجاد نشده و رنای ناقلی هم به جایگاه E وارد نشده است.

۴- گزینهٔ ۲

شفاف‌سازی با توجه به این‌که پرتوهای نور بعد از عبور از عدسی از هم فاصله گرفته‌اند، می‌توان گفت شکل مربوط به بیماری نزدیک‌بینی است.

در بیماری نزدیک‌بینی، تصویر اجسام دور در جلوی شبکیه و تصویر اجسام نزدیک روی شبکیه می‌افتد. (تأیید ② و رد ③)

بررسی سایرگزینه‌ها: ① چه در فرد نزدیک‌بین و چه در فرد سالم، برای دیدن اجسام نزدیک باید ماهیچه‌های مژگانی منقبض شوند. در این حالت طول تارهای آویزی متصل به عدسی کم می‌شود. اما دقت کنید که گفتیم در این بیماری، تصویر اجسام دور در جلوی شبکیه تشکیل می‌شود. ④ در زمان دیدن جسم نزدیک، عدسی قطور و در زمان دیدن جسم دور عدسی باریک می‌شود.

درس‌نامه

	نزدیک‌بینی	دوربینی
اندازهٔ کرهٔ چشم	زیاد می‌شود.	کوچک می‌شود.
وضعیت قطر عدسی	افزایش	کاهش
محل تشکیل تصاویر اجسام نزدیک	روی شبکیه	پشت شبکیه
محل تشکیل تصاویر اجسام دور	جلوی شبکیه	روی شبکیه

۵- گزینهٔ ۱

لنفوسیت‌های B و T بالغ اولیه و همین‌طور یاخته‌های خاطره، در بین گویچه‌های سفید توانایی تقسیم دارند. در تقسیم یاخته‌ای در مرحلهٔ S، پیش از همانندسازی دنای هسته‌ای، هیستون‌ها از دنا جدا می‌شوند و بعد از همانندسازی دوباره به دنا متصل می‌شوند. در واقع می‌توان گفت به منظور همانندسازی دنا، باید آرایش ساختارهای نوکلئوزومی دنا تغییر کند.

نکته هیستون یکی از پروتئین‌های متصل به دنای خطی است. برای فشرده‌شدن مولکول دنا ساختارهای نوکلئوزومی ایجاد می‌شود. در هر ساختار نوکلئوزوم ۸ مولکول هیستون وجود دارد که مولکول دنا حدود دو دور در اطراف آن‌ها قرار می‌گیرد.

بررسی سایر گزینه‌ها: (۲) همهٔ گویچه‌های سفید توانایی درون‌بری و برون‌رانی مواد را دارند. طبق شکل کتاب در فصل ۱ زیست دهم، در درون‌بری، فرورفتگی غشایی و در برون‌رانی، امکان تشکیل برآمدگی غشایی وجود دارد. در ضمن هم در درون‌بری و هم در برون‌رانی، انرژی زیستی مصرف می‌شود. (۳) در فرایند انتشار ساده، مولکول‌های اکسیژن و کربن دی‌اکسید از منافذ موجود در میان فسفولیپیدهای غشا عبور می‌کنند. همهٔ گویچه‌های سفید یاخته‌های زنده و هوازی هستند؛ بنابراین نیاز به دریافت اکسیژن و دفع کربن دی‌اکسید دارند (همچنین می‌توان گفت منظور از منافذ در بین فسفولیپیدهای نوعی غشای آن‌ها، به منافذ پوشش هسته اشاره دارد که همهٔ گویچه‌های سفید هسته‌دار هستند و عبور مواد از منافذ هسته صورت می‌گیرد).

نکته هسته یک پوشش دولایه‌ای دارد (دو غشا دارد) که در بخش‌هایی از آن، منافذی در این پوشش قرار دارد. در محل این منافذ، پروتئین‌هایی قرار دارند. به عبارتی این پروتئین‌ها، منافذ را می‌سازند.

(۴) همهٔ این گویچه‌ها راکیزه دارند. درون راکیزه یک یا چند مولکول دنای حلقوی وجود دارد.

۶- گزینهٔ ۴

توالی‌های سه‌نوکلئوتیدی رنای پیک تعیین می‌کند که کدام آمینواسیدها باید در ساختار پلی‌پپتیدها قرار بگیرند.

نکته مقایسهٔ برخی از انواع رنا در یاختهٔ یوکاریوتی:

	رنای پیک	رنای ناقل	رنای رناتنی
توالی‌های آن تعیین‌کنندهٔ نوع آمینواسید پروتئین است.	✓	×	×
آنزیم سازندهٔ آن در هسته	رنابسپاراز ۲	رنابسپاراز ۳	رنابسپاراز ۱
زمان تغییر	حین یا پس از رونویسی	پس از رونویسی	—
نقش	اطلاعات را از دنا به رناتن می‌برد.	انتقال آمینواسید به رناتن	شرکت در ساخت پروتئین با قرارگیری در رناتن

بررسی سایر گزینه‌ها: (۱) طبق شکل کادر نکته، در صورتی که رنابسپارازهای دو ژن در دو جهت متفاوت حرکت کنند راه‌اندازهای دو ژن می‌توانند به یکدیگر نزدیک باشند، مثل ژن‌های ۲ و ۳.

نکته بررسی یک شکل مهم:

- رشتهٔ مورد رونویسی یک ژن ممکن است با رشتهٔ مورد رونویسی ژن‌های دیگر یکسان یا متفاوت باشد.

RNAی در حال رونویسی

- در دو ژن مجاور، جهت حرکت آنزیم‌های رنابسپاراز می‌تواند عکس یکدیگر و یا موافق هم باشد.
- در صورتی که جهت حرکت دو آنزیم رنابسپاراز متصل به دو ژن متفاوت یکسان باشد، می‌توان گفت در آن دو ژن رشته‌ای از دنا که به عنوان الگو عمل می‌کند، یکی بوده است.
- در طول یک مولکول دنا که چندین ژن دارد بخش‌هایی از هر دو رشته می‌توانند به عنوان الگوی رونویسی قرار گیرند و رنابسپارازها به سمت هم یا خلاف جهت هم حرکت کنند.
- بین دو راه‌انداز از دو ژن مختلف می‌تواند توالی بین ژنی وجود داشته باشد که نه تنظیمی است و نه رونویسی می‌شود. (مثل ژن‌های ۲ و ۳)
- وقتی دو رنابسپاراز از دو ژن مختلف در جهت مخالف هم حرکت می‌کنند، یعنی یا به یکدیگر نزدیک می‌شوند (مثلاً ژن ۱ و ژن ۲) و یا از هم فاصله می‌گیرند (مثل ژن‌های ۲ و ۳)، قطعاً رشته‌ای از دنا که مورد رونویسی قرار می‌گیرد و رشتهٔ رمزگذار در این دو ژن با هم متفاوت است.
- ممکن است بین دو ژن متوالی راه‌انداز وجود نداشته باشد. در این صورت راه‌اندازهای آن دو ژن در دو طرف مقابل هم هستند و می‌توان گفت که رشته‌ای از دنا که الگو است، در این دو ژن با هم متفاوت است.
- اگر بین دو ژن متوالی در دنا، راه‌انداز وجود نداشته باشد، جهت رونویسی می‌تواند یکسان (در پروکاریوت‌ها) و یا متفاوت (یوکاریوت‌ها) باشد.

(۲) بیان ژن به معنی تولید رنا و یا پلی‌پپتید است. از بیان ژن رنای رناتنی، مولکول رنای رناتنی (rRNA) که نوعی بسپار است تولید می‌شود که در ساختار رناتن حضور می‌یابد. فعالیت رنای رناتنی در ریبوزوم، سبب ساخت پروتئین (بیان ژن‌ها) می‌شود (یعنی تشکیل پیوند پپتیدی). (۳) در صورت سؤال به دو ژن رمزکنندهٔ رنای رناتنی اشاره دارد، از آن‌جایی که در مورد دو ژن متفاوت حرف می‌زنیم، بنابراین توالی نوکلئوتیدی در رشتهٔ الگو و رمزگذار این دو ژن قطعاً متفاوت است.

از طرفی اگر فرض کنیم این دو ژن، به چیزی مثل ژن‌های ۲ و ۳ در شکل باشند، می‌بینیم که رشته‌ای از دنا که رمزگذار است در بین این دو ژن متفاوت است (در یکی رشتهٔ بالایی و در دیگری رشتهٔ پایینی).

۷- گزینهٔ ۲

شفاف‌سازی گیاهان و جانوران، جاندارانی هستند که در کتاب درسی مطرح شده‌اند و تولیدمثل جنسی دارند.

بررسی همهٔ موارد: (الف) کرم کبد، جانوری هرمافرودیت و خودلقاح است؛ یعنی هم می‌تواند اسپرم و هم تخمک تولید کند و اسپرم‌هایش، تخمک‌هایش را بارور کنند. (ب) زنبور عسل ملکه (ماده)، طی بکرزایی زنبور نر زایا تولید می‌کند. زنبور ملکه 2n و زنبور نر n است. (ج) در گیاهان نهان‌دانه لقاح مضاعف صورت می‌گیرد و دو تخم اصلی و ضمیمه ایجاد می‌شود. از میتوز تخم اصلی، رویان و از میتوز تخم ضمیمه، آندوسپرم ایجاد می‌شود.

نکته

	تخم اصلی	تخم ضمیمه
حاصل لقاح کدام یاخته‌ها است	اسپرم و تخمزا	اسپرم و دوهسته‌ای
عدد فام‌تنی در گیاه دولاد	۲n	۳n
چه بخش‌هایی را ایجاد می‌کند	رویان و بخش ارتباطی آن با گیاه مادر	آندوسپرم
محل تشکیل	درون کیسهٔ رویانی	درون کیسهٔ رویانی

(د) در شرایط رکود تابستانی در لاک‌پشت و یا در خواب زمستانی در خرس قطبی، مصرف اکسیژن و واکنش‌های سوخت و سازی در جانور به حداقل می‌رسد. یا به طور مثال رویان در دانهٔ گیاهان نهان‌دانه، پس از تشکیل، رشد خود (مصرف اکسیژن و واکنش‌های سوخت و سازی) را تا مدتی متوقف می‌کند.

۸- گزینهٔ ۳

مادر ناخالص برای صفات داسی‌شدن گویچه‌های قرمز و هموفیلی به صورت $X^HX^hHb^AHb^S$ است. در این حالت پدر هر ژنوتیپی داشته باشد، امکان تولد دختری سالم و ناخالص وجود دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها: (۱) در بیماری داسی‌شدن گویچهٔ قرمز، در صورتی که پدر سالم (خالص) و مادر ناخالص باشد، امکان تولد پسری مبتلا به بیماری وجود ندارد. (۲) در بیماری داسی‌شدن گویچهٔ قرمز، در صورتی که پدر سالم و خالص و مادر خالص و بیمار باشد، امکان تولد پسری مبتلا به بیماری وجود ندارد. (۴) ژنوتیپ مادر سالم و خالص برای بیماری‌های هموفیلی و داسی‌شدن گویچهٔ قرمز به صورت $X^HX^HHb^AHb^A$ است. در صورتی که پدر مبتلا به هر دو بیماری باشد، امکان تولد دختری سالم و خالص وجود ندارد!

۹- گزینهٔ ۱

شفاف‌سازی مارها از فرومون برای جفت‌یابی استفاده می‌کنند.

ساختار استخوان در مهره‌داران دارای اسکلت درونی استخوانی، بسیار شبیه ساختار استخوان انسان است.

بررسی سایر گزینه‌ها: (۲) برخی مارها می‌توانند پرتوهای فروسرخ را تشخیص دهند. در جلو و زیر هر چشم مار زنگی سوراخی وجود دارد که گیرنده‌های فروسرخ در آن قرار دارند. (۳) بعضی از مارها توانایی بکرزایی دارند. در بکرزایی مارها، مار ماده با میوز تخمک ایجاد می‌کند. تخمک، فام‌تن‌هایش را دو برابر می‌کند و سپس شروع به تقسیم میتوز می‌کند و زادهٔ دولاد را به وجود می‌آورد. (۴) مار اندام حرکتی جلویی ندارد!

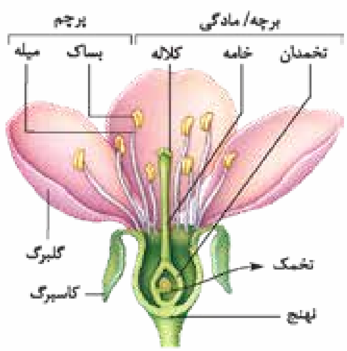
نکته ویژگی‌های مارها:

لولهٔ گوارش	دارند.
تنفس	ساختار تنفسی ویژه دارند. [شش‌ها]
گردش خون	گردش بستهٔ مضاعف دارند. قلب ۴حفره‌ای دارند.
دفع مواد و تنظیم اسمزی	کلیه دارند.
دستگاه عصبی	دستگاه عصبی مرکزی و محیطی دارند.
حواس	بعضی از مارها [مثل مار زنگی] گیرندهٔ فروسرخ دارند.
دستگاه حرکتی	اندام حرکتی جلویی ندارند.
تنظیم شیمیایی	از فرومون برای جفت‌یابی استفاده می‌کنند.
تولیدمثل	تولیدمثل جنسی دارند. بعضی از مارها بکرزایی دارند.

۱۰- گزینه ۴

شفاف‌سازی تخمدان بخش حجیم مادگی است. برچه واحد سازندهٔ مادگی است. هر برچه از کلاله، خامه و تخمدان تشکیل شده است.

بعد از گرده‌افشانی، دانهٔ گردهٔ رسیده بر روی کلاله قرار می‌گیرد. در صورتی که کلاله، آن را بپذیرد، از رشد یاختهٔ رویشی، لولهٔ گرده ایجاد می‌شود. طبق شکل خامه بین تخمدان و کلاله قرار دارد. (بنابراین بین تخمدان و کلاله اتصال مستقیمی وجود ندارد.)



نکته چند نکته در مورد کلاله:
- به خامه اتصال دارد.
- تعداد آن در هر گل با تعداد برچه یکسان است.
- محیط رشد یاختهٔ رویشی را فراهم می‌کند.
- محل قرارگیری دانهٔ گردهٔ رسیده است.

بررسی سایر گزینه‌ها: (۱) تخمدان محل تشکیل تخمک‌هاست. تخمک نهان‌دانگان پوششی دولایه‌ای دارد.

نکته درون یک تخمدان یک یا چند تخمک وجود دارد. با انجام لقاح در هر تخمک، یک دانه تشکیل می‌شود. پوشش دولایه‌ای تخمک تغییر می‌کند و به پوستهٔ دانه تبدیل می‌شود.

(۲) تخمدان به خامه متصل است. طبق شکل، خامه ساختاری باریک و دراز است. (۳) در یک گیاه دولاد، یاخته‌های درون کیسهٔ رویانی تخمک به صورت تک‌لاد هستند. همان‌طور که گفتیم، تخمدان بخش احاطه‌کنندهٔ تخمک‌هاست.

۱۱- گزینه ۱

همهٔ موارد صحیح است.

بررسی همه موارد: (الف) پلاسمودسم‌ها در مناطقی در دیوارهٔ یاخته‌ای به نام لان، به فراوانی وجود دارند. (ب) پلاسمودسم‌ها در محل لان و یا بیرون از آن قرار دارند. دقت کنید که در خود پلاسمودسم (طبق شکل ۱۱ فصل ۷ دهم) هیچ بخشی از دیوارهٔ یاخته‌ای وجود ندارد. (ج) منافذ پلاسمودسم آن‌قدر بزرگ است که پروتئین‌ها، نوکلئیک اسیدها و حتی ویروس‌های گیاهی از آن عبور می‌کنند. (د) طی انتقال سیمپلاستی حرکت مواد از پروتوپلاست یک یاخته به یاختهٔ مجاور، از راه پلاسمودسم‌هاست.

درس‌نامه مقایسهٔ لان و پلاسمودسم:

ویژگی	لان	پلاسمودسم
در چه یاخته‌هایی وجود دارد؟	زنده و مرده	فقط زنده
تیغهٔ میانی	دارد	ندارد
دیوارهٔ نخستین	دارد	ندارد
دیوارهٔ پسین	ندارد	ندارد
اندازهٔ نسبی نسبت به دیگری	بزرگ‌تر	کوچک‌تر

۱۲- گزینه ۲

شفاف‌سازی هیپوتالاموس بخشی از مغز انسان است که با سامانهٔ کناره‌ای ارتباط نزدیکی دارد و باعث افزایش دمای بدن (تب) در پاسخ به بعضی از ترشحات میکروب‌های واردشده به بدن می‌شود.

هورمون‌های ضدادراری و اکسی‌توسین در هیپوتالاموس **تولید** و در هیپوفیز پسین **ذخیره و از آن‌جا هم ترشح** می‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها: (۱) برعکس! هورمون آزادکننده در تولید و تنظیم ترشح هورمون‌های محرک نقش دارد.

نکته هورمون‌های LH و FSH، محرک تیروئید و محرک فوق کلیه هورمون‌های محرکی هستند که با اثر هورمون آزادکننده از یاخته‌های هیپوفیز پیشین ترشح می‌شوند.

(۳) اسبک مغز بخشی از سامانهٔ کناره‌ای است که در ایجاد حافظهٔ کوتاه‌مدت و تبدیل آن به بلندمدت نقش اساسی دارد. (۴) **هیچ‌کدام** از هورمون‌های تولیدشده در هیپوتالاموس در یاخته‌های استخوانی گیرنده ندارند! دقت کنید که هورمون رشد اولاً از هیپوفیز پیشین ترشح می‌شود و دوماً در یاخته‌های غضروفی صفحات رشد گیرنده دارد.

نکته هورمون‌هایی که در اندام استخوان گیرنده دارند: رشد ـ تیروئیدی ـ انسولین ـ کلسی‌تونین ـ پاراتیروئیدی ـ تستوسترون ـ اریتروپویتین.

تله هورمون رشد در یاختهٔ غضروفی صفحات رشد گیرنده دارد نه در یاختهٔ استخوانی!

۱۳- گزینه ۴

شفاف‌سازی در گونه‌زایی دگرمیهنی علاوه بر گروهی از عوامل برهم‌زنندهٔ تعادل مثل رانش دگره‌ای، جهش و انتخاب طبیعی بر اثر وقوع پدیده‌هایی **همچون** نوترکیبی نیز، به تدریج دو گروه جداشده از هم با یکدیگر متفاوت می‌شوند.

نوترکیبی موجب می‌شود تا بدون نیاز به پیدایش دگره‌های جدید، بر تنوع ژنتیکی جمعیت افزوده شود. ممکن است که بپرسید صورت سؤال به عواملی که جمعیت را از تعادل خارج می‌کند اشاره دارد و نوترکیبی جزء این عوامل محسوب نمی‌شود!! در پاسخ می‌توان چنین استدلال کرد که آمیزش غیرتصادفی نیز در گونه‌زایی دگرمیهنی نقش دارد. آمیزش غیرتصادفی بدون ایجاد دگرهٔ جدید، باعث افزایش تنوع ژنتیکی در جمعیت می‌شود.

تله هرچند به این گزینه ایراد وارد است، ولی در بین سه گزینهٔ دیگر، این گزینه کم‌تر غلط است.

نکته عواملی که گوناگونی را در یک جمعیت، افزایش می‌دهند:
(۱) جهش ⬅ با ایجاد الل جدید (۲) شارش دگره‌ای ⬅ با واردکردن الل جدید از یک جمعیت دیگر (۳) نوترکیبی و گوناگونی دگره‌ای در گامت‌ها ⬅ با ایجاد ترکیبات جدید اللی از الل‌های موجود!

بررسی سایر گزینه‌ها: (۱) انتخاب طبیعی در افزایش گوناگونی در جمعیت نقشی ندارد! (۲) انتخاب طبیعی باعث افزایش فراوانی افرادی می‌شود که با محیط سازگار هستند. این افراد می‌توانند ژن‌نمود خالص و یا ناخالص داشته باشند. (۳) واردشدن تعدادی دگره از یک جمعیت به جمعیت دیگر، مربوط به شارش ژنی است که در گونه‌زایی دگرمیهنی بین دو جمعیت ایجادشده از یک جمعیت اولیه (دو گروه جداشده از هم)، متوقف شده است.

فیزیک

۴۶- گزینه ۴

استراتژی برای بررسی فرایندهای واپاشی، مراحل زیر را به ترتیب طی می‌کنیم:

۱ فرایند واپاشی را می‌نویسیم. *(اگه فرایند توی صورت تست داده شده بود، نیازی به این مرحله نداریم.)*

۲ پایستگی عدد جرمی و پایستگی عدد اتمی را برای اجزای دو طرف فرایند می‌نویسیم تا خواستهٔ تست به دست آید.

درس‌نامه ۱ **عدد جرمی:** مجموع تعداد پروتون‌ها (عدد اتمی) و نوترون‌ها (عدد نوترونی) $A=Z+N$

۲ در فرایندهای واپاشی، دو اصل زیر برقرار است:

- **پایستگی عدد جرمی (پایستگی تعداد نوکلئون‌ها):** مجموع تعداد نوکلئون‌های دو طرف فرایند، یکسان است.
- **پایستگی عدد اتمی (پایستگی تعداد پروتون‌ها):** مجموع تعداد پروتون‌های دو طرف فرایند، یکسان است.

گام ۱

نکته ذرهٔ α، هستهٔ اتم هلیم $({}^{4}_{2}\alpha)$ است.

طبق صورت تست، برای عنصر مادر (X)، $A=2Z$ است؛ بنابراین فرایند واپاشی به صورت زیر است (هستهٔ دختر را با ${}^{A'}_{Z'}Y$ نشان داده‌ایم.): ${}^{2Z}_{Z}X \to {}^{A'}_{Z'}Y + {}^{4}_{2}\alpha + {}^{\circ}_{-1}e^{-} + {}^{\circ}_{+1}e^{+}$

گام ۲ پایستگی عدد اتمی و پایستگی عدد جرمی را برای اجزای دو طرف فرایند می‌نویسیم:

$2Z = A'+4+(0)+(0) \Rightarrow A' = 2Z-4$:پایستگی عدد جرمی

$Z = Z'+2+(-1)+1 \Rightarrow Z' = Z-2$:پایستگی عدد اتمی

تعداد نوترون‌های هستهٔ دختر برابر است با:

$$A' = Z'+N' \Rightarrow 2Z-4 = Z-2+N' \Rightarrow N' = Z-2$$

تعداد نوترون‌های هستهٔ جدید با تعداد پروتون‌های آن برابر است $(N'=Z')$، پس اختلافشان **صفر** است.

تیزبازی وقتی $A=2Z$ باشد، عددهای اتمی و نوترونی با هم برابرند؛ یعنی $N=Z$؛ پس از گسیل پرتوی α، دو پروتون و دو نوترون از هسته کم می‌شود؛ از طرفی الکترون و پوزیترون هم که همدیگر را خنثی می‌کنند؛ در نتیجه پس از فرایند واپاشی، باز هم تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها برابر است؛ بنابراین: $N'-Z'=0$

۴۷- گزینه ۲

درس‌نامه اگر ذره‌ای با بار q، از **نقطهٔ A تا B** جابه‌جا شود و کار نیروی میدان در این جابه‌جایی برابر W_E باشد:

- تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی ذره در این جابه‌جایی برابر است با: $\Delta U_E = -W_E$
- اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطهٔ A و B از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U_E}{q}$$

دقت کنید که در رابطهٔ بالا، q با علامتش جای‌گذاری می‌شود.

گام ۱ تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی برابر با منفی کار نیروی میدان است؛ پس:

$$\Delta U_E = -W_E = -20\,\mu J$$

گام ۲ برای نقاط A و B می‌توان نوشت:

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U_E}{q} \Rightarrow V_B - 6 = \frac{-20}{-5} \Rightarrow V_B = 10\,V$$

تله در درسنامه تأکید کردیم که در رابطهٔ $\Delta V = \frac{\Delta U_E}{q}$، q باید با علامتش جای‌گذاری شود. اگر به این موضوع توجه نکنید، جوابتان ۱ خواهد شد.

۴۸- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ در حرکت با شتاب ثابت a و سرعت اولیهٔ $v_\circ$، جابه‌جایی در ثانیهٔ n‌اُم از رابطهٔ مقابل محاسبه می‌شود: $\Delta x_{n\text{اُم}} = (n-0/5)a + v_\circ$

۲ در حرکت راست‌خط شتاب ثابت، سرعت متوسط در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، برابر سرعت متحرک در لحظهٔ وسط این بازه (یعنی لحظهٔ $\frac{t_1+t_2}{2}$) است؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$v_{av(t_1,t_2)} = v_{(\frac{t_1+t_2}{2})} \Rightarrow \frac{\Delta x_{(t_1,t_2)}}{t_2-t_1} = v_{(\frac{t_1+t_2}{2})}$$

روش ۱ با توجه به این‌که متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده و $v_\circ = 0$ است، به کمک رابطهٔ $\Delta x_{n\text{اُم}} = (n-0/5)a$ نسبت زیر را می‌نویسیم. بازهٔ زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 3\,s$ یعنی مجموع ثانیهٔ دوم و ثانیهٔ سوم و بازهٔ زمانی $t_2 = 3\,s$ تا $t_3 = 7\,s$ یعنی مجموع ثانیه‌های چهارم، پنجم، ششم و هفتم؛ بنابراین:

$$\frac{\Delta x_{(3\,s,7\,s)}}{\Delta x_{(1\,s,3\,s)}} = \frac{\text{جابه‌جایی ثانیهٔ هفتم} + \text{جابه‌جایی ثانیهٔ ششم} + \text{جابه‌جایی ثانیهٔ پنجم} + \text{جابه‌جایی ثانیهٔ چهارم}}{\text{جابه‌جایی ثانیهٔ سوم} + \text{جابه‌جایی ثانیهٔ دوم}}$$

$$\xrightarrow{\Delta x_{(1\,s,3\,s)} = 20\,m} \frac{\Delta x_{(3\,s,7\,s)}}{20} = \frac{3/5a + 4/5a + 5/5a + 6/5a}{1/5a + 2/5a}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x_{(3\,s,7\,s)}}{20} = \frac{20\cancel{a}}{4\cancel{a}} \Rightarrow \Delta x_{(3\,s,7\,s)} = 100\,m$$

روش ۲ **گام ۱** سرعت متحرک در لحظهٔ وسط دو بازهٔ زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 3\,s$ و $t_2 = 3\,s$ تا $t_3 = 7\,s$ را می‌نویسیم:

$$v = at + v_\circ \xrightarrow[v_\circ = 0]{t = \frac{3+1}{2} = 2\,s} v_{(2\,s)} = 2a$$

$$v = at' + v_\circ \xrightarrow[v_\circ = 0]{t' = \frac{3+7}{2} = 5\,s} v_{(5\,s)} = 5a$$

گام ۲ سرعت‌هایی که به دست آوردیم، برابر با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی‌شان است؛ یعنی:

$$v_{(2\,s)} = v_{av(1\,s,3\,s)} = \frac{\Delta x_{(1\,s,3\,s)}}{t_2 - t_1} \Rightarrow 2a = \frac{20}{3-1} \Rightarrow a = 5\,m/s^2$$

$$v_{(5\,s)} = v_{av(3\,s,7\,s)} = \frac{\Delta x_{(3\,s,7\,s)}}{t_3 - t_2} \Rightarrow 5a = \frac{\Delta x_{(3\,s,7\,s)}}{7-3}$$

$$\xrightarrow{a = 5\,m/s^2} \Delta x_{(3\,s,7\,s)} = 4\times 5\times 5 = 100\,m$$

حواستون باشه! چون حرکت با شتاب ثابت، از حال سکونه، تغییر جهت نداریم و مسافت و جابه‌جایی توی هر بازهٔ زمانی هم‌اندازه‌اند.

۴۹- گزینه ۱

شفاف‌سازی **در لحظهٔ t = 5 s، جهت حرکت تغییر کرده**: در $t = 5\,s$ نمودار در نقطهٔ اکسترمم است و در این لحظه سرعت متحرک صفر می‌شود.

درس‌نامه ۱ در حرکت راست‌خط شتاب ثابت جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

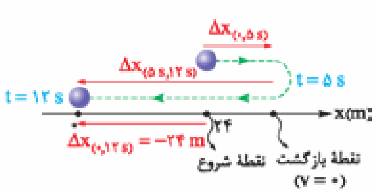
$$\Delta x_{(t_1,t_2)} = \frac{1}{2}a(t_2-t_1)^2 + v_1(t_2-t_1)$$

در رابطهٔ بالا، v_1 سرعت متحرک در لحظهٔ t_1 است.

۲ اگر در یک حرکت راست‌خط شتاب ثابت، سرعت نهایی متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، صفر باشد، برای محاسبهٔ جابه‌جایی می‌توانیم یک منفی در شتاب ضرب کنیم و سرعت اولیه را صفر فرض کنیم. (در واقع حرکت را برعکس می‌کنیم تا سرعت اولیه صفر شود.) در این صورت فرمول بالا به صورت زیر درمی‌آید:

اگر سرعت نهایی صفر باشد: $\Delta x_{(t_1,t_2)} = \frac{1}{2}(-a)(t_2-t_1)^2$

روش ۱ **گام ۱** در نمودار مکان ـ زمان معلوم است که جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۲ s برابر $-24\,m$ است. همچنین طبق گفتهٔ تست، سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 5\,s$ صفر شده و متحرک تغییر جهت داده است. در شکل (الف) بردارهای جابه‌جایی متحرک در بازه‌های زمانی صفر تا ۵ s، ۵ s تا ۱۲ s و صفر تا ۱۲ s را نشان داده‌ایم. برای این جابه‌جایی‌ها می‌توانیم بنویسیم:



(الف)

$$\Delta x_{(0,12\,s)} = \Delta x_{(0,5\,s)} + \Delta x_{(5\,s,12\,s)} \quad (I)$$

گام در رابطهٔ صفحهٔ قبل به جای $\Delta x_{(۰,۵s)}$ و $\Delta x_{(۵s,۱۲s)}$ معادله‌شان را از رابطهٔ جابه‌جایی ـ زمان (که در درس‌نامه گفتیم) قرار می‌دهیم. در بازهٔ زمانی ۵ s تا ۱۲ s، سرعت اولیهٔ متحرک صفر است. برای آن‌که سرعت اولیهٔ متحرک در بازهٔ صفر تا ۵ s هم صفر بشود، از مورد (۲) درس‌نامه استفاده می‌کنیم؛ یعنی حرکت را در این بازه برعکس فرض می‌کنیم؛ بنابراین:

$$\Delta x_{(۰,۵\,s)}=\frac{۱}{۲}(-a)\Delta t^{۲}_{(۰,۵\,s)} \quad و \quad \Delta x_{(۵\,s,۱۲\,s)}=\frac{۱}{۲}a\Delta t^{۲}_{(۵\,s,۱۲\,s)}$$

$$\text{رابطهٔ (I)} \Rightarrow -۲۴=\frac{۱}{۲}(-a)(۵-۰)^{۲}+\frac{۱}{۲}a(۱۲-۵)^{۲}$$

$$\Rightarrow -۲۴=-\frac{۲۵}{۲}a+\frac{۴۹}{۲}a \Rightarrow -۲۴=\frac{۲۴}{۲}a \Rightarrow a=-۲\,m/s^{۲}$$

گام برای محاسبهٔ مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی ۲ s تا ۱۰ s، باید مسافت طی‌شده در بازه‌های زمانی ۲ s تا ۵ s و ۵ s تا ۱۰ s را جدا جدا حساب و با هم جمع کنیم. (در بازهٔ زمانی ۲ s تا ۵ s، حرکت را برعکس می‌کنیم تا سرعت اولیه صفر شود.):

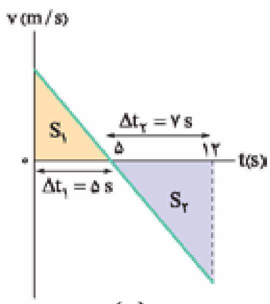
$$\ell_{(۲s,۱۰s)}=|\Delta x_{(۲s,۵s)}|+|\Delta x_{(۵s,۱۰s)}|=|\frac{۱}{۲}(-a)(۵-۲)^{۲}|+|\frac{۱}{۲}a(۱۰-۵)^{۲}|$$

$$=|\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۹|+|\frac{۱}{۲}\times(-۲)\times ۲۵|=۹+۲۵=۳۴\,m$$

گام فقط می‌ماند محاسبهٔ تندی متوسط در بازهٔ زمانی ۲ s تا ۱۰ s:

$$s_{av(۲s,۱۰s)}=\frac{\ell_{(۲s,۱۰s)}}{\Delta t}=\frac{۳۴}{۱۰-۲}=\frac{۱۷}{۴}\,m/s$$

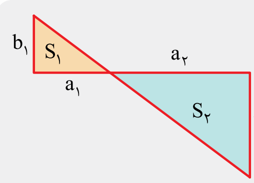
روش ۲ گام ابتدا مطابق شکل (ب)، نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم.



(ب)

گام

یادآوری در مثلث‌های متشابه، نسبت مساحت مثلث‌ها برابر با مجذور نسبت اضلاع متناظر است. مثلاً برای شکل روبه‌رو داریم:



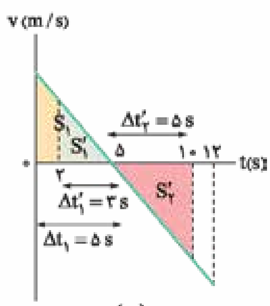
$$\frac{S_2}{S_1}=(\frac{a_2}{a_1})^{۲}=(\frac{b_2}{b_1})^{۲}$$

اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۲ s برابر ۲۴ m است. پس در نمودار (ب) $S_2-S_1=۲۴$ است. از تناسب مساحت‌ها و مجذور اضلاع متناظر در مثلث‌های متشابه کمک می‌گیریم و مقدار S_1 را حساب می‌کنیم:

$$\frac{S_2}{S_1}=(\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1})^{۲} \xrightarrow{\text{تفاضل مخرج در صورت}} \frac{S_2-S_1}{S_1}=\frac{\Delta t_2^{۲}-\Delta t_1^{۲}}{\Delta t_1^{۲}}$$

$$\xrightarrow{S_2-S_1=۲۴} \frac{۲۴}{S_1}=\frac{۷^{۲}-۵^{۲}}{۵^{۲}} \Rightarrow S_1=\frac{۲۵\times ۲۴}{۴۹-۲۵}=۲۵$$

گام حالا باید مسافت طی‌شده در بازه‌های زمانی ۲ s تا ۵ s و ۵ s تا ۱۰ s را پیدا کنیم. در شکل (پ)، مساحت‌های S'_1 و S'_2 بیانگر این مسافت‌ها است. یک بار دیگر از تناسب مساحت‌ها و مجذور اضلاع متناظر در مثلث‌های متشابه استفاده می‌کنیم.



(پ)

$$\frac{S'_1}{S_1}=(\frac{\Delta t'_1}{\Delta t_1})^{۲} \Rightarrow \frac{S'_1}{۲۵}=(\frac{۳}{۵})^{۲} \Rightarrow S'_1=۹$$

همچنین از آن‌جا که در شکل (پ) $\Delta t'_2$، برابر با Δt_1 است، نتیجه می‌گیریم: $S'_2=S_1=۲۵$

بنابراین مسافت پیموده‌شده در بازهٔ زمانی ۲ s تا ۱۰ s برابر می‌شود با:

$$\ell_{(۲s,۱۰s)}=S'_1+S'_2=۹+۲۵=۳۴\,m$$

تیزبازی می‌توانیم با یک تناسب هوشمندانه از مساحت‌ها و مجذور اضلاع متناظر، مستقیماً ℓ را حساب کنیم:

$$\frac{S'_1+S'_2}{S_1}=\frac{(\Delta t'_1)^{۲}+(\Delta t'_2)^{۲}}{(\Delta t_1)^{۲}} \Rightarrow \frac{\ell_{(۲s,۱۰s)}}{۲۵}=\frac{۳^{۲}+۵^{۲}}{۵^{۲}} \Rightarrow \ell_{(۲s,۱۰s)}=۳۴\,m$$

گام همانند گام سوم روش اول، تندی متوسط در بازهٔ زمانی ۲ s تا ۱۰ s را حساب می‌کنیم:

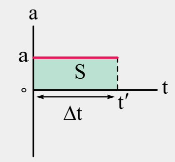
$$s_{av(۲s,۱۰s)}=\frac{\ell_{(۲s,۱۰s)}}{\Delta t}=\frac{۳۴}{۱۰-۲}=\frac{۱۷}{۴}\,m/s$$

۵۰- گزینهٔ ۱

استراتژی از روی نمودار شتاب ـ زمان، نمودار سرعت ـ زمان را رسم می‌کنیم و بعد گزینه‌ها را یکی‌یکی تحلیل می‌کنیم. درستی یا نادرستی (۱) را با توجه به علامت سرعت و شتاب مشخص می‌کنیم. (۲) و (۴) به مساحت محصور بین نمودار $v-t$ و محور t بستگی دارد و (۳) هم فقط به علامت سرعت وابسته است.

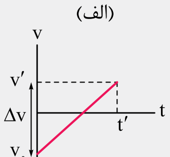
درس‌نامه (۱) **رسم نمودار سرعت ـ زمان از روی نمودار شتاب ـ زمان:**

در حرکت‌های راست‌خط شتاب ثابت، یکی از روش‌های سریع رسم نمودار سرعت ـ زمان، پیداکردن سرعت متحرک در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی مورد نظرمان است. برای این کار، نمودار شتاب ـ زمان (مانند شکل (الف)) به ما کمک می‌کند که با رابطهٔ $\Delta v=a\Delta t$ یا محاسبهٔ سطح زیر نمودار (S) تغییرات سرعت را حساب می‌کنیم: $\Delta v=S$



(الف)

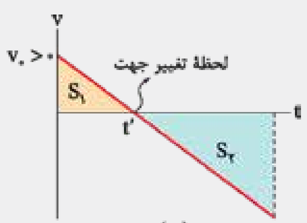
بنابراین اگر سرعت در یک لحظه (مثلاً سرعت اولیه) را در صورت سؤال به ما بدهند، به راحتی می‌توانیم سرعت در لحظه‌های دیگر (مثلاً سرعت در لحظهٔ t') را حساب کنیم و با رسم یک خط راست، نمودار سرعت ـ زمان را مانند شکل (ب) رسم کنیم.



(ب)

$$\Delta v=v'-v_0 \Rightarrow v'=\Delta v+v_0$$

(۲) شکل (پ) نمونه‌ای از نمودار سرعت ـ زمان متحرکی است که با شتاب ثابت بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند و در لحظه‌ای مانند t' تغییر جهت داده است. در این شکل، مساحت S_1 و S_2 بیانگر مسافت‌هایی است که متحرک قبل و بعد از تغییر جهت می‌پیماید. در این صورت جابه‌جایی کل و مسافت کل برحسب S_1 و S_2 به این صورت است:



(پ)

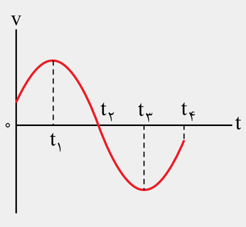
نمودار زیر محور t است.

$$\Delta x=S_1+(-S_2) \Rightarrow |\Delta x|=|S_2-S_1|$$

$$\ell=S_2+S_1$$

(۳) در بازهٔ زمانی که نمودار سرعت ـ زمان **بالای محور t** است، سرعت متحرک **در جهت محور x** و در بازهٔ زمانی که این نمودار **پایین محور t** قرار دارد، سرعت **در خلاف جهت محور x** است.

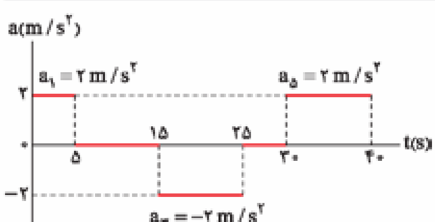
مثلاً در شکل (ت) در بازهٔ زمانی صفر تا t_2، سرعت در جهت محور x و در بازهٔ زمانی t_2 تا t_4، سرعت در خلاف جهت محور x است.



(ت)

(۴) در بازهٔ زمانی که نمودار سرعت ـ زمان **صعودی** است، شتاب **در جهت محور x** و در بازهٔ زمانی که این نمودار **نزولی** است، شتاب **در خلاف جهت محور x** است؛ مثلاً در شکل (ت)، در بازه‌های زمانی صفر تا t_1 و t_3 تا t_4، شتاب در جهت محور x و در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3، شتاب در خلاف جهت محور x است.

گام سرعت اولیهٔ متحرک $-۵\,m/s$ است. پس با توجه به نمودار شتاب ـ زمان روبه‌رو (شکل الف)، سرعت متحرک در لحظه‌های ۵ s، ۱۵ s، ۲۵ s، ۳۰ s و ۴۰ s را حساب می‌کنیم:



(الف)

بازهٔ زمانی صفر تا ۵ s (حرکت با شتاب ثابت $۲\,m/s^{۲}$):

$$v_{(۵s)}-v_0=a_1\Delta t_1 \xrightarrow[v_0=-۵\,m/s]{a_1=۲\,m/s^{۲}} v_{(۵s)}-(-۵)=۲\times(۵-۰) \Rightarrow v_{(۵s)}=۵\,m/s$$

بازهٔ زمانی ۵ s تا ۱۵ s (حرکت با سرعت ثابت): $v_{(۱۵\,s)} = v_{(۵\,s)} = ۵\,m/s$

بازهٔ زمانی ۱۵ s تا ۲۵ s (حرکت با شتاب ثابت $-۲\,m/s^۲$):

$$v_{(۲۵\,s)} - v_{(۱۵\,s)} = a_۲\Delta t_۲ \xrightarrow[v_{(۱۵\,s)}=۵\,m/s]{a_۲=-۲\,m/s^۲} v_{(۲۵\,s)} - ۵ = -۲\times(۲۵-۱۵)$$

$$\Rightarrow v_{(۲۵\,s)} = -۱۵\,m/s$$

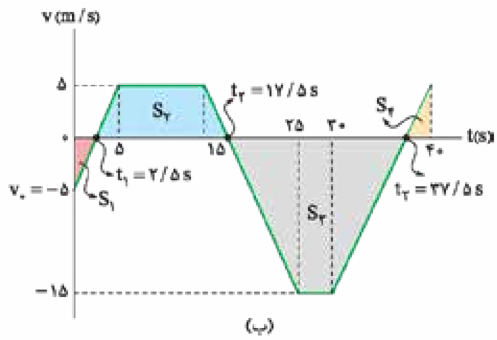
بازهٔ زمانی ۲۵ s تا ۳۰ s (حرکت با سرعت ثابت): $v_{(۳۰\,s)} = v_{(۲۵\,s)} = -۱۵\,m/s$

بازهٔ زمانی ۳۰ s تا ۴۰ s (حرکت با شتاب ثابت $۲\,m/s^۲$):

$$v_{(۴۰\,s)} - v_{(۳۰\,s)} = a_۵\Delta t_۵ \xrightarrow[v_{(۳۰\,s)}=-۱۵\,m/s]{a_۵=۲\,m/s^۲} v_{(۴۰\,s)} - (-۱۵) = ۲\times(۴۰-۳۰)$$

$$\Rightarrow v_{(۴۰\,s)} = ۵\,m/s$$

گام حالا با سرعت‌هایی که در گام اول محاسبه کردیم، می‌توانیم نمودار سرعت ـ زمان را به صورت شکل (ب) رسم کنیم. لحظه‌های برخورد نمودار با محور t را هم به کمک شیب نمودار در هر قسمت (یا شتاب حرکت) پیدا می‌کنیم (می‌دانید که در این لحظه‌ها سرعت صفر است.):



(ب)

$$\frac{v_{(۵\,s)} - v_۰}{۵-۰} = \frac{v_{t_۱} - v_۰}{t_۱ - ۰} \Rightarrow \frac{۵-(-۵)}{۵} = \frac{۰-(-۵)}{t_۱} \Rightarrow t_۱ = ۲/۵\,s$$

$$\frac{v_{(۲۵\,s)} - v_{(۱۵\,s)}}{۲۵-۱۵} = \frac{v_{t_۲} - v_{۱۵}}{t_۲ - ۱۵} \Rightarrow \frac{-۱۵-۵}{۱۰} = \frac{۰-۵}{t_۲-۱۵} \Rightarrow t_۲ = ۱۷/۵\,s$$

$$\frac{v_{(۴۰\,s)} - v_{(۳۰\,s)}}{۴۰-۳۰} = \frac{v_{t_۳} - v_{(۳۰\,s)}}{t_۳ - ۳۰} \Rightarrow \frac{۵-(-۱۵)}{۱۰} = \frac{۰-(-۱۵)}{t_۳-۳۰} \Rightarrow t_۳ = ۳۷/۵\,s$$

گام بررسی گزینه‌ها: ۱) در بازه‌های زمانی ۲/۵ s تا ۵ s و ۳۷/۵ s تا ۴۰ s سرعت و شتاب در جهت مثبت و در بازهٔ زمانی ۱۷/۵ s تا ۲۵ s سرعت و شتاب در جهت منفی‌اند. پس در کل ۱۲/۵ s، سرعت و شتاب هم‌جهت‌اند. ✗

۲) جابه‌جایی را با محاسبهٔ مساحت‌های محصور بین نمودار سرعت ـ زمان و محور t مشخص می‌کنیم:

$$\Delta x = -S_۱ + S_۲ - S_۳ + S_۴$$

$$= -(\frac{۲/۵\times۵}{۲}) + (\frac{۱۵+۱۰}{۲}\times۵) - (\frac{۲۰+۵}{۲}\times۱۵) + (\frac{۲/۵\times۵}{۲}) = -۱۲۵\,m$$

$$\Rightarrow |\Delta x| = ۱۲۵\,m \;✗$$

۳) در بازه‌های زمانی که نمودار سرعت ـ زمان **بالای محور t** است، علامت سرعت مثبت و جهت حرکت متحرک، در جهت مثبت محور x است؛ یعنی:

$$\Delta t = (۱۷/۵ - ۲/۵) + (۴۰ - ۳۷/۵) = ۱۷/۵\,s \;✗$$

۴) برای محاسبهٔ مسافت، سطح زیر نمودارها را با هم جمع می‌کنیم:

$$\ell = S_۱ + S_۲ + S_۳ + S_۴$$

$$= (\frac{۲/۵\times۵}{۲}) + (\frac{۱۵+۱۰}{۲}\times۵) + (\frac{۲۰+۵}{۲}\times۱۵) + (\frac{۲/۵\times۵}{۲}) = ۲۶۲/۵\,m \;✓$$

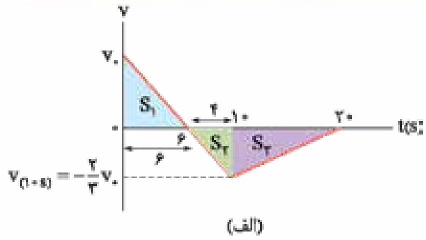
۵۱- گزینهٔ ۱

شفاف‌سازی **کل مسافت طی‌شده توسط متحرک ۱۳۸ m است:** مجموع مساحت‌های محصور بین نمودار سرعت ـ زمان و محور t برابر ۱۳۸ واحد است.

درس‌نامه شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود: ($v_۱$ و $v_۲$ به ترتیب سرعت متحرک در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ است.)

$$a_{av} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱}$$

گام **محاسبهٔ سرعت متحرک در لحظهٔ t = ۱۰ s برحسب $v_۰$:** در نمودار شکل (الف)، اگر سرعت اولیه را $v_۰$ بگیریم، به کمک تشابه مثلث‌های $S_۱$ و $S_۲$، سرعت در لحظهٔ ۱۰ s را برحسب $v_۰$ مشخص می‌کنیم:



(الف)

$$\frac{|v_{(۱۰\,s)}|}{v_۰} = \frac{۴}{۶} \Rightarrow |v_{(۱۰\,s)}| = \frac{۲}{۳}v_۰ \Rightarrow v_{(۱۰\,s)} = -\frac{۲}{۳}v_۰$$

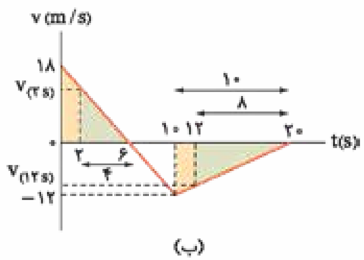
گام **محاسبهٔ $v_۰$ و $v_{(۱۰\,s)}$:** کل مسافت طی‌شده (۱۳۸ m) برابر با مجموع مساحت‌های محصور بین نمودار سرعت ـ زمان و محور t است؛ بنابراین می‌توانیم با برابر قراردادن مجموع مساحت‌های $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ با ۱۳۸، $v_۰$ و $v_{(۱۰\,s)}$ را حساب کنیم:

$$\ell = S_۱ + (S_۲ + S_۳) \Rightarrow ۱۳۸ = \frac{۶\times v_۰}{۲} + \frac{(۲۰-۶)\times\frac{۲}{۳}v_۰}{۲}$$

$$\Rightarrow ۱۳۸ = ۳v_۰ + \frac{۱۴}{۳}v_۰ \Rightarrow ۱۳۸ = \frac{۲۳}{۳}v_۰ \Rightarrow v_۰ = ۱۸\,m/s$$

$$v_{(۱۰\,s)} = -\frac{۲}{۳}v_۰ = -\frac{۲}{۳}\times۱۸ = -۱۲\,m/s$$

گام **محاسبهٔ سرعت متحرک در لحظه‌های $t_۱ = ۲\,s$ و $t_۲ = ۱۲\,s$:** به کمک قضیهٔ تالس (تشابه مثلث‌ها) در مثلث‌هایی که در شکل (ب) مشخص کردیم، سرعت در لحظه‌های ۲ s و ۱۲ s را پیدا می‌کنیم:



(ب)

$$\frac{v_{(۲\,s)}}{۱۸} = \frac{۴}{۶} \Rightarrow v_{(۲\,s)} = ۱۲\,m/s$$

$$\frac{|v_{(۱۲\,s)}|}{۱۲} = \frac{۸}{۱۰} \Rightarrow |v_{(۱۲\,s)}| = ۹/۶\,m/s \Rightarrow v_{(۱۲\,s)} = -۹/۶\,m/s$$

گام حالا شتاب متوسط را حساب می‌کنیم:

$$a_{av(۲\,s,۱۲\,s)} = \frac{v_{(۱۲\,s)} - v_{(۲\,s)}}{\Delta t} = \frac{-۹/۶-۱۲}{۱۲-۲} = -۲/۱۶\,m/s^۲$$

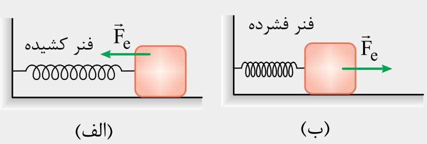
$$\Rightarrow |a_{av(۲\,s,۱۲\,s)}| = ۲/۱۶\,m/s^۲$$

۵۲- گزینهٔ ۳

درس‌نامه ۱) **قانون هوک:** اگر فنری نسبت به حالت عادی خود، به اندازهٔ x کشیده یا فشرده شود، فنر به جسم متصل به خود نیروی کشسانی وارد می‌کند که اندازهٔ آن از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$F_e = \underset{\text{ثابت فنر}}{\underbrace{k}}x$$

۲) فنر کشیده، جسم متصل به خود را می‌کشد و فنر فشرده، جسم متصل به خود را هل می‌دهد. شکل‌های مقابل را ببینید؛ در این شکل‌ها، $\vec{F}_e$ نیرویی است که فنر به جسم وارد می‌کند.

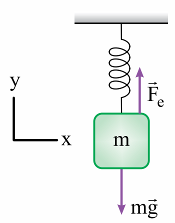


(ب) (الف)

۳) در حالتی که جسم روی سطحی در حال حرکت است (می‌لغزد)، نیروی اصطکاک وارد بر آن جنبشی و اندازهٔ آن برابر است با:

$$f_k = \overset{\text{اندازهٔ نیروی عمودی سطح}}{F_N}\,\mu_k \rightarrow \text{ضریب اصطکاک جنبشی}$$

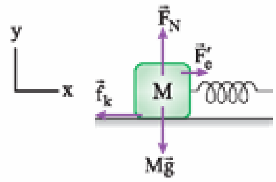
گام در حالت اول، نیروی کشسانی فنر با وزن جسم آویزان برابر است؛ پس:



$$\text{تعادل جسم در راستای محور y:} \quad F_e = mg \Rightarrow kx = mg$$

$$\xrightarrow{x=۱۰\,cm=۰/۱\,m} k\times۰/۱ = mg \quad (I)$$

گام ۲ در حالت دوم، ابتدا اندازهٔ نیروی عمودی سطح (F_N) و سپس اندازهٔ نیروی اصطکاک جنبشی (f_k) وارد بر جسم را حساب می‌کنیم:



تعادل جسم در راستای محور y: $F_N = Mg$

$f_k = F_N\mu_k = Mg\times ۰/۲ = ۰/۲\,Mg$

چون جسم با تندی ثابت حرکت می‌کند، داریم:

$$F'_e = f_k \Rightarrow kx' = ۰/۲\,Mg \xrightarrow{x'=۲\,cm=۰/۰۲\,m}$$

$$k\times ۰/۰۲ = ۰/۲\,Mg \Rightarrow k\times ۰/۱ = Mg \quad (II)$$

گام ۳ با توجه به نتایج گام‌های اول و دوم، یعنی رابطه‌های (I) و (II)، داریم:

$$\begin{cases} k\times ۰/۱ = mg \\ k\times ۰/۱ = Mg \end{cases} \Rightarrow m = M \Rightarrow \frac{M}{m} = ۱$$

تیزبازی فنر در حالت اول ۱۰ cm و در حالت دوم ۲ cm کشیده شده است. با توجه به این‌که رابطهٔ F_e برحسب x به صورت خطی است ($F_e = kx$)، به کمک تناسب زیر، نیروی کششی فنر در حالت دوم (F) را برحسب وزن وزنهٔ آویزان از آن (m)، به دست می‌آوریم:

F_e	x (cm)
mg	۱۰
F	۲

$$\Rightarrow F = \frac{۲\,mg}{۱۰} = \frac{mg}{۵}$$

در حالت دوم، تندی وزنهٔ M ثابت است؛ بنابراین F برابر با نیروی اصطکاک جنبشی وارد بر این وزنه است؛ یعنی:

$$F = f_k \Rightarrow F = F_N\mu_k \xrightarrow[F_N=Mg]{F=\frac{mg}{۵}} \frac{m\cancel{g}}{۵} = M\cancel{g}\times ۰/۲$$

$$\Rightarrow \frac{M}{m} = \frac{۱}{۵\times ۰/۲} = ۱$$

مشاوره بررسی تست‌های کنکور نشان می‌دهد که در فصل دینامیک، تست‌هایی که وضعیت جسم را در دو حالت بررسی می‌کنند بسیار رایج هستند. در حل این تست‌ها، سرعت عمل شما حرف اول را می‌زند.

۵۳- گزینهٔ ۲

درس‌نامه اگر در بازهٔ زمانی Δt، تغییر تکانهٔ جسم برابر Δp باشد، نیروی (خالص) متوسط وارد بر جسم در این بازهٔ زمانی برابر است با: $F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$

مشاوره قبل از حل سؤال، باید کمی دربارهٔ ایراد این تست کنکور صحبت کنیم. به گفتهٔ تست، شتاب جسم، ثابت و نمودار تکانه ـ زمان آن، یک منحنی غیرخطی است. دقت کنید که

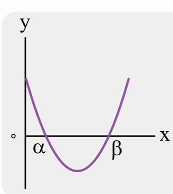
اولاً: از آن‌جایی که شتاب جسم ثابت است، سرعت آن برحسب زمان به صورت خطی تغییر می‌کند، یعنی $v = at + v_0$. حالا اگر جرم جسم را ثابت در نظر بگیریم، طبق رابطهٔ $p = mv$ تکانهٔ جسم هم به ناچار باید برحسب زمان به صورت خطی تغییر کند؛ یعنی نمودار داده‌شده، نمی‌تواند برای جسمی با جرم ثابت درست باشد.

ثانیاً: با فرض متغیربودن جرم جسم و درستی نمودار داده‌شده، باز هم تست با فرض‌های داده‌شده قابل حل نیست. مگر این‌که فرض کنیم نمودار داده‌شده یک سهمی است.

راستش را بخواهید ما حدس می‌زنیم که طراح کنکور حواسش نبوده و نمودار مکان ـ زمان حرکت با شتاب ثابت را که یک سهمی است، با نمودار تکانه ـ زمان در این تست اشتباه گرفته است *(توی تست‌های نمودار مکان ـ زمان فصل حرکت روی خط راست، وقتی می‌گیم متحرک با شتاب ثابت ... یعنی نمودار سهمیه. طراح این‌ها رو با اون‌ها اشتباه گرفته! یعنی ما فکر می‌کنیم طراح می‌خواسته بگه نمودار داده‌شده سهمیه، گفته حرکت با شتاب ثابته)؛ پس طراح جان کنکور، حواست باشه!*

گام ۱ ابتدا یادآوری زیر را بخوانید.

یادآوری در شکل مقابل، اگر ریشه‌های یک سهمی α و β باشد، معادلهٔ سهمی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید. در این رابطه k عدد ثابتی است که به کمک جای‌گذاری یکی از نقاط داده‌شده در نمودار به دست می‌آید: $y = k(x-\alpha)(x-\beta)$



با توجه به توضیحات گفته‌شده، با فرض این‌که نمودار داده‌شده، یک سهمی است، تست را حل می‌کنیم. ریشه‌های این سهمی $t_1 = ۲\,s$ و $t_2 = ۴\,s$ است؛ پس می‌توانیم معادلهٔ تکانه ـ زمان را در SI به صورت $p = k(t-۲)(t-۴)$ در نظر بگیریم که k یک عدد ثابت است. در لحظهٔ $t = ۰$، تکانه برابر ۱۶ $\frac{kg.m}{s}$ است؛ بنابراین می‌توانیم k را به دست بیاوریم.

$$p = k(t-۲)(t-۴) \xrightarrow[p=۱۶\frac{kg.m}{s}]{t=۰} ۱۶ = k\times(-۲)\times(-۴) \Rightarrow k = ۲$$

در نتیجه داریم: $p = ۲(t-۲)(t-۴)$

گام ۲ حالا با تعیین تکانهٔ جسم در لحظه‌های $t_1 = ۳\,s$ و $t_2 = ۵\,s$، نیروی خالص متوسط وارد بر جسم را در این بازهٔ زمانی به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} t_1 = ۳\,s \Rightarrow p_1 = ۲\times(۱)\times(-۱) = -۲\,\frac{kg.m}{s} \\ t_2 = ۵\,s \Rightarrow p_2 = ۲\times۳\times۱ = ۶\,\frac{kg.m}{s} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{۶-(-۲)}{۵-۳} = \frac{۸}{۲} = ۴\,N$$

۵۴- گزینهٔ ۴

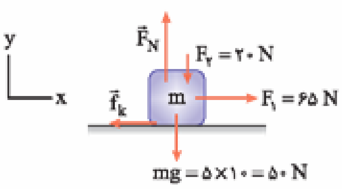
درس‌نامه ۱ **رابطهٔ مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت:** اگر طی جابه‌جایی Δx، تندی جسمی با شتاب ثابت a، از v_1 به v_2 برسد، داریم: $v_2^2 - v_1^2 = ۲a\Delta x$

۲ نیرویی که سطح (تکیه‌گاه) به جسم وارد می‌کند (R)، برایند نیروهای عمود بر هم اصطکاک (f) و عمودی سطح (F_N) است، که از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید: $R = \sqrt{F_N^2 + f^2}$

گام ۱ جسم ابتدا ساکن بوده و تندی آن پس از طی مسافت ۱۲ m به ۱۲ m/s رسیده است. بنابراین شتاب آن برابر است با:

$$v_2^2 - v_1^2 = ۲a\Delta x \Rightarrow ۱۲^۲ - ۰ = ۲\times a\times ۱۲ \Rightarrow a = ۶\,m/s^2$$

گام ۲ نیروهای وارد بر جسم را در شکل مقابل مشخص کرده‌ایم. با توجه به این شکل، اندازهٔ نیروهای عمودی سطح (F_N) و نیروی اصطکاک جنبشی (f_k) را به دست می‌آوریم:



تعادل جسم در راستای محور y: $F_N = F_2 + mg \Rightarrow F_N = ۲۰ + ۵۰ = ۷۰\,N$

در راستای محور x: $F_{net} = ma \Rightarrow F_1 - f_k = ma$

$$\Rightarrow ۶۵ - f_k = ۵\times ۶ \Rightarrow f_k = ۳۵\,N$$

گام ۳ حالا می‌توانیم نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند (R) را حساب کنیم:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_k^2} = \sqrt{۷۰^۲ + ۳۵^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{از ۳۵ فاکتور می‌گیریم.}} R = ۳۵\times\sqrt{۲^۲+۱^۲} = ۳۵\sqrt{۵}\,N$$

تیزبازی با یک بررسی ساده، معلوم می‌شود که $F_N = ۷۰\,N$ است. R حتماً باید از F_N بزرگ‌تر باشد. تنها ۴ این ویژگی را دارد.

۵۵- گزینهٔ ۱

درس‌نامه ۱ دورهٔ تناوب آونگ ساده‌ای به طول L از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

شکل نسبتی: $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$

۲ اگر دورهٔ تناوب آونگی برابر T باشد، تعداد نوسان‌ها در مدت t از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$n = \frac{t}{T}$$

گام ۱ دورهٔ تناوب را در حالت اولیه تعیین می‌کنیم: $T_1 = \frac{t_1}{n_1} = \frac{۳۶}{۲۰} = ۱/۸\,s$

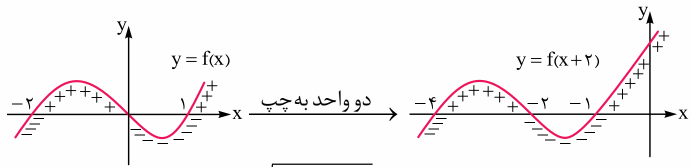
ریاضی

۱۱۱- گزینه ۱

استراتژی کافی است ابتدا نمودار $f(2+x)$ را رسم کرده و سپس نامعادلهٔ $-\frac{f(x)}{f(2+x)} \geq 0$ را به کمک تعیین علامت حل کنید.

درس‌نامه ۱ اگر $k > 0$ باشد، برای رسم $y=f(x+k)$، نمودار $y=f(x)$ را k واحد به سمت چپ و برای رسم $y=f(x-k)$، نمودار $y=f(x)$ را k واحد به سمت راست می‌بریم. ۲ برای به دست آوردن دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج، کافی است عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم: $\sqrt[2n]{A} \Rightarrow A \geq 0$

گام ۱ ابتدا با توجه به مورد (۱) درس‌نامه، نمودار $f(2+x)$ (یا همان $f(x+2)$) را رسم می‌کنیم:



گام ۲ برای به دست آوردن دامنهٔ $g(x)=\sqrt{-\frac{f(x)}{f(x+2)}}$، کافی است نامعادلهٔ $-\frac{f(x)}{f(2+x)} \geq 0$ را حل کنیم: $-\frac{f(x)}{f(2+x)} \geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} \frac{f(x)}{f(x+2)} \leq 0$

گام ۳ با توجه به نمودارها، ریشه‌های صورت و مخرج (محل برخورد توابع رسم‌شده با محور xها) را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{\overset{\text{ریشه‌ها: } -2,0,1}{f(x)}}{\underset{\text{ریشه‌ها: } -4,-2,-1}{f(x+2)}} \leq 0$$

حالا جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم: (دقت کنید علامت $f(x)$ و $f(2+x)$ را روی نمودار آن‌ها در گام (۱) مشخص کرده‌ایم.)

		−۴		−۲		−۱		۰		۱	
$f(x)$	−		−	۰	+		+	۰	−	۰	+
$f(2+x)$	−	۰	+	۰	−	۰	+		+		+
$\frac{f(x)}{f(2+x)}$	+	ت‌ن	−	ت‌ن	−	ت‌ن	+	۰	−	۰	+
			جواب		جواب				جواب		

دنبال قسمت‌های کوچک‌تر یا مساوی صفر بودیم که به صورت زیر می‌شود:

$$(-4,-2)\cup(-2,-1)\cup[0,1]$$

بنابراین دامنهٔ این تابع، شامل ۳ عدد صحیح ۳−، صفر و ۱ است.

۱۱۲- گزینه ۳

استراتژی

$$g(\underbrace{f(-\tfrac{5}{3})}_{\text{مرحله ۱}})$$
$$\underbrace{g(f(-\tfrac{5}{3}))}_{\text{مرحله ۲}}$$

گام ۱ $gof(-\frac{5}{3})$ یعنی $g(f(-\frac{5}{3}))$. ابتدا مقدار $f(-\frac{5}{3})$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=2[x]-x \Rightarrow f(-\tfrac{5}{3})=2\underbrace{[-\tfrac{5}{3}]}_{-2}-(-\tfrac{5}{3})=-4+\tfrac{5}{3}=-\tfrac{7}{3}$$

گام ۲ پس $g(f(-\frac{5}{3}))=g(-\frac{7}{3})$ می‌شود.

در ضابطهٔ g، جای xها $\frac{-7}{3}$ قرار می‌دهیم:

$$g(x)=f([x+f(x)]) \Rightarrow g(-\tfrac{7}{3})=f([-\tfrac{7}{3}+f(\tfrac{-7}{3})])$$

برای به دست آوردن $g(-\frac{7}{3})$، ابتدا باید مقدار $f(-\frac{7}{3})$ را محاسبه کنیم:

$$f(-\tfrac{7}{3})=2\underbrace{\left[-\tfrac{7}{3}\right]}_{-3}-(-\tfrac{7}{3})=-6+\tfrac{7}{3}=-\tfrac{11}{3}$$

گام ۳ حالا مقدار $g(-\frac{7}{3})$ را محاسبه می‌کنیم:

$$g(-\tfrac{7}{3})=f([-\tfrac{7}{3}+\underbrace{f(-\tfrac{7}{3})}_{-\frac{11}{3}}])=f([\underbrace{-\tfrac{7}{3}-\tfrac{11}{3}}_{-\frac{18}{3}=-6}])=f(-6)$$

گام ۴ در آخر کافی است مقدار $f(-6)$ را به دست آوریم تا جواب حاصل شود:

$$f(x)=2[x]-x \Rightarrow f(-6)=2[-6]-(-6)=-12+6=-6$$

۱۱۳- گزینه ۴

درس‌نامه در مستطیل طلایی، «نسبت مجموع طول و عرض به طول» با «نسبت طول به عرض» برابر است و عدد این نسبت $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ است:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\frac{\text{طول}}{\text{عرض}}=\frac{\text{طول}+\text{عرض}}{\text{طول}}$$

گام ۱ نسبت طول به عرض مستطیل اولیه $\frac{5}{4}$ است، پس طول را $5x$ و عرض را $4x$ در نظر می‌گیریم.

گام ۲ در مستطیل طلایی، نسبت طول به عرض $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است. عرض مستطیل دوم همان $4x$ است (چون عرض ثابت مانده). طولش باید $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ برابر عرضش باشد، یعنی $4x\times(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ است.

گام ۳ نسبت مساحت مستطیل طلایی به مساحت مستطیل اولیه برابر است با:

$$\frac{\text{طول جدید}\times\text{عرض جدید}}{\text{طول اولیه}\times\text{عرض اولیه}}=\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\cancel{x}\times\frac{1+\sqrt{5}}{\cancel{2}}\times\cancel{4}\cancel{x}}{5\cancel{x}\times\cancel{4}\cancel{x}}=\frac{2}{5}(1+\sqrt{5})=0/4(1+\sqrt{5})$$

۱۱۴- گزینه ۳

استراتژی ریشه‌های معادلهٔ $2ax^2+ax-6=0$ را α و β و ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-ax+b=0$ را $\alpha+\frac{1}{2}$ و $\beta+\frac{1}{2}$ در نظر می‌گیریم. کافی است مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های هر معادله را به دست آوریم تا به جواب برسیم.

درس‌نامه ۱ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$ با شرط $\Delta>0$ باشند، داریم:

ضرب ریشه‌ها: $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$ ‌ ‌ ‌ جمع ریشه‌ها: $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

۲ اگر در سؤالی دو معادلهٔ درجه‌دوم داشته باشیم که ریشه‌های آن‌ها برحسب یکدیگر باشند (مثلاً اگر در سؤال بگوید هر کدام از ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$، ۳ واحد از ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $a'x^2+b'x+c'=0$ کم‌تر است)، برای حل سؤال به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف) ابتدا ریشه‌های یکی از معادله‌ها را α و β در نظر بگیریم و S و P معادله را برحسب ضرایب محاسبه می‌کنیم. ب) حالا ریشه‌های معادلهٔ دیگر را برحسب α و β می‌نویسیم و S' و P' این معادله (S' همان جمع و P' همان ضرب ریشه‌های جدید است) را نیز برحسب ضرایب محاسبه می‌کنیم.

برای مثال اگر هر کدام از ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+ax+b=0$، دو برابر ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x+3=0$ باشد، برای محاسبهٔ a و b به صورت زیر عمل می‌کنیم:

فرض می‌کنیم ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x+3=0$، α و β هستند، پس:

$$\begin{cases}S=\alpha+\beta=5\\P=\alpha\beta=3\end{cases}$$

حالا هر کدام از ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+ax+b=0$، دو برابر ریشه‌های معادلهٔ دیگرند، پس ریشه‌های این معادله را 2α و 2β فرض می‌کنیم و داریم:

$$S'=2\alpha+2\beta=-\frac{a}{2} \Rightarrow 2\underbrace{(\alpha+\beta)}_{5}=-\frac{a}{2} \Rightarrow 10=-\frac{a}{2} \Rightarrow a=-20$$

$$P'=2\alpha\times2\beta=\frac{b}{2} \Rightarrow 4\underbrace{\alpha\beta}_{3}=\frac{b}{2} \Rightarrow 12=\frac{b}{2} \Rightarrow b=24$$

گام ۱ ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دومِ $2ax^2+ax-6=0$ را α و β در نظر می‌گیریم، پس:

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta=-\dfrac{\cancel{a}}{2\cancel{a}}=-\dfrac{1}{2} \\ P=\alpha\beta=\dfrac{-6}{2a}=-\dfrac{3}{a} \end{cases}$$

گام ۲ هر کدام از ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-ax+b=0$، نیم واحد از ریشه‌های معادلهٔ دیگر بیشترند، پس ریشه‌های این معادله $\alpha+\frac{1}{2}$ و $\beta+\frac{1}{2}$ می‌شوند.

اول مجموع ریشه‌های جدید را حساب می‌کنیم:

$$S'=(\alpha+\frac{1}{2})+(\beta+\frac{1}{2})=\frac{a}{2} \Rightarrow \underbrace{\alpha+\beta}_{-\frac{1}{2}}+1=\frac{a}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{a}{2} \Rightarrow a=1$$

ضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید را هم به دست می‌آوریم:

$$P'=(\alpha+\frac{1}{2})(\beta+\frac{1}{2})=\frac{b}{2} \Rightarrow \underbrace{\alpha\beta}_{-\frac{3}{a}}+\underbrace{\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta}_{\frac{1}{2}S=-\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}=\frac{b}{2} \Rightarrow -\frac{3}{a}=\frac{b}{2}$$

به جای a قرار می‌دهیم ۱:

$$-3=\frac{b}{2} \Rightarrow b=-6$$

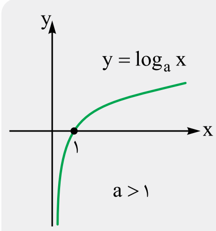
گام ۳ بنابراین جواب برابر است با:

$$\left[\frac{ab}{4}\right]=\left[\frac{1\times(-6)}{4}\right]=\left[-\frac{3}{2}\right]=-2$$

۱۱۵- گزینه ۲

استراتژی با توجه به این‌که f تابعی صعودی اکید است، کافی است در نامعادلهٔ $f(f(x))<f(x^5)$، با حذف fها، جهت نامعادله را تغییر ندهید.

درس‌نامه ❶ اگر $a>1$ باشد، تابع $y=\log_a x$ صعودی اکید می‌شود. نمودار این تابع به صورت مقابل است که با توجه به آن، به ازای $x>1$ حاصل تابع مثبت و به ازای $0<x<1$، حاصل تابع منفی است.



❷ اگر f و g دو تابع صعودی اکید باشند، $f+g$ نیز صعودی اکید می‌شود.

❸ اگر f تابعی صعودی اکید باشد، f^{2n+1} نیز تابعی صعودی اکید می‌شود. (یعنی اگر تابع به توان یک عدد فرد برسد، باز هم صعودی اکید می‌شود.)

❹ اگر f تابعی صعودی اکید باشد، داریم: $\alpha>\beta \Leftrightarrow f(\alpha)>f(\beta)$

گام ۱ $y=x$ و $y=\log x$ دو تابع صعودی اکیدند، پس جمع آن‌ها یعنی $x+\log x$ هم یک تابع صعودی اکید می‌شود. حالا طبق مورد (۳) درس‌نامه، $(x+\log x)^5$ نیز تابعی صعودی اکید است.

گام ۲ f تابعی صعودی اکید است، پس طبق مورد (۴) درس‌نامه داریم:

$$f(f(x))<f(x^5) \Rightarrow f(x)<x^5$$

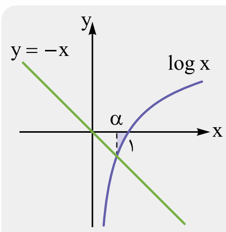
یعنی با حذف fها، جهت نامساوی تغییر نکرد.

گام ۳ حالا کافی است نامعادلهٔ $f(x)<x^5$ را حل کنیم. جای $f(x)$، ضابطه‌اش را می‌نویسیم:

$$f(x)<x^5 \Rightarrow (x+\log x)^5<x^5 \xrightarrow{\text{فرجه ۵}} x+\log x<x \Rightarrow \log x<0$$

طبق مورد (۱) درس‌نامه، $\log x$ در بازهٔ $(0,1)$ منفی است، پس مجموعه‌جواب نامعادلهٔ فوق بازهٔ $(0,1)$ می‌شود.

مشاوره بعضی سؤالات کنکور اشکال‌های فنی دارند ولی در جلسه و در حین حل، دانش‌آموزی متوجه آن نمی‌شود *(حتی خود طراح هم متوجهش نمی‌شه!)*. نمونه‌اش این تست که جواب درستش در گزینه‌ها نیست ولی سازمان سنجش هم آن را حذف نکرد! جواب درست سوال را ببینید:



$$D_{fof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}=\{x>0 \mid x+\log x>0\}$$
$$=\{x>0,\log x>-x\}$$

طبق نمودار بالا، جواب نهایی $(\alpha,1)$ می‌باشد که در گزینه‌ها نیست.

۱۱۶- گزینه ۴

شفاف‌سازی صفرهای تابع $y=2x^2-(m+2)x+m$ ⟵ ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-(m+2)x+m=0$

درس‌نامه ❶ برای به دست آوردن ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$، دو حالت خاص داریم:

الف) اگر $a+b+c=0$ باشد، یکی از ریشه‌ها $x=1$ و ریشهٔ دیگر $x=\frac{c}{a}$ است.

ب) اگر $a+c=b$ باشد، یکی از ریشه‌ها $x=-1$ و ریشهٔ دیگر $x=-\frac{c}{a}$ است.

❷ در تابع درجه‌دوم $y=ax^2+bx+c$:

الف) نقطهٔ تقاطع تابع با محور عرض‌ها $(0,c)$ است.

ب) طول رأس سهمی، $x=-\frac{b}{2a}$ است.

پ) اگر $a>0$ باشد، سهمی رو به بالا و اگر $a<0$ باشد، سهمی رو به پایین است.

❸ دوتا از ویژگی‌های قدرمطلق به صورت زیر است:

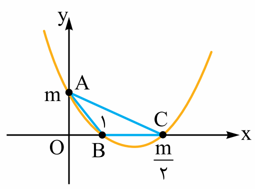
ب) $|x|=a \xrightarrow{a>0} \begin{cases} x=a \\ x=-a \end{cases}$

الف) $|x||y|=|xy|$

گام ۱ در معادلهٔ درجه‌دوم $2x^2-(m+2)x+m=0$، جمع ضرایب صفرند، پس طبق مورد (۱ـ الف) درس‌نامه، ریشه‌های این معادله $x=1$ و $x=\frac{m}{2}$ هستند.

گام ۲ نقطهٔ تقاطع تابع $y=2x^2-(m+2)x+m$ با محور عرض‌ها، طبق مورد (۲ـ الف) درس‌نامه، $(0,m)$ است.

گام ۳ حالا با توجه به نتایج به دست آمده در دو گام قبل و این‌که $a>0$ است، می‌توانیم شکل فرضی مقابل را برای این سهمی رسم کنیم: (دقت کنید! این سهمی را به شکل‌های دیگری هم حتی می‌توان رسم کرد، اما اصلاً اهمیتی ندارد، چون هدف ما از رسم سهمی این است که از صورت سؤال درک بهتری پیدا کنیم.)



گام ۴ با توجه به نمودار رسم‌شده، قاعدهٔ مثلث ABC برابر BC و طول ارتفاع آن برابر AO است. طول ضلع BC برابر $|\frac{m}{2}-1|$ *(خوب الان احتمالاً می‌پرسید که چرا قدرمطلق* $\frac{m}{2}-1$*، خودش مگر چه مشکلی داره؟ ببین ما گفتیم یه شکل فرضی رسم می‌کنیم، حالا توی شکلی که ما رسم کردیم* $\frac{m}{2}>1$ *ولی ممکنه* $\frac{m}{2}<1$ *باشه در هر حال طول ضلع BC برابر قدرمطلق تفاضل* $\frac{m}{2}$ *و ۱ یعنی* $|\frac{m}{2}-1|$ *می‌شه! با استدلال مشابه، طول AO هم برابر قدرمطلق m می‌شه.)* و طول ارتفاع AO برابر $|m|$ است، پس مساحت این مثلث برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}\text{قاعده}\times\text{ارتفاع} \Rightarrow \frac{3}{4}=\frac{1}{2}|\frac{m}{2}-1|\times|m| \xrightarrow{\times 2} |\frac{m}{2}-1|\times|m|=\frac{3}{2}$$

گام ۵ برای حل معادلهٔ فوق از مورد (۳) درس‌نامه کمک می‌گیریم:

$$\underbrace{|\frac{m}{2}-1|\times|m|}_{|(\frac{m}{2}-1)m|}=\frac{3}{2} \Rightarrow |\frac{m^2}{2}-m|=\frac{3}{2} \xrightarrow{\times 2} |m^2-2m|=3$$

پس عبارت داخل قدرمطلق ۳ یا ۳− است:

$$\begin{cases} m^2-2m=3 \Rightarrow m^2-2m-3=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m=-1 \\ m=+3 \end{cases} \\ m^2-2m=-3 \Rightarrow m^2-2m+3=0 \xrightarrow{\Delta<0} \text{ریشه ندارد.} \end{cases}$$

گام ۶ طول رأس سهمی $y=x^2-mx+1$ برابر با $x_S=\frac{-(-m)}{2}=\frac{m}{2}$ است.

به ازای $m=-1$ و $m=3$ به $x_S=\frac{-1}{2}$ و $x_S=\frac{3}{2}$ می‌رسیم که فقط اولی در گزینه‌ها وجود دارد.

۱۱۷- گزینه ۱

درس‌نامه ❶ یک تابع درجه‌دوم، در بازه‌هایی وارون‌پذیر است که طول رأس سهمی، جزء آن بازه‌ها نباشد. ❷ برای محاسبهٔ $f^{-1}(\alpha)$، کافی است معادلهٔ $f(x)=\alpha$ را حل کنیم که جواب آن همان $f^{-1}(\alpha)$ است.

گام ابتدا محدودهٔ دامنه‌ها را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} ۲x+۳\le ۰ \Rightarrow ۲x\le -۳ \Rightarrow x\le -\frac{۳}{۲} \\ ۲x+۳>۰ \Rightarrow ۲x>-۳ \Rightarrow x>-\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

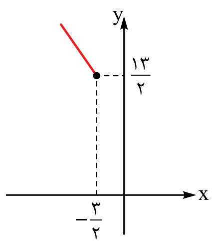
پس می‌توانیم ضابطهٔ f را به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} ۲-۳x & x\le -\frac{۳}{۲} \\ ۲+۲mx-x^۲ & x>-\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

گام طبق مورد (۱) درس‌نامه، سهمی $۲+۲mx-x^۲$ (یا همان $-x^۲+۲mx+۲$) در بازه‌ای وارون‌پذیر است که طول رأس در آن بازه نباشد. طول رأس این سهمی $m=\frac{-۲m}{-۲}=-\frac{b}{۲a}$ است. سهمی در بازهٔ $x>-\frac{۳}{۲}$ وارون‌پذیر است، اگر m در این بازه نباشد. m نباید عضو بازهٔ $(-\frac{۳}{۲},+\infty)$ باشد، پس m عضو بازهٔ $(-\infty,-\frac{۳}{۲}]$ می‌شود؛ یعنی:

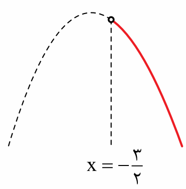
$m\le -\frac{۳}{۲}$

گام خط $۲-۳x$ با شرط $x\le -\frac{۳}{۲}$ را رسم می‌کنیم:

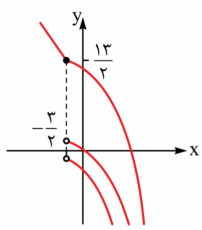


پس حداقل مقدار ضابطهٔ $۲-۳x$ برابر $\frac{۱۳}{۲}$ است.

گام حالا علاوه بر این‌که طول رأس سهمی نباید در بازهٔ $x>-\frac{۳}{۲}$ باشد، برای این‌که f وارون‌پذیر شود، حداکثر مقدار $۲+۲mx-x^۲$، باید کوچک‌تر مساویِ حداقل مقدار $۲-۳x$ باشد. رأس سهمی در بازهٔ $x>-\frac{۳}{۲}$ نیست، پس حداکثر مقدار $۲+۲mx-x^۲$ به ازای $x=-\frac{۳}{۲}$ رخ می‌دهد.



بیا این‌جا تا کاملاً مفهومی برات توضیح بدم. ببین توی بازهٔ $x\le -\frac{۳}{۲}$ که یه دونه خط داریم و رسمش کردیم، حالا ضریب $x^۲$ سهمی منفیه پس سهمی رو به پایین  *می‌شه ولی ما نمودار سهمی رو توی $x>-\frac{۳}{۲}$ می‌خواهیم. از طرفی توی گام (۲) دیدیم رأس سهمی نباید توی $x>-\frac{۳}{۲}$ باشه، پس طبیعتاً نمودار سهمی توی $x>-\frac{۳}{۲}$ به شکل روبه‌رو می‌شه:*



پس بیشترین مقدار سهمی رو توی $x=-\frac{۳}{۲}$ داریم. برای این‌که f یک‌به‌یک بشه، این بیشترین مقدار، باید از کم‌ترین مقدار ضابطهٔ $۲-۳x$ کم‌تر یا مساویش بشه که شکل نمودار به یکی از شکل‌های مقابل بشه تا f وارون‌پذیر باشه. (باید یکی از سهمی‌های سمت راست رو داشته باشیم.)

$$۲+۲mx-x^۲ \xrightarrow{x=-\frac{۳}{۲}} ۲-۳m-\frac{۹}{۴}=-۳m-\frac{۱}{۴}$$

این مقدار باید کوچک‌تر از $\frac{۱۳}{۲}$، یعنی حداقل مقدار $۲-۳x$ باشد:

$$-۳m-\frac{۱}{۴}\le\frac{۱۳}{۲}\xrightarrow{\times(-۱)}۳m+\frac{۱}{۴}\ge -\frac{۱۳}{۲}\Rightarrow ۳m\ge -\frac{۱۳}{۲}-\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow ۳m\ge -\frac{۲۷}{۴}\Rightarrow m\ge -\frac{۹}{۴}$$

گام با توجه به $m\le -\frac{۳}{۲}$ و $m\ge -\frac{۹}{۴}$ نتیجه می‌گیریم $-\frac{۹}{۴}\le m\le -\frac{۳}{۲}$ یا $-۲/۲۵\le m\le -۱/۵$ است. پس تنها مقدار صحیح m برابر ۲- است که به ازای آن، ضابطهٔ f به شکل مقابل می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases}۲-۳x & x\le -\frac{۳}{۲}\\ ۲-۴x-x^۲ & x>-\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

گام $f^{-۱}(-۱۹)$ را می‌خواهیم، پس کافی است معادلهٔ $f(x)=-۱۹$ را حل کنیم. واضح است که $۲-۳x$ نمی‌تواند برابر ۱۹- باشد (با توجه به نمودار آن که در گام (۳) رسم شده)، پس $۲-۴x-x^۲$ باید برابر ۱۹- شود:

$$۲-۴x-x^۲=-۱۹\Rightarrow x^۲+۴x-۲۱=۰\Rightarrow (x+۷)(x-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۳ \checkmark\\x=-۷ \times\end{cases}$$

دامنهٔ این ضابطه $x>-\frac{۳}{۲}$ است، پس فقط ۳ قبول است و در نتیجه: $f^{-۱}(-۱۹)=۳$

مشاوره این سؤال جزء تحلیلی‌ترین سؤالات کنکورهای جدید است. حتی اگر جوابتان درست است باز هم راه حل را بخوانید، چون ممکن است به ریزه‌کاری‌ها دقت نکرده باشید و با خوش‌شانسی به جواب درست رسیده باشید. *(البته بازم نوش جونتون!)*

۱۱۸- گزینهٔ ۴

استراتژی کافی است با توجه به این‌که $\log ۲\simeq ۰/۳$ و $\log ۳\simeq ۰/۴$ است، مقدار عددی ضرایبِ معادله را به دست آورید.

درس‌نامه بعضی از قوانین لگاریتم را در زیر ببینید:

الف) $\log_a a=۱$

ب) $\log_c ab=\log_c a+\log_c b$

پ) $\log_c\frac{a}{b}=\log_c a-\log_c b$

ت) $\log ۵=۱-\log ۲$

گام مقدار $\log ۳۰$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\log ۳۰=\log(۱۰\times ۳)=\log ۱۰+\log ۳=۱+۰/۴=۱/۴$$

گام مقدار $\log ۶$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\log ۶=\log(۲\times۳)=\log ۲+\log ۳=۰/۳+۰/۴=۰/۷$$

گام مقدار $\log\frac{۵}{۶}$ را هم محاسبه می‌کنیم: (با توجه به مورد (۱-ت) درس‌نامه و این‌که $\log ۲=۰/۳$ است، $\log ۵=۱-\log ۲=۰/۷$ می‌شود.)

$$\log\frac{۵}{۶}=\log ۵-\log ۶=۰/۷-۰/۷=۰$$

گام با جای‌گذاری مقادیر به دست آمده، به معادلهٔ درجه‌دوم زیر می‌رسیم:

$$x^۲\underbrace{(\log ۳۰)}_{۱/۴}+۲x\underbrace{\log ۶}_{۰/۷}-\underbrace{\log\frac{۵}{۶}}_{۰}=۰\Rightarrow ۱/۴x^۲+۱/۴x=۰$$

$$\Rightarrow ۱/۴x(x+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x_۱=۰\\x_۲=-۱\end{cases}$$

پس تفاضل ریشه‌ها برابر است با: $x_۱-x_۲=۰-(-۱)=۱$

این سؤال از لحاظ محتوایی کلاً غلطه، چون اگه $x=۰$ ریشهٔ این معادله باشه، باید $\log\frac{۵}{۶}=۰$ بشه که در واقعیت چنین چیزی غیر ممکنه!

۱۱۹- گزینهٔ ۳

استراتژی ابتدا با توجه به معادلهٔ $\tan x+\cot x=-۳$، حاصل $\sin x.\cos x$ را به دست آورید. بعد $\sin^۳ x+\cos^۳ x$ را با اتحاد چاق و لاغر باز کنید. در آخر کافی است حاصل $\sin x+\cos x$ را به دست آورید که بهترین راه این است که توان ۲ آن را محاسبه کنید.

درس‌نامه ۱ برخی از اتحادهای اولیهٔ مثلثاتی به شکل زیرند:

الف) $\sin^۲x+\cos^۲x=۱$

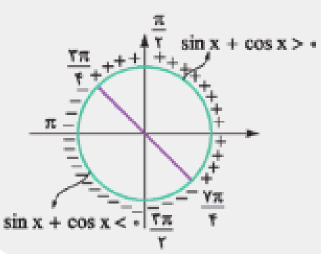
ب) $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

پ) $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$

۲ اتحاد چاق و لاغر به صورت زیر است:

$$A^۳\pm B^۳=(A\pm B)(A^۲\mp AB+B^۲)$$

۳ علامت $\sin x+\cos x$ در دایرهٔ مثلثاتی به شکل مقابل است:



گام ابتدا معادلهٔ $\tan x+\cot x=-۳$ را ساده می‌کنیم:

$$\tan x+\cot x=-۳ \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=-۳ \Rightarrow \frac{\sin^۲ x+\cos^۲ x}{\sin x.\cos x}=-۳$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\sin x.\cos x}=-۳ \Rightarrow \sin x.\cos x=-\frac{۱}{۳}$$

گام برای محاسبهٔ $\sin^۳ x+\cos^۳ x$، از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم:

$$\sin^۳ x+\cos^۳ x=(\sin x+\cos x)(\sin^۲ x-\sin x.\cos x+\cos^۲ x)$$

$$=(\sin x+\cos x)(\underbrace{\sin^۲ x+\cos^۲ x}_{۱}-\underbrace{\sin x.\cos x}_{-\frac{۱}{۳}})=\underbrace{\frac{۴}{۳}(\sin x+\cos x)}_{(I)}$$

گام حالا باید مقدار $\sin x+\cos x$ را محاسبه کنیم. قبل از محاسبهٔ آن دقت کنید $۳\pi<۴x<۴\pi$ است، پس $\frac{۳\pi}{۴}<x<\pi$ می‌شود که در آن‌جا (با توجه به مورد (۳) درس‌نامه) علامت $\sin x+\cos x$ منفی است. برای محاسبهٔ $\sin x+\cos x$ فرض می‌کنیم $\sin x+\cos x=A$ که در آن A منفی است. طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\underbrace{\sin^۲ x+\cos^۲ x}_{۱}+۲\underbrace{\sin x.\cos x}_{-\frac{۱}{۳}}=A^۲ \Rightarrow A^۲=\frac{۱}{۳} \xrightarrow{A<۰} A=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

گام بنابراین $\sin x+\cos x=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ است، حالا با جای‌گذاری در (I)، مقدار $\sin^۳ x+\cos^۳ x$ حاصل می‌شود:

$$\sin^۳ x+\cos^۳ x=\frac{۴}{۳}\times(-\frac{۱}{\sqrt{۳}})=-\frac{۴}{۳\sqrt{۳}}$$

پس حاصل عبارت خواسته‌شده برابر است با:

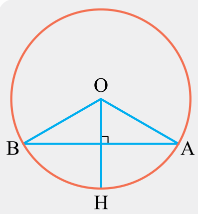
$$\frac{۱}{\sin^۳ x+\cos^۳ x}=-\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}=-۰/۷۵\sqrt{۳}$$

مشاوره تجربه ثابت کرده اگر دنبال $\sin x\pm\cos x$ بودیم یا حاصلش را داشتیم و چیز دیگری را می‌خواستیم، از توان ۲ رساندن استفاده کنیم.

۱۲۰- گزینهٔ ۱

استراتژی ابتدا با توجه به این‌که OD عمودمنصف AB و OH عمودمنصف AD است، اندازهٔ $A\hat{O}C$ به دست می‌آید. حالا می‌توانید به سادگی طول کمان AC را به دست آورید. بعد کافی است طول OH و CH را محاسبه کنید که برای این کار، کافی است از $\sin O\hat{A}H$ در مثلث OAH کمک بگیرید.

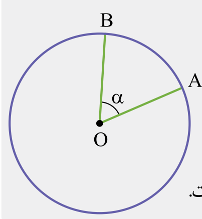
درس‌نامه



۱ اگر از مرکز دایره، عمودی (مثلاً عمود OH) را بر وتر AB رسم کنیم، دو زاویهٔ AOH و BOH با هم برابر می‌شوند، یعنی:

$$A\hat{O}H=B\hat{O}H=\frac{A\hat{O}B}{۲}$$

به عبارت دیگر می‌توانیم بگوییم OH عمودمنصف AB است.



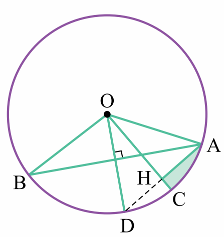
۲ اگر O مرکز دایره‌ای به شعاع r و $A\hat{O}B=\alpha$ باشد، طول کمان AB از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\overset{\frown}{AB}=r.\underset{\text{(برحسب رادیان)}}{\underset{\downarrow}{\alpha}}$$

۳ در مثلث قائم‌الزاویه، سینوس یک زاویهٔ حاده برابر با $\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$ است.

گام مساحت دایره‌ای به شعاع r، برابر $\pi r^۲$ است. مساحت این دایره π است، پس:

$$\cancel{\pi} r^۲=\cancel{\pi} \Rightarrow r^۲=۱ \Rightarrow r=۱$$



گام با توجه به شکل مقابل، OD عمودی بر وتر AB است، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، OD نیمساز زاویهٔ O می‌باشد. در نتیجه:

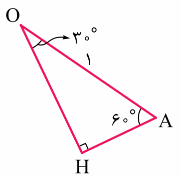
$$A\hat{O}D=\frac{۱۲۰^\circ}{۲}=۶۰^\circ$$

گام OH عمودمنصف AD است، پس $A\hat{H}O=۹۰^\circ$ و داریم:

$$A\hat{O}C=\frac{A\hat{O}D}{۲}=\frac{۶۰^\circ}{۲}=۳۰^\circ$$

گام حالا با توجه به این‌که $A\hat{O}C=۳۰^\circ=\frac{\pi}{۶}\,rad$ و با استفاده از مورد (۲) درس‌نامه، طول کمان AC را به دست می‌آوریم (شعاع دایره برابر ۱ است.):

$$\overset{\frown}{AC}=r.\alpha=۱\times\frac{\pi}{۶}=\frac{\pi}{۶}$$



گام در مثلث AOH، زاویهٔ AHO برابر ۹۰° و زاویهٔ AOH برابر ۳۰° است، پس $O\hat{A}H=۶۰^\circ$ می‌شود. از طرفی AO شعاع دایره است، پس $AO=۱$ می‌شود. حالا برای محاسبهٔ طول OH داریم:

$$\sin\hat{A}=\frac{OH}{OA} \Rightarrow \sin ۶۰^\circ=\frac{OH}{۱} \Rightarrow OH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

گام OC هم شعاع دایره است، پس طول آن هم برابر ۱ می‌شود. حالا می‌توانیم طول CH را به دست آوریم:

$$CH=OC-OH=۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

گام در آخر اختلاف محیط مثلث AOH و محیط قسمت سایه زده شده را به دست می‌آوریم:

$$\underbrace{AO+OH+\cancel{AH}}_{\text{محیط مثلث AOH}}-\underbrace{(\overset{\frown}{AC}+CH+\cancel{AH})}_{\text{محیط قسمت سایه زده شده}}$$

$$=AO+OH-\overset{\frown}{AC}-CH=\cancel{۱}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\pi}{۶}-(\cancel{۱}-\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۶}$$

۱۲۱- گزینهٔ ۲

درس‌نامه

۱ فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$

۲ فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر است با:

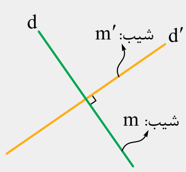
$$AH=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

۳ برای به دست آوردن محل تقاطع دو خط $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$، کافی است دستگاه دو معادله و دو مجهول مقابل را حل کنیم:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

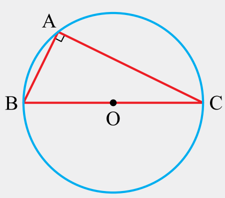
۴ شیب خط $ax+by=c$ برابر است با:

$$\frac{\text{قرینهٔ ضریب } x}{\text{ضریب } y}=-\frac{a}{b}$$

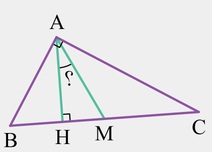


۵ اگر دو خط d و d' بر هم عمود باشند، حاصل‌ضرب شیب‌هایشان -۱ می‌شود:

$$\Rightarrow m.m'=-۱$$



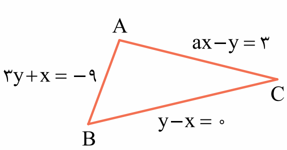
۶ اگر مرکز دایرهٔ گذرنده از ۳ رأس مثلث ABC، روی یکی از اضلاع مثلث باشد، مثلث ABC قائم‌الزاویه می‌شود و وتر هم همان ضلعی است که مرکز روی آن قرار دارد:



۷ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، زاویهٔ بین ارتفاع وارد بر وتر و میانهٔ وارد بر وتر برابر با قدرمطلق اختلاف دو زاویهٔ حادهٔ مثلث است:

$$H\hat{A}M=|\hat{B}-\hat{C}|$$

۸ در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است.



گام ابتدا یک شکل فرضی برای مسئله رسم می‌کنیم: (محل تقاطع دو خط $۳y+x=-۹$ و $ax-y=۳$، رأس A و محل تقاطع این دو خط با خط $y-x=۰$ به ترتیب رأس B و C است.)