فهرست

۱ مبانی احتمال

فرض کنید برای انجام یک کار مطالعاتی دربارهٔ دانش‌آموزان یک شهر ابتدا باید پاسخ سؤالات زیر را به دست آوریم:

۱ تعداد مدارس این شهر چندتا است و هر مدرسه به طور متوسط چند دانش‌آموز دارد؟

۲ توزیع دانش‌آموزان در مقاطع مختلف تحصیلی چگونه است و کدام مقاطع بیشترین و کدام کم‌ترین تعداد دانش‌آموز را دارند؟

۳ چند درصد دانش‌آموزان، معدل بالای ۱۹ دارند، چند درصد ورزشکار یا چند درصد المپیادی‌اند؟

۴ میزان رشد تعداد دانش‌آموزان در هر سال، نسبت به سال‌های قبل چگونه بوده است و تعداد دانش‌آموزان سال آینده را چه‌طور می‌توان پیش‌بینی کرد؟

و ...

گاهی ممکن است تعداد دانش‌آموزان یک شهر بسیار زیاد باشد و جواب‌دادن به سؤالات بالا کار آسانی نباشد. «جمع‌آوری»، «دسته‌بندی» و «ارائه» اطلاعات بالا کار «علم آمار» است. آمارگیران به کمک علم آمار می‌توانند اطلاعات موردنیاز مربوط به امسال و سال‌های گذشته را جمع‌آوری کرده و حتی میزان رشد و یا کاهش اعداد و ارقام به دست آمده را برای سال‌های آینده پیش‌بینی کنند. جمع‌آوری این اطلاعات در علم آمار به روش‌های مختلف آماری و از طریق سرشماری، نمونه‌گیری و ... انجام می‌گیرد، بنابراین:

> علم آمار علم شناختن جامعهٔ نامعلوم با استفاده از نمونه‌های جمع‌آوری‌شدهٔ معلوم است.

حالا فرض کنید به کمک علم آمار، پاسخ سؤالات خود را پیدا کرده‌ایم و یک شناخت کلی نسبت به وضعیت دانش‌آموزان و مدارس شهر موردنظر داریم. مثلاً: فرض کنید در شهری که بررسی‌شده ۱۰ مدرسه وجود داشته باشد، می‌خواهیم ۵ نفر از دانش‌آموزان را به تصادف انتخاب کرده و آن‌ها را برای مسابقات المپیاد علمی و ورزشی اعزام کنیم. کدام روش زیر برای انتخاب این ۵ نفر بهتر است؟

۱ نام همهٔ دانش‌آموزان شهر را در یک کیسه بریزیم و نام ۵ نفر را به قید قرعه انتخاب کنیم؟

۲ اول ۵ مدرسه از ۱۰ مدرسه را به تصادف انتخاب کنیم؛ حالا از هر کدام از این ۵ مدرسه یک نفر به قید قرعه انتخاب کنیم؟

۳ همان اول کار، یک مدرسه را به تصادف انتخاب کنیم و بعد ۵ نفر را به تصادف از آن مدرسه انتخاب کنیم؟

در کدام‌یک از حالت‌های بالا، شانس انتخاب‌شدن دانش‌آموزان المپیادی در گروه ۵ نفره بیشتر است؟

در این مسئله ما با یک جامعهٔ معلوم یعنی دانش‌آموزان شهر که قبلاً اطلاعات آن‌ها را استخراج کرده بودیم، سروکار داریم. اما وضعیت «نمونهٔ انتخاب‌شده» یعنی ۵ نفری که انتخاب می‌شوند، برای ما نامعلوم است و ما باید با استفاده از روش‌های علم احتمال تشخیص دهیم کدام روش انتخاب بهتر است؟

علم احتمال به ما «بهترین تصمیم» را معرفی می‌کند، بنابراین:

> علم احتمال، علم بررسی یک نمونهٔ نامعلوم (مثل ۵ نفر انتخاب‌شده) از یک جامعهٔ معلوم (مثل دانش‌آموزان شهر) می‌باشد.

لپ کلام: اگر اعضای یک جامعه و خصوصیات آن‌ها کلاً برای ما نامعلوم باشد، روش‌های آماری با جمع‌آوری و دسته‌بندی اطلاعات مختلف دربارهٔ این جامعه، این جامعه را به ما می‌شناساند، اما وقتی بخواهیم در این جامعهٔ معلوم و شناخته‌شده شانس وقوع پیشامدی را به دست بیاوریم، از احتمال کمک می‌گیریم. مثلاً دو کارخانهٔ ایران‌خودرو و سایپا را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم بدانیم هر کدام از این کارخانه‌ها در سال چند نوع خودرو و از هر کدام چندتا تولید می‌کنند و چند درصد از محصولات آن‌ها در سال معیوب یا سالم است، از علم آمار کمک می‌گیریم، اما وقتی بعد از معلوم‌شدن وضعیت تولیدات کارخانه، بخواهیم یک نمونه از محصولات کارخانه را بررسی کنیم مثلاً به تصادف از هر کدام از کارخانه‌ها ۱۰ خودرو انتخاب کنیم و بخواهیم بدانیم «شانس سالم‌بودن این خودروها در کدام کارخانه بیشتر است؟»، از علم احتمال کمک می‌گیریم.

تعاریف احتمال

آزمایش یا پدیدهٔ تصادفی

در پرتاب یک سکه انتظار داریم که یکی از حالت‌های «رو» یا «پشت» ظاهر شود و در پرتاب یک تاس نیز می‌دانیم که یکی از اعداد ۱ تا ۶ رخ خواهد داد، اما در هیچ‌یک از این مثال‌ها، قبل از فرودآمدن سکه یا تاس نمی‌توان نتیجهٔ قطعی را پیش‌بینی کرد.

آزمایش‌هایی (مثل آزمایش‌های بالا) را که نتیجهٔ آن‌ها قبل از انجام آزمایش یا مشاهده به طور قطعی قابل پیش‌بینی نیستند را «**آزمایش یا پدیدهٔ تصادفی**» می‌گوییم.

در پدیده‌های تصادفی مجموعه حالت‌هایی که ممکن است پس از انجام آزمایش اتفاق بیفتد معلوم است، اما تا وقتی که آزمایش انجام نشده باشد، نمی‌توانیم بگوییم کدام‌یک از حالت‌ها ظاهر خواهد شد.

فضای نمونه

مجموعهٔ تمام نتایج ممکن در هر مشاهده یا آزمایش تصادفی را «**فضای نمونهٔ**» آن آزمایش تصادفی می‌نامیم و معمولاً آن را با S نمایش می‌دهیم. هر عضو فضای نمونه را یک «**برآمد**» می‌گوییم.

مثلاً فضای نمونهٔ پرتاب یک تاس $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و فضای نمونهٔ پرتاب یک سکه $S=\{\text{پشت},\text{رو}\}$ است.

نکته

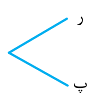
اگر آزمایشی شامل دو یا چند آزمایش با فضاهای نمونهٔ $S_۱$، $S_۲$، ... و S_n باشد، فضای نمونهٔ کلی طبق اصل ضرب به صورت $S_۱\times S_۲\times\cdots\times S_n$ است.

مثلاً در پرتاب دو تاس فضای نمونه به‌صورت: $S_۱\times S_۲=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\times\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ می‌باشد که دارای $|S_۱\times S_۲|=۶\times ۶=۳۶$ عضو است و در پرتاب یک سکه و سپس یک تاس فضای نمونه به‌صورت: $S_۱\times S_۲=\{\text{ر},\text{پ}\}\times\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}=\{(\text{ر},۱),(\text{ر},۲),\ldots,(\text{ر},۶),(\text{پ},۱),(\text{پ},۲),\ldots,(\text{پ},۶)\}$ خواهد بود که تعداد اعضای آن $|S_۱\times S_۲|=۲\times ۶=۱۲$ تا است.

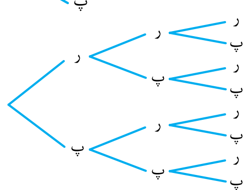
مثال فضای نمونه را در هر یک از موارد زیر مشخص کرده و تعداد اعضای آن را تعیین کنید؟

۱) پرتاب یک سکه ۲) پرتاب سه سکه ۳) پرتاب دو تاس ۴) پرتاب یک سکه و یک تاس

پاسخ

۱ 

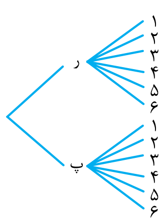
$S=\{\text{ر},\text{پ}\},\ n(S)=۲$

۲ 

$$\begin{cases} S=S_۱\times S_۲\times S_۳=\{\text{ر},\text{پ}\}\times\{\text{ر},\text{پ}\}\times\{\text{ر},\text{پ}\} \\ S=\{(\text{ر},\text{ر},\text{ر}),(\text{ر},\text{ر},\text{پ}),(\text{ر},\text{پ},\text{ر}),(\text{پ},\text{ر},\text{ر}),(\text{پ},\text{پ},\text{ر}),(\text{پ},\text{ر},\text{پ}),(\text{ر},\text{پ},\text{پ}),(\text{پ},\text{پ},\text{پ})\} \\ |S|=\overset{\text{سکهٔ اول}}{|S_۱|}\times\overset{\text{سکهٔ دوم}}{|S_۲|}\times\overset{\text{سکهٔ سوم}}{|S_۳|}=۲\times۲\times۲=۸ \end{cases}$$

۳

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\times\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}=\begin{Bmatrix}(۱,۱),(۱,۲),\ldots,(۱,۶)\\(۲,۱),(۲,۲),\ldots,(۲,۶)\\\vdots\quad\vdots\quad\vdots\\(۶,۱),(۶,۲),\ldots,(۶,۶)\end{Bmatrix}\qquad |S|=\overset{\text{تاس اول}}{|S_۱|}\times\overset{\text{تاس دوم}}{|S_۱|}=۶\times۶=۳۶$$

۴ 

$$\begin{cases} S=\{\text{ر},\text{پ}\}\times\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}=\{(\text{ر},۱),(\text{ر},۲),\ldots,(\text{ر},۶),(\text{پ},۱),(\text{پ},۲),\ldots,(\text{پ},۶)\} \\ |S|=\overset{\text{یک سکه}}{|S_۱|}\times\overset{\text{یک تاس}}{|S_۲|}=۲\times۶=۱۲ \end{cases}$$

مثال **تعداد اعضای فضای نمونه را در هر یک از حالات زیر بیابید.**

۱) پرتاب n سکه **۲) پرتاب m تاس** **۳) پرتاب n سکه و m تاس**

پاسخ فضای نمونهٔ پرتاب یک سکه $S_1=\{\text{پشت},\text{رو}\}$ و فضای نمونهٔ پرتاب یک تاس $S_2=\{1,2,3,4,5,6\}$ می‌باشد، بنابراین داریم:

۱ تعداد اعضای فضای نمونهٔ پرتاب n سکه: $|S_1\times S_1\times\cdots\times S_1|=\overset{\text{سکهٔ اول}}{2}\times\overset{\text{سکهٔ دوم}}{2}\times\cdots\times\overset{\text{سکهٔ n ام}}{2}=2^n$

۲ تعداد اعضای فضای نمونهٔ پرتاب m تاس: $|S_2\times S_2\times\cdots\times S_2|=\overset{\text{تاس اول}}{\boxed{6}}\times\overset{\text{تاس دوم}}{\boxed{6}}\times\cdots\times\overset{\text{تاس m ام}}{\boxed{6}}=6^m$

۳ تعداد اعضای فضای نمونه در پرتاب n سکه و m تاس: $|\underbrace{S_1\times S_1\times\cdots\times S_1}_{\text{n سکه}}\times\underbrace{S_2\times S_2\times\cdots\times S_2}_{\text{m تاس}}|=\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{\text{n سکه}}\times\underbrace{\boxed{6}\times\boxed{6}\times\cdots\times\boxed{6}}_{\text{m تاس}}=2^n\times6^m$

پیشامد تصادفی

هر زیرمجموعه از فضای نمونه را یک **پیشامد تصادفی** می‌گویند.

مثلاً در پرتاب یک تاس، مجموعهٔ $A=\{2,4,6\}$ پیشامد زوج‌آمدن و مجموعهٔ $B=\{2,3,5\}$ پیشامد اول‌آمدن تاس بوده و هر دو زیرمجموعه‌هایی از فضای نمونهٔ پرتاب یک تاس یعنی $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ می‌باشند.

نتیجه ۱ **وقتی می‌گوییم پیشامد A رخ داده، یعنی نتیجه (برآمد) آزمایش، عضوی از پیشامد A بوده است.**

۲ **اگر A_1 زیرمجموعهٔ A_2 باشد، رخدادن A_1 رخدادن A_2 را نتیجه می‌دهد.**

۳ **رخدادن پیشامد $A_1\cap A_2$ یعنی هر ۲ پیشامد A_1 و A_2 رخ داده‌اند.**

۴ **رخدادن پیشامد $A_1\cup A_2$ یعنی دست کم یکی از دو پیشامد A_1 و A_2 رخ داده‌اند.**

سؤال‌های امتحانی

جملات زیر را کامل کنید.

۱- شناختن جامعهٔ نامعلوم با استفاده از نمونه‌های جمع‌آوری‌شدهٔ معلوم را علم .... می‌گویند.

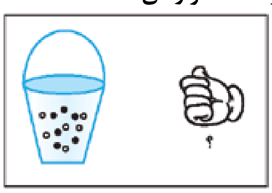
۲- بررسی یک نمونهٔ نامعلوم از یک جامعهٔ معلوم کار علم .... است.

۳- مجموعهٔ تمام نتایج ممکن در هر مشاهده یا آزمایش تصادفی را .... گویند و به هر عضو از فضای نمونه یک .... می‌گوییم. هم‌چنین به هر زیرمجموعه از فضای نمونه یک .... می‌گوییم.

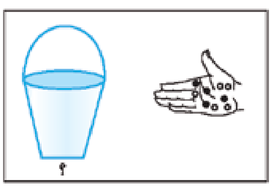
۴- یک رانندهٔ تاکسی در مسیر رفت و برگشت هر کدام حداکثر ۴ مسافر را سوار می‌کند. تعداد اعضای فضای نمونه اگر تعداد مسافرها برای ما مهم باشد، برابر است با ....

۵- گزارهٔ «برای هر آزمایش تصادفی تنها یک نوع فضای نمونه می‌توان نوشت.» گزاره‌ای .... است. (درست ـ نادرست)

۶- کدام‌یک نشان‌دهندهٔ علم آمار و کدام‌یک نشان‌دهندهٔ علم احتمال است؟



شکل ۱



شکل ۲

۷- کدام‌یک از سؤالات زیر مربوط به علم آمار و کدام مربوط به علم احتمال است؟ *(مشابه کتاب درسی)*

الف) از ۲۰۰ لامپ موجود در جعبه ۱۰تای آن کم‌مصرف و بقیه معمولی است. چند لامپ برداریم تا مطمئن باشیم دست کم یک لامپ کم‌مصرف برداشته‌ایم؟

ب) مردم تهران به چه نوع تفریحاتی علاقه‌مند هستند؟

پ) در یک مدرسه ۴ کلاس ۳۰ نفره و در هر کلاس ۱۰ نفر المپیادی‌اند، اگر ۳ نفر برداریم با چه شانسی حداقل یکی از آن‌ها المپیادی است؟

ت) چه تعداد از کارمندان شرکت نفت حقوق ماهیانه بالای ۲۰ میلیون تومان دارند؟

ث) اگر ۸۰٪ مردم در انتخابات شرکت کرده باشند، اگر از ۱۰ نفر بپرسیم: «آیا در انتخابات شرکت کرده‌اند یا نه؟» چه‌قدر ممکن است پاسخ بیش از یک نفر منفی باشد؟

ج) در جعبه‌ای که پر از گوی‌های ریز رنگی است، چه رنگی از همه بیشتر و چه رنگی از همه کم‌تر است؟

چ) در جعبه‌ای که پر از گوی‌های ریز رنگی است، می‌دانیم ۲۰٪ گوی‌ها سفید، ۳۰٪ قرمز، ۴۰٪ آبی و ۱۰٪ سبز هستند، اگر ۳ گوی برداریم، چه‌قدر ممکن است گوی اول سفید و دو گوی دیگر سبز باشند؟

۸- در پرتاب یک تاس می‌دانیم پیشامد «اول‌آمدن» رخ داده است. چند پیشامد از فضای نمونه رخ داده‌اند؟

۹- احمد و عباس یک بار با هم سنگ، کاغذ، قیچی بازی می‌کنند: *(مشابه کتاب درسی)*

الف) فضای نمونهٔ مناسب برای این بازی چیست؟ **ب) پیشامد شامل حالت‌های برد احمد را بنویسید.**

۱۰- وضعیت هوا در یک لحظه، از نظر دما (سرد یا گرم)، رطوبت (خشک یا مرطوب)، وزش باد (می‌وزد، نمی‌وزد) ابری‌بودن (صاف، نیمه‌ابری، ابری)، بارندگی (بارانی، غیربارانی) بررسی می‌شود.

الف) فضای نمونه برای وضعیت هوا در یک لحظه چند عضو دارد؟ آن را به صورت ضرب دکارتی چند مجموعه بنویسید. *(مشابه کتاب درسی)*

ب) فرض کنید الان دارد باران می‌بارد. چندتا از پیشامدهای فضای نمونه رخ داده است؟

۱۱- تیم والیبال ۱۴ عضو دارد که قد هیچ ۲ نفری برابر نیست، اگر برای ما فقط ترتیب قد آن‌ها اهمیت داشته باشد، فضای نمونهٔ مناسب چیست؟ اگر اعضای تیم کاملاً تصادفی وارد سالن شده باشند، احتمال این‌که: *(مشابه کتاب درسی)*

الف) اولین کسی که وارد می‌شود، کوتاه‌قدترین عضو تیم باشد چه‌قدر است؟

ب) اولین نفر کوتاه‌ترین و آخرین نفر بلندترین نفر باشد، چه‌قدر است؟

پ) افراد به ترتیب قد وارد می‌شوند.

۱۲- ۱۰ نفر با شماره‌های ۱ تا ۱۰ در مسابقه‌ای شرکت کرده‌اند، مطلوب است احتمال این‌که:

الف) افراد با شماره‌های ۱ تا ۳ بلافاصله به خط پایان برسند.

ب) هیچ دو فرد با شماره‌های مضرب ۳ پشت سر هم از خط پایان عبور نکنند.

پ) فرد شمارهٔ ۱ بین فرد شمارهٔ ۵ و ۹ به خط پایان برسد. (نه لزوماً بلافاصله)

۱۳- ۵ سکه را پرتاب می‌کنیم. تعداد «روها» را می‌شماریم. فضای نمونهٔ این آزمایش تصادفی را بنویسید.

۱۴- سکه را آن‌قدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار «رو» بیاید. اگر پیشامد این‌که این اتفاق در حداکثر پنجمین پرتاب رخ دهد را A بنامیم، فضای نمونهٔ مربوط به این آزمایش تصادفی و پیشامد A را با اعضای آن نشان دهید.

۱۵- اگر a برآمدی از یک فضای نمونهٔ nعضوی باشد، با رخدادن a، چند پیشامد از این فضای نمونه رخ داده است؟

دو پیشامد ناسازگار

اگر A و B دو پیشامد باشند که اصلاً نتوانند با هم اتفاق بیفتند و وقوع یکی به معنای عدم وقوع دیگری باشد، آن دو پیشامد را ناسازگار می‌گوییم. در این حالت $A \cap B = \varnothing$ خواهد بود. به عنوان مثال در پرتاب یک تاس، پیشامد «زوج‌آمدن تاس» و پیشامد «فردآمدن تاس» ناسازگارند، چون اشتراکی با هم ندارند و محال است در پرتاب یک تاس عددی بیاید که هم زوج باشد و هم فرد، اما پیشامدهای «زوج‌آمدن» و «اول‌آمدن» در پرتاب یک تاس، دو پیشامد سازگارند، زیرا دو پیشامد اشتراک دارند و اگر در پرتاب تاس عدد ۲ ظاهر شود، هر دو پیشامد رخ داده‌اند چون عدد ۲ عضو هر دو پیشامد می‌باشد.

اصول و قوانین احتمال

سه اصل زیر پایه و اساس قوانین موجود در علم احتمالات هستند:

اصل ۱: به ازای هر پیشامد A از فضای نمونهٔ S داریم: $۰ \le P(A) \le ۱$.

اصل ۲: برای فضای نمونهٔ S همواره داریم: $P(S) = ۱$.

اصل ۳: اگر A و B دو پیشامد (ناسازگار) از فضای نمونهٔ S باشند، یعنی $A \cap B = \varnothing$ باشد، آن‌گاه:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

تذکر $P(A)$ احتمال وقوع پیشامد A را نشان می‌دهد و به P «تابع احتمال» می‌گوییم.

$$\text{پیشامد } A \xrightarrow{\text{ورودی}} \boxed{\text{تابع } P} \xrightarrow{\text{خروجی}} P(A)$$

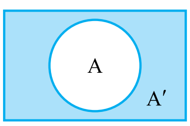
P مانند یک ماشین است که ورودی و دامنهٔ آن، مجموعهٔ همهٔ پیشامدها و خروجی آن، احتمال وقوع این پیشامدها است.

قضایای احتمال

گاهی در امتحانات اثبات یکی از قضایا را از ما می‌خواهند، پس اثبات قضایا را حتماً یاد بگیرید.

قضیهٔ ۱ احتمال متمم:

$$P(A') = ۱ - P(A)$$



اثبات مجموعه‌های A و A' جدا از هم ناسازگار بوده و اجتماعشان برابر S است، پس داریم:

$$S = A \cup A' \Rightarrow P(S) = P(A \cup A')$$

$$\text{طبق اصل ۳} \Rightarrow P(S) = P(A) + P(A')$$

$$\text{طبق اصل ۲} \Rightarrow ۱ = P(A) + P(A') \Rightarrow P(A') = ۱ - P(A)$$

قضیهٔ ۲ $P(\varnothing) = ۰$ است. ($\varnothing$ را پیشامد نشدنی یا غیرممکن و S را پیشامد حتمی یا قطعی می‌گویند.)

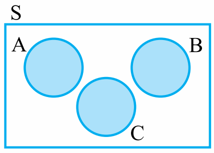
اثبات $\varnothing$ و S متمم هم هستند، بنابراین طبق قضیهٔ ۱ داریم:

$$P(A') = ۱ - P(A) \Rightarrow P(S') = ۱ - P(S) \xrightarrow[P(S)=۱]{S'=\varnothing} P(\varnothing) = ۱ - P(S) = ۱ - ۱ = ۰$$

قضیهٔ ۳ اگر A، B و C پیشامدهایی دوبه‌دو ناسازگار باشند، آن‌گاه:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

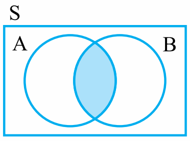
این قضیه برای هر تعداد پیشامد قابل تعمیم است.



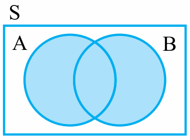
اثبات مجموعه‌های A، B و C دوبه‌دو ناسازگارند، بنابراین A و $B\cup C$ هم دوبه‌دو ناسازگارند، پس داریم:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A\cup(B\cup C)) \xrightarrow[\substack{A\cap(B\cup C)=\varnothing \\ \text{طبق اصل ۳}}]{A \text{ و } B\cup C \text{ ناسازگارند}}$$

$$P(A)+P(B\cup C) \xrightarrow[\substack{B\cap C=\varnothing \\ \text{طبق اصل ۳}}]{B \text{ و } C \text{ ناسازگارند}} P(A)+P(B)+P(C)$$



قضیهٔ ۴ احتمال اشتراک دو پیشامد: احتمال این‌که هر دو پیشامد A و B رخ دهند را به صورت $P(A\cap B)$ نمایش می‌دهیم.



$A\cup B$

قضیهٔ ۵ احتمال اجتماع دو پیشامد: احتمال این‌که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد، به صورت زیر است:

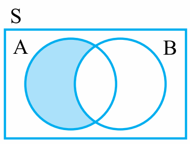
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

اثبات مجموعه‌های $A-B$ و B جدا از هم هستند و اجتماع آن‌ها برابر $A\cup B$ است. پس داریم:

$$A\cup B=(A-B)\cup B \Rightarrow P(A\cup B)=P((A-B)\cup B)$$ ($A-B$ و B جدا از هم‌اند.)

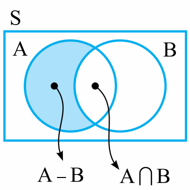
$$\xrightarrow{\text{طبق اصل ۳}} P(A\cup B)=P(A-B)+P(B)=P(A)-P(A\cup B)+P(B)$$ $(P(A-B)=P(A)-P(A\cup B))$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$



قضیهٔ ۶ احتمال تفاضل دو پیشامد: احتمال این‌که پیشامد A رخ دهد اما پیشامد B رخ ندهد، به صورت زیر است:

$$P(A-B)=P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$$

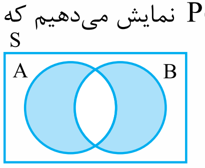


اثبات با توجه به نمودار ون $A-B$ و $A\cap B$ دو مجموعهٔ جدا از هم هستند و اجتماع آن‌ها برابر مجموعهٔ A است.

$$A=(A-B)\cup(A\cap B) \Rightarrow P(A)=P((A-B)\cup(A\cap B))$$

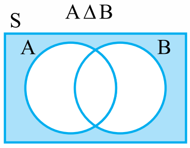
$$\xrightarrow[\text{طبق اصل ۳}]{A-B \text{ و } A\cap B \text{ جدا از هم‌اند}} P(A)=P(A-B)+P(A\cap B) \Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

قضیهٔ ۷ احتمال تفاضل متقارن دو پیشامد: احتمال این‌که تنها یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد را به صورت $P(A\Delta B)$ نمایش می‌دهیم که برابر است با:



$A\Delta B$

$$\begin{aligned} P(A\Delta B)&=P(A-B)+P(B-A)\\ &=P(A\cup B)-P(A\cap B)\\ &=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)\end{aligned}$$



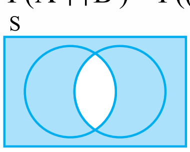
$A'\cap B'$

تذکر احتمال این‌که هیچ‌یک از پیشامدهای A و B رخ ندهد به صورت $P(A'\cap B')$ می‌باشد:

$$P(A'\cap B')=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$$

اثبات

$$P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$$



$A'\cup B'$

تذکر احتمال این‌که حداکثر یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد، به صورت $P(A'\cup B')$ است:

$$P(A'\cup B')=1-P(A\cap B)$$

مثال اگر $P(A)=\frac{1}{3}$ و $P(A'\cup B')=\frac{5}{6}$ باشد، مطلوب است مقدار $P(A'\cup B)$.

پاسخ

$$P(A'\cup B')=\frac{5}{6} \Rightarrow 1-P(A\cap B)=\frac{5}{6} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

$$P(A'\cup B)=P(A')+P(B)-P(\underbrace{A'\cap B}_{B-A})=[1-P(A)]+P(B)-[P(B)-P(A\cap B)]$$

$$=1-P(A)+\cancel{P(B)}-\cancel{P(B)}+P(A\cap B)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

مثال عددی به تصادف از مجموعهٔ $S=\{۱,۲,۳,\dots,۱۰۰۰\}$ انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال این‌که عدد انتخابی:

۱) مضرب ۶ باشد. ۲) هم مضرب ۶ و هم مضرب ۸ باشد.

۳) مضرب حداقل یکی از اعداد ۶ یا ۸ باشد. ۴) مضرب ۶ باشد اما مضرب ۸ نباشد.

پاسخ فضای نمونه به صورت $S=\{۱,۲,۳,\dots,۱۰۰۰\}$ بوده و $n(S)=۱۰۰۰$ می‌باشد.

۱ **یادآوری** تعداد اعداد ۱ تا n که مضرب k هستند برابر است با $[\frac{n}{k}]$.

پیشامد A را مجموعه‌اعدادی که مضرب ۶ هستند در نظر می‌گیریم، پس پیشامد A به صورت $A=\{۶,۱۲,۱۸,\dots,۹۹۶\}$ خواهد بود و تعداد اعضای آن برابر با $[\frac{۱۰۰۰}{۶}]$ می‌باشد، پس داریم:

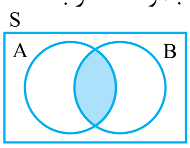
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{[\frac{۱۰۰۰}{۶}]}{۱۰۰۰}=\frac{۱۶۶}{۱۰۰۰}$$

۲ عددی که مضرب هر دو عدد a و b باشد، باید مضرب ک. م. م دو عدد a و b باشد، بنابراین چون عدد انتخاب‌شده باید هم مضرب ۶ و هم مضرب ۸ باشد، باید مضرب ک. م. م دو عدد یعنی ۲۴ نیز باشد:

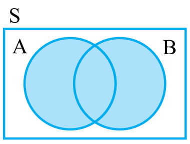
مجموعه مضارب $A:۶$

مجموعه مضارب $B:۸$

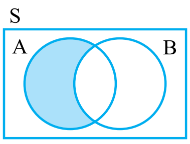
مجموعه مضارب $A\cap B:۲۴$



$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{[\frac{۱۰۰۰}{۲۴}]}{۱۰۰۰}=\frac{۴۱}{۱۰۰۰}$$



۳
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{[\frac{۱۰۰۰}{۶}]}{۱۰۰۰}+\frac{[\frac{۱۰۰۰}{۸}]}{۱۰۰۰}-\frac{[\frac{۱۰۰۰}{۲۴}]}{۱۰۰۰}=\frac{۲۵۰}{۱۰۰۰}=\frac{۱}{۴}$$



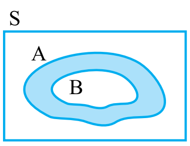
۴
$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{[\frac{۱۰۰۰}{۶}]}{۱۰۰۰}-\frac{[\frac{۱۰۰۰}{۲۴}]}{۱۰۰۰}=\frac{۱۲۵}{۱۰۰۰}=\frac{۱}{۸}$$

مثال با استفاده از اصول احتمال و قضایای اثبات‌شده، گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

۱) اگر $B\subseteq A$ باشد، آن‌گاه: $P(A-B)=P(A)-P(B)$. ۲) اگر $B\subseteq A$ باشد، آن‌گاه: $P(B)\le P(A)$.

پاسخ اثبات این سؤال بسیار مهم است، آن را خوب یاد بگیرید:

۱ با توجه به نمودار «ون» زیر $A=(A-B)\cup B$ بوده و دو مجموعه $A-B$ و B جدا از هم‌اند، یعنی $(A-B)\cap B=\varnothing$ است، بنابراین داریم:



$$P(A)=P((A-B)\cup B)\xrightarrow[\text{اصل ۳}]{A-B \text{ و } B \text{ جدا از هم‌اند.}}$$

$$P(A)=P(A-B)+P(B)\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(B)$$

۲ طبق اصل اول احتمال هر پیشامد مقدار نامنفی دارد، بنابراین داریم:

$$P(A-B)\ge ۰\xrightarrow[\text{(الف)}]{B\subseteq A}P(A)-P(B)\ge ۰\Rightarrow P(A)\ge P(B)$$

نتیجه چون $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$ است، بنابراین با توجه به قسمت «۲» داریم: $P(A\cap B)\le P(A)\le P(A\cup B)$

سؤال‌های امتحانی

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۱۶- اگر رخدادن دو پیشامد با هم محال باشد، آن دو پیشامد را دو پیشامد .... می‌گویند؛ در این صورت $A\cap B=$ .... خواهد بود. در غیر این صورت دو پیشامد را .... می‌گوییم.

۱۷- اگر $P(A-B)=P(A)-P(B)$ باشد، آن‌گاه .... و برعکس.

۱۸- در هر قسمت تعیین کنید، پیشامدهای داده‌شده سازگارند یا ناسازگار؟ *(مشابه کتاب درسی)*

الف) عدد انتخاب‌شده A: مضرب ۳ است. B: اول است.

ب) در پرتاب پی‌درپی تاس A: برای اولین بار در مرتبهٔ سوم ۶ بیاید. B: تا پرتاب سوم دو بار ۶ بیاید.

۱۹- اگر $P(A)=\frac{۱}{۴}$، $P(A\cup B)=\frac{۲}{۳}$ بوده و A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، $P(B)$ را حساب کنید.

۲۰- اگر $P(A')=\frac{۱}{۲}$، $P(A'\cup B')=\frac{۳}{۴}$ و $۲P(B)=P(A\cup B)$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ $P(B)$.

۲۱- اگر $P(A)=۳P(A\cap B)=۲P(B)$، آن‌گاه $\frac{P(A\cup B)}{P(A\cap B)}$ کدام است؟

۲۲- عددی به تصادف از مجموعهٔ $S=\{۱,۲,۳,\dots,۱۰۰۰\}$ انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که: (مشابه کتاب درسی)

الف) عدد انتخابی بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشد.
ب) عدد انتخابی بر ۳ یا ۵ بخش‌پذیر باشد.
پ) عدد انتخابی بر ۳ بخش‌پذیر باشد اما بر ۵ بخش‌پذیر نباشد.

۲۳- احتمال این‌که شخصی ناراحتی کلیه داشته باشد ۲۳٪، احتمال این‌که ناراحتی قلبی داشته باشد ۲۴٪ و احتمال این‌که لااقل یکی از این دو بیماری را داشته باشد ۳۸٪ است. مطلوب است احتمال این‌که شخص:

الف) هر دو نوع بیماری را داشته باشد.
ب) تنها بیماری کلیه داشته باشد.

۲۴- اگر $P(A)=\frac{۱}{۲}$، $P(B')=\frac{۵}{۸}$ و $P(A\cup B)=\frac{۳}{۴}$ باشند، مطلوب است محاسبهٔ:

الف) $P(A\cap B)$
ب) $P(B\cap A')$
پ) $P(A'\cup B')$

۲۵- برای دو پیشامد A و B از فضای نمونهٔ S، اگر $B\subseteq A$ باشد، ثابت کنید:

الف) $P(A-B)=P(A)-P(B)$
ب) $P(B)\le P(A)$

۲۶- برای دو پیشامد A و B از فضای نمونهٔ S ثابت کنید:

الف) $P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$
ب) $P(A\cap B)\ge P(A)+P(B)-۱$
پ) $P(A'\cup B)-P(A\cap B)=۱-P(A)$
ت) $P(A'\cap B')=۱-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$
ث) $P(A'\cup B')=۱-P(A)-P(B)+P(A\cup B)$

۲۷- برای ۲ پیشامد A و B از فضای نمونهٔ S داریم $P(A)=P(B)=۱$، ثابت کنید: $P(A\cap B)=۱$.

۲۸- از مجموعهٔ $S=\{۱,۲,۳,\dots,۱۲\}$ زیرمجموعه‌ای انتخاب می‌کنیم.

الف) مطلوب است احتمال این‌که این زیرمجموعه شامل ۱ و ۲ و فاقد ۳، ۴ و ۵ باشد.
ب) اگر بدانیم زیرمجموعهٔ انتخاب‌شده ۷ عضوی است، احتمال این‌که این زیرمجموعه شامل ۱ و ۲ و فاقد ۳، ۴ و ۵ باشد را به دست آورید.

۲۹- با توجه به داده‌ها مقدار مجهول را به دست آورید:

الف) $P(B)=\frac{۲}{۳},\ P(A')=\frac{۱}{۵},\ P(A\cap B)=\frac{۳}{۵}\ \Rightarrow\ P(A\cup B)=?,\ P(A-B)=?$
ب) $P(B-A)=۰/۳,\ P(A-B)=۰/۱,\ P(A')=۲P(B')\ \Rightarrow\ P(A)=?$

۳۰- اگر $P(A\Delta B)=۰/۴$، $P(A'-B')=۰/۳$ باشد و $P(A'\cup B')=۰/۹$ باشد، $P(B)$ و $P(A-B)$ را بیابید.

۳۱- اگر $۴P(A\cap B)=P(A)=P(B)=P(A'\cap B')$ آن‌گاه $P(A-B)$ کدام است؟

۳۲- اگر $P(A-B)=\frac{۲}{۵}$ و $P(B-A)=\frac{۱}{۳}$ باشد، بیشترین مقدار $P(A)+P(B)$ کدام است؟

۲ احتمال غیرهم‌شانس

به هر زیرمجموعهٔ تک‌عضوی از فضای نمونه یک «**پیشامد ساده**» می‌گوییم. مثلاً اگر فضای نمونه $S=\{a,b,c\}$ باشد، پیشامدهای $\{a\}$، $\{b\}$ و $\{c\}$ پیشامدهای ساده هستند. احتمال وقوع هر پیشامد ساده مثل $\{a\}$ را به‌صورت $P(\{a\})$ یا $P(a)$ نمایش می‌دهیم.

در فضاهای نمونه‌ای که تا به حال بررسی کردیم، احتمال وقوع همهٔ پیشامدهای ساده با هم برابر بودند. مثلاً احتمال ظاهرشدن هر یک از اعداد ۱ تا ۶ در پرتاب یک تاس برابر $\frac{۱}{۶}$ و یا احتمال آمدن «رو» یا «پشت» در هر بار پرتاب یک سکه برابر $\frac{۱}{۲}$ بود. اما در بعضی فضاهای نمونه ممکن است شانس وقوع پیشامدهای ساده با هم یکسان نباشند. مثلاً فرض کنید مکعبی داریم که یک وجه آن سفید، ۲ وجه آن قرمز و ۳ وجه آن زرد باشند. اگر فضای نمونهٔ یک بار پرتاب این مکعب را به شکل $S=\{\text{زرد},\text{قرمز},\text{سفید}\}$ تعریف کنیم، شانس رخدادن اعضای این فضای نمونه با هم برابر نیستند، زیرا:

$$P(\text{زرد})=\frac{\text{تعداد وجه‌های زرد}}{\text{تعداد کل وجه‌ها}}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}\quad,\quad P(\text{قرمز})=\frac{\text{تعداد وجه‌های قرمز}}{\text{تعداد کل وجه‌ها}}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\quad,\quad P(\text{سفید})=\frac{\text{تعداد وجه‌های سفید}}{\text{تعداد کل وجه‌ها}}=\frac{۱}{۶}$$

چنین فضاهای نمونه‌ای که احتمال وقوع حداقل دو تا از پیشامدهای سادهٔ آن با هم برابر نیستند را «**فضای نمونه با احتمال غیرهم‌شانس**» می‌گوییم.

اگر در فضای نمونهٔ متناهی و غیرهم‌شانس $S=\{s_۱,s_۲,\dots,s_n\}$، پیشامد $A=\{a_۱,a_۲,\dots,a_k\}$ یک زیرمجموعهٔ K عضوی دلخواه از فضای نمونهٔ S باشد، همواره:

۱ **احتمال وقوع پیشامد A عددی از صفر تا یک است.** $۰\le P(A)\le ۱$

۲ **احتمال وقوع A را می‌توانیم با جمع‌کردن احتمال اعضای آن حساب کنیم.** $P(A)=P(\{a_۱,a_۲,\dots,a_k\})=P(a_۱)+P(a_۲)+\cdots+P(a_k)$

۳ **احتمال وقوع پیشامد S برابر یک است.** $P(S)=P(s_۱)+P(s_۲)+\cdots+P(s_n)=۱$

سؤالات احتمال غیرهم‌شانس معمولاً خیلی روتین و تکراری هستند و با حل چند مسئلهٔ مقدماتی و البته یادگرفتن راه‌حل آن‌ها، حل بقیهٔ سؤالات برایتان بسیار آسان و راحت خواهد بود.

تقریباً در حل تمام سؤالات این قسمت، از این نکته که «مجموع احتمال‌های اعضای فضای نمونه برابر یک است.» استفاده می‌کنیم.

روش کلی سؤالات احتمال غیرهم‌شانس

گام اول ابتدا داده‌های مسئله را در کنار هم به صورت روابط و معادلات ریاضی می‌نویسیم.

گام دوم احتمال یکی از پیشامدهای ساده را برابر x می‌گیریم و احتمال بقیهٔ پیشامدهای ساده را بر حسب x حساب می‌کنیم. حالا جمع این احتمال‌ها را برابر با یک می‌گذاریم تا x به دست آید. با به دست آمدن مقدار x احتمال همهٔ پیشامدهای ساده به دست می‌آیند.

مثال تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. مطلوب است احتمال این‌که در پرتاب این تاس:
(مشابه مثال کتاب درسی)

۱) عدد ۲ یا ۳ مشاهده شود. ۲) عددی اول ظاهر شود.

پاسخ **گام اول** اطلاعات مسئله را به صورت روابط ریاضی بازنویسی می‌کنیم: فضای نمونه در پرتاب یک تاس: $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

$P(۲)=P(۴)=P(۶)=۳P(۱)=۳P(۳)=۳P(۵) \Rightarrow$ احتمال وقوع هر عدد زوج ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است.

گام دوم احتمال یکی از پیشامدهای ساده مثلاً $P(۱)$ را برابر x می‌گیریم و بقیه را برحسب آن حساب می‌کنیم و مجموع احتمال‌ها را برابر ۱ می‌گذاریم:

$$P(۱)=x \Rightarrow \begin{cases} P(۱)=P(۳)=P(۵)=x \\ P(۲)=P(۴)=P(۶)=۳x \end{cases}$$

$$\text{جمع احتمالات}=۱ \Rightarrow P(۱)+P(۲)+\cdots+P(۶)=۱$$

$$\Rightarrow x+۳x+x+۳x+x+۳x=۱ \Rightarrow ۱۲x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۱۲} \begin{cases} \nearrow P(۱)=P(۳)=P(۵)=\frac{۱}{۱۲} \\ \searrow P(۲)=P(۴)=P(۶)=\frac{۳}{۱۲} \end{cases}$$

۱) احتمال این‌که عدد ۲ یا ۳ ظاهر شود: $P(\{۲,۳\})=P(۲)+P(۳)=\frac{۳}{۱۲}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$

۲) احتمال این‌که عددی اول ظاهر شود: $P(\{۲,۳,۵\})=P(۲)+P(۳)+P(۵)=\frac{۳}{۱۲}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۵}{۱۲}$

مثال افراد $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_۵$ در مسابقه‌ای شرکت کرده‌اند. احتمال برد $a_۲$، نصف احتمال برد $a_۱$، احتمال برد $a_۳$ ثلث احتمال برد $a_۲$، احتمال برد $a_۴$ ربع احتمال برد $a_۳$ و احتمال برد $a_۵$ خمس احتمال برد $a_۴$ است. مطلوب است احتمال آن‌که:

۱) دوندهٔ $a_۱$ یا $a_۴$ برنده شوند.

۲) هیچ‌یک از دونده‌های $a_۳$، $a_۴$ و $a_۵$ برنده نشوند.

پاسخ

$$\xrightarrow{\text{گام ۱: نوشتن اطلاعات مسئله}} \begin{cases} P(a_۲)=\frac{۱}{۲}P(a_۱) \\ P(a_۳)=\frac{۱}{۳}P(a_۲) \\ P(a_۴)=\frac{۱}{۴}P(a_۳) \\ P(a_۵)=\frac{۱}{۵}P(a_۴) \end{cases} \xrightarrow[P(a_۵)=x]{\text{گام ۲: نوشتن اطلاعات برحسب x}} \begin{cases} P(a_۵)=x \\ P(a_۴)=۵x \\ P(a_۳)=۲۰x \\ P(a_۲)=۶۰x \\ P(a_۱)=۱۲۰x \end{cases}$$

چون $P(a_۵)$ از بقیهٔ احتمال‌ها کم‌تر بود آن را برابر x گرفتیم و بقیهٔ احتمال‌ها را برحسب x حساب کردیم. (می‌توانیم هر کدام از احتمال‌ها را که بخواهیم به عنوان x در نظر بگیریم ولی ممکن است بقیهٔ احتمال‌ها کسری شوند و محاسباتمان سخت شود. اما یادتان باشد این کار در جواب آخر تأثیری ندارد.)

$$«\text{جمع احتمالات}=۱» \Rightarrow x+۵x+۲۰x+۶۰x+۱۲۰x=۱ \Rightarrow ۲۰۶x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲۰۶}$$

۱) $P(\{a_۱,a_۴\})=P(a_۱)+P(a_۴)=\frac{۱۲۰}{۲۰۶}+\frac{۵}{۲۰۶}=\frac{۱۲۵}{۲۰۶}$

۲) $P(\{a_۳,a_۴,a_۵\}')=P(\{a_۱,a_۲\})=P(a_۱)+P(a_۲)=\frac{۱۲۰}{۲۰۶}+\frac{۶۰}{۲۰۶}=\frac{۱۸۰}{۲۰۶}=\frac{۹۰}{۱۰۳}$

برای حل بعضی سؤالات احتمال غیرهم‌شانس که معمولاً به صورت «مجموعه‌ای» مطرح می‌شوند:

گام اول ابتدا داده‌های مسئله را به صورت ریاضی می‌نویسیم.

گام دوم مجموع احتمالات اعضای فضای نمونه را برابر یک قرار می‌دهیم. مثلاً اگر $S=\{a,b,c,d\}$ باشد، می‌نویسیم:

$$P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=۱$$

گام سوم داده‌های مسئله به همراه معادلهٔ بالا یک دستگاه چندمعادله و چندمجهول تشکیل می‌دهند که با حل این دستگاه مقادیر احتمال‌های پیشامدهای ساده به دست می‌آیند.

تذکر یادتان باشد که در حل این سؤالات احتمال وقوع پیشامدهای b یا c را به‌صورت $P(\{b,c\})=P(b)+P(c)$ می‌نویسیم.

مثال در یک آزمایش تصادفی، فضای نمونهٔ $S=\{a,b,c,d\}$ و احتمال وقوع پیشامدهای a یا b برابر $\frac{۱}{۲}$ است. احتمال وقوع c برابر $\frac{۱}{۸}$ و احتمال وقوع d یا b برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. مطلوب است احتمال این‌که:

۱) a رخ ندهد. ۲) هیچ‌یک از پیشامدهای a و d رخ ندهند.

پاسخ اطلاعات مسئله را به همراه رابطهٔ «۱ = جمع احتمالات» در یک دستگاه می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \text{(اطلاعات مسئله) گام ۱} : \begin{cases} P(\{a,b\})=\frac{۱}{۲} \\ P(\{c\})=\frac{۱}{۸} \\ P(\{d,b\})=\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(a)+P(b)=\frac{۱}{۲} \\ P(c)=\frac{۱}{۸} \\ P(d)+P(b)=\frac{۱}{۲} \end{cases} \\ \text{(۱ = جمع احتمالات) گام ۲} \Rightarrow P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} P(a)=\frac{۳}{۸} \\ P(b)=\frac{۱}{۸} \\ P(c)=\frac{۱}{۸} \\ P(d)=\frac{۳}{۸} \end{cases}$$

۱) $P(\text{رخ ندهد } a)=P(\{a\}')=۱-P(a)=۱-\frac{۳}{۸}=\frac{۵}{۸}$

۲) $P(\{a,d\}')=P(\{b,c\})=P(b)+P(c)=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$

برای این‌که تمرین بیشتری کنیم و کاملاً روی این بحث مسلط بشویم، ۲ تا مثال دیگر برایتان حل می‌کنم:

مثال تاسی طوری ساخته شده که احتمال روآمدن هر عدد اول با مربع آن عدد و احتمال روآمدن هر عدد غیراول با خود آن عدد متناسب است. مطلوب است احتمال این‌که در پرتاب تاس عددی بزرگ‌تر از ۳ ظاهر شود.

پاسخ احتمال روآمدن هر عدد اول متناسب با مربع آن عدد است. $\Rightarrow P(۲)=۲^۲x\,,\,P(۳)=۳^۲x\,,\,P(۵)=۵^۲x$

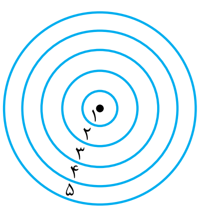
احتمال روآمدن هر عدد غیراول متناسب با خود آن عدد است. $\Rightarrow P(۱)=۱x\,,\,P(۴)=۴x\,,\,P(۶)=۶x$

«۱ = جمع احتمالات» $\Rightarrow P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$

$\Rightarrow x+۴x+۹x+۴x+۲۵x+۶x=۱ \Rightarrow ۴۹x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۴۹}$

$\Rightarrow P(\{۴,۵,۶\})=P(۴)+P(۵)+P(۶)=۴x+۲۵x+۶x=۳۵x=\frac{۳۵}{۴۹}=\frac{۵}{۷}$

مثال در پرتاب یک دارت به صفحهٔ دایره‌ای‌شکل مقابل، اگر احتمال اصابت دارت به ناحیهٔ kام از رابطهٔ $P(k)=(۲k-۱)r$ به دست آید:



۱) احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را به دست آورید.

۲) احتمال اصابت دارت به سه ناحیهٔ اول، سوم و چهارم بیشتر است یا احتمال اصابت به دو ناحیهٔ دوم و پنجم؟

پاسخ با قراردادن اعداد ۱ تا ۵ به جای k در رابطهٔ $P(k)=(۲k-۱)r$ احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را بر حسب r به دست می‌آوریم:

$P(k)=(۲k-۱)r \Rightarrow P(۱)=r\,,\,P(۲)=۳r\,,\,P(۳)=۵r\,,\,P(۴)=۷r\,,\,P(۵)=۹r$

«۱= جمع احتمالات» $\Rightarrow P(۱)+P(۲)+\cdots+P(۵)=۱ \Rightarrow r+۳r+۵r+۷r+۹r=۱$

$\Rightarrow ۲۵r=۱ \Rightarrow r=\frac{۱}{۲۵}$

۱) $P(۱)=\frac{۱}{۲۵}\,,\,P(۲)=\frac{۳}{۲۵}\,,\,P(۳)=\frac{۵}{۲۵}\,,\,P(۴)=\frac{۷}{۲۵}\,,\,P(۵)=\frac{۹}{۲۵}$

۲) احتمال اصابت به ناحیهٔ اول، سوم و چهارم $=P(\{۱,۳,۴\})=P(۱)+P(۳)+P(۴)=r+۵r+۷r=۱۳r=\frac{۱۳}{۲۵}$

احتمال اصابت به ناحیهٔ دوم و پنجم $=P(\{۲,۵\})=P(۲)+P(۵)=۳r+۹r=۱۲r=\frac{۱۲}{۲۵}$

بنابراین احتمال اصابت به ناحیهٔ اول، سوم و چهارم از احتمال اصابت به ناحیهٔ دوم و پنجم بیشتر است.

اگر ۶ مثال قبل را خوب یاد گرفته‌اید، با خیال راحت نمرهٔ این قسمت را به جمع نمرات امتحان پایانی اضافه کنید.

سـؤال‌های امتـحـانی

۳۳- در پرتاب یک سکهٔ ناسالم، شانس آمدن «رو» نصف شانس آمدن «پشت» است. در پرتاب این سکه، احتمال ظاهرشدن «رو» و احتمال ظاهرشدن «پشت» را به دست آورید. *(تمرین کتاب درسی)*

۳۴- در یک آزمایش تصادفی، $S=\{x,y,z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(\{x,y\})=\frac{۲}{۳}$ و $P(\{x,z\})=\frac{۱}{۲}$، احتمال وقوع هر یک از پیشامدهای ساده را به دست آورید. *(تمرین کتاب درسی)*

۳۵- اگر $S=\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴\}$ باشد، مطلوب است:

الف) $P(a_۱)$، اگر $P(a_۲)=\frac{۱}{۳}$، $P(a_۳)=\frac{۱}{۶}$ و $P(a_۴)=\frac{۱}{۹}$ باشد.

ب) $P(\{a_۱\}')$، $P(a_۲)$ و $P(\{a_۱,a_۲\})$ اگر $P(a_۳)=P(a_۴)=\frac{۱}{۴}$ و $P(a_۱)=۲P(a_۲)$ باشد.

۳۶- چهار دوندهٔ a، b، c و d در یک مسابقه شرکت می‌کنند. فرض کنیم احتمال برنده‌شدن a، ۳ برابر احتمال برنده‌شدن b و احتمال برنده‌شدن b نصف احتمال برنده‌شدن c و دونده‌های c و d هم‌شانس باشند، احتمال برنده‌شدن a یا d را به دست آورید. احتمال این‌که a برنده نشود کدام است؟

۳۷- تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول سه برابر احتمال وقوع هر عدد غیراول است. اگر در پرتاب این تاس، A پیشامد وقوع عدد کوچک‌تر از ۴ باشد، احتمال وقوع پیشامد A را محاسبه کنید.

۳۸- ۴ اسب a، b، c و d در مسابقه‌ای شرکت می‌کنند. اگر مقادیر احتمال‌های برنده‌شدن اسب‌ها در مسابقه با هم تصاعد هندسی با قدرنسبت ۲ تشکیل دهند، احتمال برنده‌شدن اسب‌ها را بیابید.

۳۹- مکعبی که روی ۳ وجه آن عدد یک، روی ۲ وجه عدد ۲ و روی یک وجه عدد ۳ نوشته شده است را به هوا پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه و احتمال وقوع هر عضو آن را به دست آورید. احتمال این‌که در پرتاب تاس عدد ۱ یا ۲ ظاهر شود را به دست آورید. *(مشابه کتاب درسی)*

۴۰- اگر $S=\{a,b,c,d,e\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A=\{a,b\}$، $B=\{a,b,c,d\}$ و $C=\{a,b,e\}$ سه پیشامد باشند به‌طوری که $P(A)=\frac{۲}{۷}$ و $P(B)=\frac{۳}{۵}$، مقدار $P(C')$ را به دست آورید. *(تمرین کتاب درسی)*

۴۱- اگر $S=\{۱,۲,۳,۴\}$ فضای نمونهٔ یک تجربهٔ تصادفی باشد و داشته باشیم $P(۱)=۲P(۲)=۳P(۳)=۴P(۴)$، مطلوب است محاسبهٔ $P(۱)$.

۴۲- در یک نمونهٔ تصادفی، $S=\{x,y,z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(x)$، $P(y)$ و $P(z)$ به ترتیب یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{۱}{۴}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هرکدام از این پیشامدها را به دست آورید.

۳ احتمال شرطی

فرض کنید A و B به ترتیب پیشامدهای «اول‌آمدن» و «فردآمدن» در پرتاب یک تاس باشند، بنابراین داریم:

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\},A=\{۲,۳,۵\},B=\{۱,۳,۵\}$$

۱ احتمال این‌که در پرتاب تاس عددی اول ظاهر شود را بیابید.

پاسخ

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

۲ اگر بدانیم در پرتاب تاس، عددی فرد ظاهر شده است احتمال این‌که عدد روآمده اول باشد، چه‌قدر است؟

پاسخ در این سؤال فضای نمونه دیگر $S=\{۱,۲,۳,\dots,۶\}$ نیست، زیرا طبق فرض مسئله می‌دانیم که در پرتاب تاس عدد فرد ظاهر شده است، بنابراین فضای نمونه به مجموعهٔ اعداد فرد کاهش پیدا می‌کند، بنابراین $S=B=\{۱,۳,۵\}$ می‌باشد. پیشامد مطلوب هم عدد اولی است که در فضای نمونهٔ جدید باشد، پس هم باید اول باشد و هم فرد باشد، پس تنها اعداد ۳ و ۵ دارای این خاصیت هستند و داریم:

$$P=\frac{\text{حالت‌های مطلوب}}{\text{حالت‌های ممکن}}=\frac{\text{عدد روآمده فرد و اول باشد}}{\text{عدد روآمده فرد باشد}}=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۲}{۳}$$

احتمال وقوع پیشامد A به شرطی که قبلاً B اتفاق افتاده باشد را به صورت $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم. با توجه به این‌که احتمال برابر با حاصل تقسیم حالت‌های مطلوب بر حالت‌های ممکن (کل حالت‌ها) می‌باشد، پس در $P(A|B)$ با توجه به این‌که B قبلاً اتفاق افتاده است، فضای نمونه همان $n(B)$ است. (فضای نمونه از $n(S)$ به $n(B)$ کاهش یافته است.) و پیشامد مطلوب شامل اعضایی از پیشامد B است که خاصیت A را هم دارند، بنابراین پیشامد مطلوب شامل اعضایی است که خاصیت $A\cap B$ را دارند، پس داریم:

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

با تقسیم صورت و مخرج کسر بالا به $n(S)$ هر دو به احتمال تبدیل می‌شوند.

نتیجه اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونهٔ S باشد و $B\neq\varnothing$ آن‌گاه داریم:

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$: احتمال وقوع پیشامد A به شرطی که B قبلاً اتفاق افتاده باشد.

سؤالات آزمون جمع‌بندی فصل دوم، منتخبِ سؤالات امتحانی مدارس برتر کشور است.

ردیف	آزمون جمع‌بندی فصل دوم	رشتهٔ ریاضی پایهٔ یازدهم	مدت امتحان: ۸۰ دقیقه	kheilisabz.com	نمره
۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. الف) اگر $P(A)=\frac{1}{4}$، $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$ و A و B ناسازگار باشند، .... = $P(B)$ می‌باشد. ب) هرگاه حداقل ۲ پیشامد ساده از فضای نمونهٔ S، احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با احتمال .... می‌نامیم. پ) محمد و آراد با هم یک مرتبه سنگ، کاغذ، قیچی بازی می‌کنند. فضای نمونهٔ این بازی .... عضو دارد.				۱/۵
۲	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) به هر کدام از زیرمجموعه‌های یک فضای نمونه‌ای، یک برآمد می‌گوییم. ب) اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن‌گاه $P(A\cap B)=0$ است. پ) فردی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. دو پیشامد «از متولد ماه مهر باشد.» و «او متولد فصل تابستان باشد.» با هم ناسازگارند.				۱/۵
۳	یک کیسه شامل ۵ مهرهٔ آبی و ۴ مهرهٔ قرمز متمایز است. ۲ مهره از این کیسه خارج می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟				۱
۴	روی ۴ کارت، اعداد ۰ تا ۳ نوشته شده است. در یک آزمایش یک کارت به تصادف انتخاب کرده و به تعداد عدد روی کارت یک سکه را پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟				۱/۵
۵	عددی را به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۳۰۰ انتخاب می‌کنیم. هر یک از احتمال‌های زیر را محاسبه کنید. الف) عدد انتخابی بر ۵ بخش‌پذیر باشد. ب) عدد انتخابی هم بر ۵ و هم بر ۷ بخش‌پذیر نباشد.				۱/۵
۶	برای دو پیشامد A و B، اگر $P(A)=\frac{1}{2}$، $P(B)=\frac{1}{3}$ و $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$ باشد، آن‌گاه مقدار $P(A'\cup B)$ را بیابید.				۱
۷	سه شناگر a، b و c با هم مسابقه می‌دهند. شانس برنده‌شدن a، سه برابر b و شانس برنده‌شدن b، دو برابر c می‌باشد. الف) شانس برنده‌شدن هر یک را بیابید. ب) احتمال این‌که b یا c برنده شوند، چه‌قدر است؟				۱/۵
۸	فرض کنید A و B دو پیشامد ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند. اگر $P(A)=\frac{1}{6}$ و $P(B)=\frac{1}{4}$ باشد، مقدار $P(B'\mid A')$ را بیابید.				۱/۵
۹	احتمال شیوع یک بیماری در جامعه‌ای برابر ۰/۰۸ و احتمال بهبودیافتن فرد مبتلا به این بیماری ۰/۵ است. احتمال این‌که فردی از این جامعه به این بیماری مبتلا شود و بهبود یابد، چند درصد است؟				۱/۵
۱۰	در یک دانشگاه ۵۵ درصد دانشجویان سال اول دختر و بقیه پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند. چند درصد کل دانشجویان، تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند؟				۱/۵
۱۱	در یک شرکت تولیدی، ۵۵ درصد کالاها محصول دستگاه A و ۴۵ درصد کالاها محصول دستگاه B هستند. احتمال معیوب‌بودن کالاهای تولیدشده توسط دستگاه A برابر ۳ درصد و احتمال معیوب‌بودن کالای تولیدشده توسط دستگاه B برابر ۵ درصد است. اگر یک کالا را به طور تصادفی انتخاب کنیم و بدانیم معیوب است، با چه احتمالی این کالا محصول دستگاه A است؟				۲
۱۲	سه نفر مشغول رمزگشایی یک پیام هستند. احتمال موفقیت آن‌ها به ترتیب $\frac{2}{3}$، $\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{2}$ است. مطلوب است احتمال این‌که: الف) هر سه موفق شوند. ب) حداقل یکی از آن‌ها موفق شود. پ) فقط یکی از آن‌ها موفق شود.				۲
۱۳	در جعبه‌ای ۸ لامپ موجود است که دوتای آن معیوب است. به تصادف و پشت سر هم این لامپ‌ها را آزمایش کرده و آن‌ها را کنار می‌گذاریم. مطلوبست: الف) احتمال این‌که در آزمایش سوم اولین لامپ معیوب پیدا شود. ب) احتمال این‌که در آزمایش سوم، دومین لامپ معیوب پیدا شود.				۲
	جمع نمرات				۲۰

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- علم آمار

۲- علم احتمال

۳- فضای نمونه ـ برآمد ـ پیشامد

۴- ۲۵

توضیح تعداد مسافرها در مسیر رفت و برگشت هر کدام عددی بین ۰ تا ۴ است، پس فضای نمونه به صورت $S = \{۰,۱,۲,۳,۴\} \times \{۰,۱,۲,۳,۴\}$ است و شامل ۲۵ زوج مرتب است.

۵- نادرست

توضیح در پرتاب ۳ سکه، فضای نمونه را می‌توان به صورت فضای نمونه هم‌شانس زیر در نظر گرفت:

$S=\{(ر,ر,ر),(ر,ر,پ),(ر,پ,ر),(پ,ر,ر),(پ,پ,ر),$
$(پ,پ,پ),(پ,ر,پ),(ر,پ,پ)\}$

همچنین فضای نمونه را می‌توان به صورت فضای نمونهٔ غیرهم‌شانس $S=\{۰,۱,۲,۳\}$ تعریف کرد که در آن هر برآمد نشان‌دهندهٔ تعداد روها در پرتاب ۳ تاس می‌باشد، بنابراین فضای نمونه یک آزمایش تصادفی یکتا نیست.

۶- در این شکل‌ها ظرفی که در آن مهرهٔ رنگی وجود دارد مانند جامعه است و مهره‌هایی که در مشت هستند مانند نمونه‌اند. پس شکل (۱) نشان‌دهندهٔ «بررسی یک نمونهٔ نامعلوم از یک جامعهٔ معلوم» یعنی «علم احتمال» است و شکل (۲) نشان‌دهندهٔ «شناختن جامعهٔ نامعلوم، با استفاده از نمونه‌های جمع‌آوری‌شدهٔ معلوم» یعنی «علم آمار» است.

نتیجه شکل (۱) ⟵ علم احتمال شکل (۲) ⟵ علم آمار

۷- وقتی با جامعهٔ ناشناخته سروکار داریم شناختن جامعه با استفاده از نمونه‌ها و داده‌ها یک کار آماری است. اما اگر جامعه را با جزئیات موردنیاز بشناسیم و بخواهیم بدانیم نمونه‌هایی که از آن جامعه انتخاب کرده‌ایم چه خصوصیاتی دارند از علم احتمال استفاده می‌کنیم، پس با این توضیحات می‌توان گفت قسمت‌های (الف)، (پ)، (ث) و (چ) مربوط به علم احتمال و بقیهٔ قسمت‌ها که به شناخت جامعه ربط دارند مربوط به علم آمار است.

۸- وقتی پیشامد اول‌آمدن رخ دهد یعنی در پرتاب تاس یکی از اعداد مجموعه $A=\{۲,۳,۵\}$ رو آمده است. فرض کنید عدد $x \in \{۲,۳,۵\}$ رو آمده باشد، بنابراین هر پیشامدی که شامل عدد x باشد رخ داده است. تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ که شامل عدد x باشد برابر است با $۲^۵ = ۳۲$، بنابراین با روآمدن عدد x، ۳۲ پیشامد رخ داده است.

۹- الف) اگر x را نتیجهٔ بازی احمد و y را نتیجهٔ بازی عباس در نظر بگیریم، داریم:

$(x,y) \in \{قیچی, کاغذ, سنگ\} \times \{قیچی, کاغذ, سنگ\}$

در نتیجه فضای نمونه به شکل زیر است:

$S=\{(سنگ, کاغذ),(قیچی, سنگ),(کاغذ, سنگ),(سنگ, سنگ),$
$(کاغذ, قیچی),(سنگ, قیچی),(قیچی, کاغذ),(کاغذ, کاغذ),$
$(قیچی, قیچی)\} \Rightarrow |S|=|S_۱||S_۲|=۳\times۳=۹$

ب) پیشامد شامل حالت‌های برد احمد به شکل مقابل است:

$A=\{(کاغذ, قیچی),(سنگ, کاغذ),(قیچی, سنگ)\}$

۱۰- الف)

$$S=\underbrace{\{گرم، سرد\}}_{S_۱}\times\underbrace{\{مرطوب، خشک\}}_{S_۲}\times\underbrace{\{نمی‌وزد، می‌وزد\}}_{S_۳}$$
$$\times\underbrace{\{ابری، نیمه‌ابری، صاف\}}_{S_۴}\times\underbrace{\{غیربارانی، بارانی\}}_{S_۵}$$

$\Rightarrow |S|=۲\times۲\times۲\times۳\times۲=۴۸$

ب) اگر الان باران ببارد و پیشامد بارانی‌بودن را A بگیریم داریم:

$|A|=S_۱\times S_۲\times S_۳\times S_۴\times\{بارانی\}$

$\Rightarrow |A|=|S_۱|\times|S_۲|\times|S_۳|\times|S_۴|\times۱=۲\times۲\times۲\times۳\times۱=۲۴$

۱۱- فضای نمونه شامل حالت‌های مختلف ترتیب قرارگرفتن این افراد در یک ردیف است که تعداد این حالت‌ها طبق اصل ضرب !۱۴ حالت مختلف می‌باشد.

الف) اولین نفری که وارد سالن می‌شود، کوتاه‌ترین عضو تیم است، پس بقیهٔ افراد به !۱۳ طریق می‌توانند وارد سالن شوند، بنابراین داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۳!}{۱۴!}=\frac{۱}{۱۴}$$

ب) اولین نفر کوتاه‌ترین و آخرین نفر بلندترین فرد گروه است. ۱۲ نفر دیگر به !۱۲ طریق می‌توانند وارد سالن شوند، بنابراین داریم:

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۱۲!}{۱۴!}=\frac{۱}{۱۴\times۱۳}=\frac{۱}{۱۸۲}$$

پ) دو حالت وجود دارد که افراد به ترتیب قد وارد شوند. از کوچک به بزرگ یا از بزرگ به کوچک، بنابراین داریم: $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۲}{۱۴!}$

۱۲- $n(S)=۱۰!$

الف) $\boxed{۱,۲,۳}$ را با هم در یک بسته در نظر می‌گیریم. ۷ نفر دیگر را با این یک بسته با هم جایگشت می‌دهیم:

محاسبه $n(A)$: $\boxed{۱,۲,۳}$ ۷ نفر دیگر

$$\Rightarrow n(A)=\underset{\substack{\downarrow\\ \text{جابه‌جایی یک بسته}\\ \text{با ۷ نفر دیگر}}}{۸!}\times\underset{\substack{\downarrow\\ \text{جابه‌جایی ۱،۲،۳}\\ \text{در کنار هم}}}{۳!}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸!\times۳!}{۱۰!}=\frac{۶}{۹۰}=\frac{۳}{۴۵}=\frac{۱}{۱۵}$$

ب) ترتیب رسیدن بقیهٔ افراد یعنی ۷ نفری که شماره‌شان مضرب ۳ نیست، به خط پایان !۷ حالت مختلف دارد. شماره‌های ۳، ۶ و ۹ برای این‌که در کنار هم نباشند، می‌توانند در ۳ مکان از ۸ مکان زیر که با فلش مشخص شده به خط پایان برسند. انتخاب ۳ مکان از این ۸ مکان $\binom{۸}{۳}$ حالت مختلف و جابه‌جایی این ۳ نفر در ۳ مکان انتخاب شده !۳ حالت دارد، پس مقدار کل حالت‌های مطلوب برابر است با:

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۷!\times\binom{۸}{۳}\times۳!}{۱۰!}$$

↑○↑○↑○↑○↑○↑○↑○↑

پ) یا ۱ بین ۵ و ۹ است یا ۵ بین ۱ و ۹ و یا ۹ بین ۱ و ۵ پس هر کدام از این حالت‌ها $\frac{۱}{۳}$ از کل جای‌گشت‌های ۱۰ عدد را شامل می‌شود، پس هرکدام $\frac{۱۰!}{۳}$ حالت دارد، پس داریم:

$$p(H)=\frac{n(H)}{n(S)}=\frac{\frac{۱۰!}{۳}}{۱۰!}=\frac{۱}{۳}$$

۱۳- در پرتاب ۵ سکه تعداد سکه‌های رو آمده می‌تواند ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ تا باشد، پس فضای نمونه برحسب تعداد روها برابر است با:

$S=\{۰,۱,۲,۳,۴,۵\}$

۱۴- $S=\{ر,(پ,ر),(پ,پ,ر),(پ,پ,پ,ر),\dots\}$

$A=\{ر,(پ,ر),(پ,پ,ر),(پ,پ,پ,ر),(پ,پ,پ,پ,ر)\}$

در اولین پرتاب رو بیاید. — در دومین پرتاب رو بیاید. — در سومین پرتاب رو بیاید. — در چهارمین پرتاب رو بیاید. — در پنجمین پرتاب رو بیاید.

۱۵- با رخ‌دادن a، همهٔ پیشامدهایی که a عضوی از آن‌ها است رخ می‌دهند. تعداد این پیشامدها برابر است با: $۲^{n-۱}$ (a عضوی از پیشامد است و هر عضو دیگر فضای نمونه ۲ حالت دارد؛ یا در پیشامد مورد نظر هست یا نیست.)

۱۶- ناسازگار ـ $\varnothing$ ـ سازگار

۱۷- $B\subseteq A$

۱۸- الف) $A\cap B=\{۳\}$ بوده و ناتهی است، پس دو پیشامد ناسازگارند.

ب) $A\cap B=\varnothing$ است، پس دو پیشامد ناسازگارند.

۱۹- $P(A\cap B)=۰ \Rightarrow A\cap B=\varnothing \Rightarrow$ ناسازگارند B,A

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۴}+P(B) \Rightarrow P(B)=\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۴}=\frac{۵}{۱۲}$

۲۰- $P(A')=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۱-P(A)=\frac{۱}{۲} \Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۲}$

$P(A'\cup B')=\frac{۳}{۴} \Rightarrow ۱-P(A\cap B)=\frac{۳}{۴}$

$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}$

$۲P(B)=P(A\cup B) \Rightarrow ۲P(B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\Rightarrow P(B)=P(A)-P(A\cap B)$

$\Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۴}$

۲۱- $P(A)=۳P(A\cap B),۲P(B)=۳P(A\cap B)$

$\Rightarrow P(B)=\frac{۳}{۲}P(A\cap B)$

$\frac{P(A\cup B)}{P(A\cap B)}=\frac{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}{P(A\cap B)}$

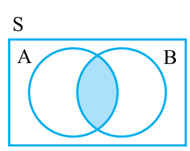
$=\frac{۳P(A\cap B)+\frac{۳}{۲}P(A\cap B)-P(A\cap B)}{P(A\cap B)}$

$=\frac{\frac{۷}{۲}P(A\cap B)}{P(A\cap B)}=\frac{۷}{۲}$

۲۲- A: مجموعه اعداد مضرب ۳ B: مجموعه اعداد مضرب ۵

الف)

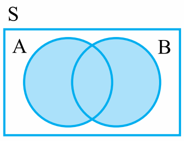
$P(A\cap B)=\frac{[\frac{۱۰۰۰}{۱۵}]}{۱۰۰۰}=\frac{۶۶}{۱۰۰۰}$



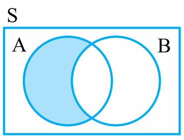
ب) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{[\frac{۱۰۰۰}{۳}]}{۱۰۰۰}+\frac{[\frac{۱۰۰۰}{۵}]}{۱۰۰۰}-\frac{[\frac{۱۰۰۰}{۱۵}]}{۱۰۰۰}$

$=\frac{۳۳۳}{۱۰۰۰}+\frac{۲۰۰}{۱۰۰۰}-\frac{۶۶}{۱۰۰۰}=\frac{۴۶۷}{۱۰۰۰}$



پ) $P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$



$=\frac{[\frac{۱۰۰۰}{۳}]}{۱۰۰۰}-\frac{[\frac{۱۰۰۰}{۱۵}]}{۱۰۰۰}=\frac{۳۳۳}{۱۰۰۰}-\frac{۶۶}{۱۰۰۰}=\frac{۲۶۷}{۱۰۰۰}$

۲۳- A و B را به ترتیب پیشامدهای مربوط به داشتن ناراحتی کلیه و قلب در نظر می‌گیریم:

$P(A)=۰/۲۳,P(B)=۰/۲۴,P(A\cup B)=۰/۳۸$

الف) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$P(A\cap B)=۰/۲۳+۰/۲۴-۰/۳۸=۰/۰۹=٪۹$

ب) $P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$

$=۰/۲۳-۰/۰۹=۰/۱۴=٪۱۴$

۲۴- $P(B')=\frac{۵}{۸} \Rightarrow P(B)=۱-\frac{۵}{۸}=\frac{۳}{۸}$

الف) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\Rightarrow \frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۸}-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۸}$

ب) $P(B\cap A')=P(B-A)=P(B)-P(B\cap A)$

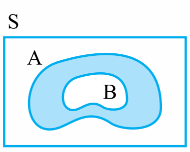
$=\frac{۳}{۸}-\frac{۱}{۸}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$

پ) $P(A'\cup B')=۱-P(A\cap B)$

$=۱-P(A)-P(B)+P(A\cup B)$

$=۱-\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۸}+\frac{۳}{۴}=\frac{۷}{۸}$

۲۵- الف)



$\begin{cases}(A-B)\cap B=\varnothing\\(A-B)\cup B=A\end{cases}$

$P(A)=P((A-B)\cup B)$

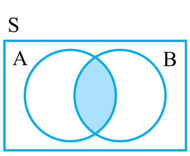
$\xrightarrow{\text{جدا از هماند.} B \text{ و } A-B} P(A)=P(A-B)+P(B)$

$\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(B)$

ب) با توجه به این‌که همهٔ احتمالات بزرگ‌تر یا مساوی صفر هستند، داریم:

$P(A-B)\geq ۰ \Rightarrow P(A)-P(B)\geq ۰ \Rightarrow P(A)\geq P(B)$

۲۶- الف)



$A=(A\cap B')\cup(A\cap B)$

$P(A)=P((A\cap B')\cup(A\cap B))$

$A\cap B'$، $A\cap B$ دو مجموعهٔ جدا از هم‌اند؛ زیرا:

$(A\cap B')\cap(A\cap B)=A\cap\underbrace{B'\cap B}_{\varnothing}=\varnothing$

بنابراین داریم: $P(A)=P((A\cap B')\cup(A\cap B))$

$\xrightarrow{\text{اصول احتمال}} P(A)=P(A\cap B')+P(A\cap B)$

$\Rightarrow P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$

ب) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$: P(A\cup B)\le 1$

اصول احتمال $\Rightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)\le 1$

$\Rightarrow P(A\cap B)\ge P(A)+P(B)-1$

پ) $P(A'\cup B)-P(A\cap B)$

$=P(A')+P(B)-P(A'\cap B)-P(A\cap B)$

$=1-P(A)+P(B)-(P(B)-P(A\cap B))-P(A\cap B)$

$=1-P(A)+P(B)-P(B)+P(A\cap B)-P(A\cap B)$

$=1-P(A)$

ت) $P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)$

$=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$

ث) $P(A'\cup B')=P((A\cap B)')=1-P(A\cap B)\ (I)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\to P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\ (II)$

$(I),(II)\Rightarrow P(A'\cup B')$

$=1-(P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$\Rightarrow P(A'\cup B')=1-P(A)-P(B)+P(A\cup B)$

۲۷- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\Rightarrow P(A\cup B)=1+1-P(A\cap B)=2-P(A\cap B)$

طبق اصل (۱) یک کولموگروف همواره تمام احتمالات کوچک‌تر یا مساوی یک هستند، پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cup B)\le 1 \Rightarrow 2-P(A\cap B)\le 1 \Rightarrow P(A\cap B)\ge 1 \\ \text{اصول احتمال}: P(A\cap B)\le 1 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow P(A\cap B)=1$

۲۸- الف)

$$\left.\begin{array}{l} n(S)=\text{تعداد کل زیرمجموعه‌ها}=2^{12} \\ \text{تعداد زیر مجموعه‌های شامل ۱، ۲ و فاقد ۳، ۴ و ۵}: n(A)=2^{12-2-3}=2^{7} \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{2^7}{2^{12}}=\frac{1}{32}$

ب)

$$\left.\begin{array}{l} n(S)=\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۷ عضوی}=\binom{12}{7} \\ \text{تعداد زیر مجموعه‌های ۷ عضوی شامل ۱ و ۲ و فاقد ۳، ۴ و ۵}: n(A)=\binom{12-2-3}{7-2}=\binom{7}{5} \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{7}{5}}{\binom{12}{7}}$

۲۹- الف) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{4}{5}+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}=\frac{13}{15}$

$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$

ب)

$$\left.\begin{array}{l} P(B-A)=0/3 \Rightarrow P(B)-P(B\cap A)=0/3 \\ P(A-B)=0/1 \Rightarrow P(A)-P(A\cap B)=0/1 \end{array}\right\}$$

$\xrightarrow{\text{تفاضل}} P(B)-P(A)=0/1$

$P(A')=2P(B') \Rightarrow 1-P(A)=2(1-P(B))$

$\Rightarrow 2P(B)-P(A)=1$

$$\left.\begin{array}{l} P(B)-P(A)=0/2 \\ 2P(B)-P(A)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow P(B)=0/8\,,\ P(A)=0/6$$

۳۰- $P(A'\cup B')=0/9 \Rightarrow 1-P(A\cap B)=0/9$

$\Rightarrow P(A\cap B)=0/1$

$P(A'-B')=0/3 \Rightarrow P(A')-P(A'\cap B')=0/3$

$\Rightarrow 1-P(A)-(1-P(A\cup B))=0/3$

$\Rightarrow P(A\cup B)-P(A)=0/3$

$\Rightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)-P(A)=0/3$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(B-A)=0/3 \\ P(B)-0/1=0/3 \Rightarrow P(B)=0/4 \end{cases}$$

$P(A\Delta B)=P(A-B)+P(B-A)$

$\Rightarrow 0/4=P(A-B)+0/3 \Rightarrow P(A-B)=0/1$

۳۱- $P(A)=P(B)=P(A'\cap B')=4P(A\cap B)\quad (1)$

$P(A'\cap B')=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$

$=1-4P(A\cap B)-4P(A\cap B)+P(A\cap B)$

$\Rightarrow P(A'\cap B')=1-7P(A\cap B)\quad (2)$

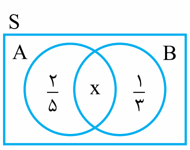
$(1),(2)\Rightarrow 1-7P(A\cap B)=4P(A\cap B)$

$\Rightarrow 11P(A\cap B)=1 \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{11}$

$\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{4}{11}-\frac{1}{11}=\frac{3}{11}$

$\Rightarrow P(A)=P(B)=4P(A\cap B)=\frac{4}{11}$

۳۲-



$P(A\cup B)=\frac{2}{5}+x+\frac{1}{3}\le 1$

$\Rightarrow x\le 1-\frac{1}{3}-\frac{2}{5} \Rightarrow x\le\frac{4}{15}$

$\max(P(A)+P(B))=\max((\frac{2}{5}+x)+(x+\frac{1}{3}))$

$=\max(\frac{11}{15}+2x)=\frac{11}{15}+2\times\frac{4}{15}=\frac{19}{15}$

۳۳- فضای نمونهٔ پرتاب یک سکه به صورت $S=\{\text{پشت، رو}\}$ است. اطلاعات مسئله و رابطهٔ مربوط به «۱= جمع احتمالات» را در یک دستگاه نوشته و دستگاه را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} \text{طبق فرض مسئله}: P(\text{رو})=\frac{1}{2}P(\text{پشت}) \\ \text{«جمع احتمالات = ۱»} \Rightarrow P(\text{رو})+P(\text{پشت})=1 \\ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری فرض}} \frac{1}{2}P(\text{پشت})+P(\text{پشت})=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{3}{2}P(\text{پشت})=1 \Rightarrow P(\text{پشت})=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow P(\text{رو})=\frac{1}{2}P(\text{پشت})=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \Rightarrow P(\text{رو})=\frac{1}{3}$

ردیف	نمونهٔ امتحان نیم‌سال اول	رشتهٔ ریاضی فیزیک	آمار و احتمال	
ردیف	امتحان شمارهٔ ۱	مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه	kheilisabz.com	نمره

ردیف	سؤال	نمره
۱	گزاره‌نما را تعریف کنید.	۰/۵
۲	با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، نشان دهید: $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$	۱
۳	ارزش گزارهٔ سوری زیر را تعیین کرده و نقیض آن را بنویسید. $(\forall x \in \mathbb{R}\,;\, \frac{x^2-1}{x-1} = x+1) \vee (\exists y \in \mathbb{R}\,;\, y < 0 \wedge y^2 \le 1)$	۱/۵
۴	ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a^3 عددی فرد باشد، آن‌گاه a عددی فرد است.	۱
۵	تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعهٔ $k+1$ عضوی از تعداد اعضای مجموعهٔ شامل زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $k-1$ عضوی، ۴۷ واحد بیشتر است. مقدار k را بیابید. (هر زیرمجموعهٔ یک مجموعه غیر از خودش را زیرمجموعهٔ محض می‌گوییم.)	۱
۶	با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: $(A-B)-C = (A-C)-(B-C)$	۱/۵
۷	عبارت‌های مقابل را ثابت کنید. الف) $X \subseteq A \wedge X \subseteq A' \Rightarrow X = \varnothing$ ب) $A \subseteq B' \Rightarrow B \subseteq A'$	۱/۵
۸	اگر $A = (1,5]$ و $B = \{-1,1,2\}$ باشد، $A \times B$ و A^2 را در صفحهٔ مختصات دکارتی رسم کنید.	۱
۹	از گزینه‌های داخل پرانتز، آن را که صحیح است انتخاب کنید: در سه بار پرتاب سکه، پیشامدهای A: هر ۳ بار سکه‌ها مشابه بیایند و B: زوج بار رو بیایند، (سازگارند ☐ / ناسازگارند ☐) و هم‌چنین این دو پیشامد (مستقل‌اند ☐ / وابسته‌اند ☐).	۱/۵
۱۰	عددی به تصادف از ۱ تا ۲۰۰ انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال این‌که عدد انتخابی نه بر ۳ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۴.	۱
۱۱	تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. احتمال این‌که در پرتاب این تاس، عددی اول ظاهر شود چه‌قدر است؟ احتمال مشاهدهٔ اعداد ۲ یا ۳ را بیابید.	۱/۵
۱۲	دو تاس همگن را می‌اندازیم. اگر حاصل‌جمع شماره‌های روشده کم‌تر از ۶ باشد، احتمال آن‌که حداقل یکی از تاس‌های روشده ۲ باشد را بیابید.	۱/۵
۱۳	از کیسه‌ای که دو گوی سبز، سه گوی سفید و ۵ گوی آبی دارد، سه گوی را پی‌درپی و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال این‌که گوی اول سفید و ۲تای دیگر آبی باشد.	۱
۱۴	از ظرف یک، ۴ مهره و از ظرف دو، ۶ مهره برداشته به ظرف سومی منتقل می‌کنیم. از ظرف سوم مهره‌ای به تصادف برمی‌داریم. مطلوب است احتمال این‌که مهرهٔ انتخاب‌شده سفید باشد. ظرف یک: ۴ مهره سفید، ۶ مهره سیاه ظرف دو: ۵ مهره سفید، ۴ مهره سیاه	۱/۵
۱۵	۶۰ درصد واجدین شرایط شهر A و ۴۰ درصد واجدین شرایط شهر B در انتخابات شرکت کرده‌اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر A، ۴ برابر واجدین شرایط شهر B باشد و فردی به تصادف از بین رأی‌دهندگان این ۲ شهر انتخاب کنیم، با چه احتمالی این شخص انتخاب‌شده از شهر A خواهد بود؟	۱/۵
۱۶	در یک امتحان ۵ گزینه‌ای ۸ سؤال مطرح شده است. اگر یک دانش‌آموز به همهٔ سؤالات پاسخ دهد، احتمال آن را به دست آورید که: الف) تنها به سؤالات با شمارهٔ فرد پاسخ درست داده باشد. ب) به ۳ سؤال پاسخ درست داده باشد.	۱/۵
	جمع نمرات	۲۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی امتحان شمارهٔ (۱)

۱- هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود.

۲- جدول ارزش گزاره‌ها را به شکل زیر می‌کشیم. با توجه به یکسان‌بودن دو ستون آخر، داریم: $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F

۳- گزارهٔ دارای سور عمومی به ازای $x=۱$ نادرست است؛ پس ارزش نادرست دارد. گزارهٔ دارای سور وجودی به ازای $y=-۱$ درست است؛ پس ارزش آن درست است؛ بنابراین ارزش گزارهٔ مرکب داده‌شده به صورت $F \vee T$ بوده و همواره درست است. $F \vee T \equiv T$.

نقیض گزارهٔ داده‌شده، به صورت زیر است:

$$\sim[(\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^۲-۱}{x-۱}=x+۱) \vee (\exists y \in \mathbb{R}; y<۰ \wedge y^۲ \leq ۱)]$$

$$[\exists x \in \mathbb{R}; \sim(\frac{x^۲-۱}{x-۱}=x+۱)] \wedge [\forall y \in \mathbb{R}; \sim(y<۰ \wedge y^۲ \leq ۱)]$$

$$(\exists x \in \mathbb{R}; \frac{x^۲-۱}{x-۱} \neq x+۱) \wedge (\forall y \in \mathbb{R}; y \geq ۰ \vee y^۲ > ۱)$$

۴- به جای اثبات حکم داده‌شده، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم؛ چون اثبات آن ساده‌تر است.

(a عددی فرد است. $\Rightarrow$ $a^۳$ عددی فرد است.)

$\equiv$ (a عددی زوج است. $\Rightarrow$ $a^۳$ عددی زوج است.)

چنان‌چه a عددی زوج باشد، یعنی $a=۲k$، خواهیم داشت:

$$a^۳=(۲k)^۳=۸k^۳=۲(\underbrace{۴k^۳}_{k' \in \mathbb{Z}})=۲k'$$

در نتیجه $a^۳$ عددی زوج است.

۵- $۲^{k+۱}-۱=۲^{k-۱}+۴۷ \Rightarrow ۲^{k+۱}-۲^{k-۱}=۴۸$

$$\Rightarrow ۲^{k-۱}(۲^۲-۱)=۴۸ \Rightarrow ۲^{k-۱}=۱۶ \Rightarrow k-۱=۴ \Rightarrow k=۵$$

۶- سمت راست تساوی $=(A-C)-(B-C)$

$$=(A \cap C')-(B \cap C')$$

$$=(A \cap C') \cap (B \cap C')' = (A \cap C') \cap (B' \cup C)$$

$$= A \cap (C' \cap (B' \cup C)) = A \cap ((C' \cap B') \cup \underbrace{(C' \cap C)}_{\varnothing})$$

$$= A \cap (C' \cap B') = A \cap (B' \cap C') = (A \cap B') \cap C'$$

$=(A \cap B')-C=(A-B)-C=$ سمت چپ تساوی

۷- الف)

$\left\{\begin{array}{l} X \subseteq A \\ X \subseteq A' \end{array}\right. \Rightarrow (X \cap X) \subseteq (A \cap A') \Rightarrow X \subseteq \varnothing$

از طرفی $\varnothing$ زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است. $\Rightarrow \varnothing \subseteq X$

$\Rightarrow X=\varnothing$

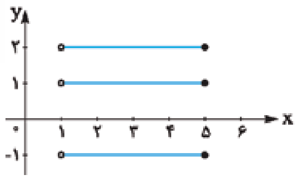
ب) برای اثبات این‌که $B \subseteq A'$ باید نشان دهیم که: $(\forall x; x \in B \Rightarrow x \in A')$، بنابراین داریم:

$$\forall x; (x \in B \Rightarrow x \notin B' \xrightarrow{A \subseteq B'} x \notin A \Rightarrow x \in A')$$

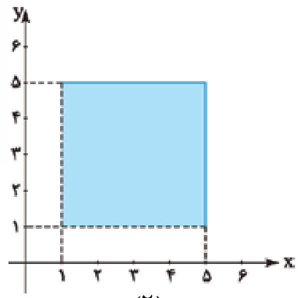
در نتیجه داریم: $\forall x; (x \in B \Rightarrow x \in A') \Rightarrow B \subseteq A'$

۸- (۱) $A \times B = \{(x,y) \mid ۱<x \leq ۵ \wedge y \in \{-۱,۱,۲\}\}$

(۲) $A^۲ = \{(x,y) \mid ۱<x \leq ۵ \wedge ۱<y \leq ۵\}$



(۱)



(۲)

۹- اگر $P(A \cap B)=۰$ باشد، A و B ناسازگارند و اگر $P(A \cap B)=P(A).P(B)$ باشد، A و B مستقل‌اند:

$$|S|=۲\times۲\times۲=۸$$

$A=\{(ر،ر،ر),(پ،پ،پ)\} \Rightarrow P(A)=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$

$B=\{(پ،پ،پ),(پ،ر،ر),(ر،پ،ر),(ر،ر،پ)\}=P(B)=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$

$A \cap B=\{(پ،پ،پ)\} \Rightarrow P(A \cap B)=\frac{۱}{۸}$

$\Rightarrow P(A \cap B) \neq ۰ \Rightarrow$ A و B سازگارند.

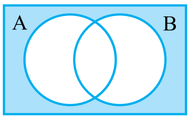
$P(A \cap B)=\frac{۱}{۸}$

$P(A).P(B)=\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}$

$\Rightarrow P(A \cap B)=P(A).P(B)=\frac{۱}{۸}$

$\Rightarrow$ A و B مستقل‌اند.

۱۰- A: پیشامد این‌که عدد انتخابی مضرب ۳ باشد. B: پیشامد این‌که عدد انتخابی مضرب ۴ باشد.



$A' \cap B'$

$$P(A' \cap B')=۱-P(A \cup B)$$

$$=۱-P(A)-P(B)+P(A \cap B)$$

$$=۱-\frac{[\frac{۲۰۰}{۳}]}{۲۰۰}-\frac{[\frac{۲۰۰}{۴}]}{۲۰۰}+\frac{[\frac{۲۰۰}{۱۲}]}{۲۰۰}=۱-\frac{۶۶}{۲۰۰}-\frac{۵۰}{۲۰۰}+\frac{۱۶}{۲۰۰}=\frac{۱۰۰}{۲۰۰}=\frac{۱}{۲}$$

۱۱- فرض مسئله: $P(۲)=P(۴)=P(۶)=۳P(۱)=۳P(۳)=۳P(۵)$

فرض می‌کنیم $P(۱)=x$ باشد. $\Rightarrow P(۱)=P(۳)=P(۵)=x,$

$P(۲)=P(۴)=P(۶)=۳x$

جمع احتمالات $=۱ \Rightarrow x+۳x+x+۳x+x+۳x=۱$

$$\Rightarrow ۱۲x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۱۲}$$

$$\Rightarrow P(۲)=P(۴)=P(۶)=\frac{۳}{۱۲}, P(۱)=P(۳)=P(۵)=\frac{۱}{۱۲}$$

احتمال وقوع اعداد اول در پرتاب تاس $=P(\{۲,۳,۵\})$

$$=P(۲)+P(۳)+P(۵)=\frac{۳}{۱۲}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۵}{۱۲}$$

احتمال مشاهدهٔ اعداد ۲ یا ۳ $=P(\{۲,۳\})=P(۲)+P(۳)$

$$=\frac{۳}{۱۲}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

۱۲- B: پیشامد این‌که جمع ۲ عدد روشده کم‌تر از ۶ باشد.

A: پیشامد این‌که حداقل یکی از تاس‌های روشده ۲ باشد.

$B=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱)\}$

$$A=\{(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶),(۱,۲),(۳,۲),(۴,۲),(۵,۲),(۶,۲)\}$$

$$A\cap B=\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۲)\}$$

$$P(A\mid B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$$

۱۳- A: پیشامد این‌که گوی اول سفید باشد.

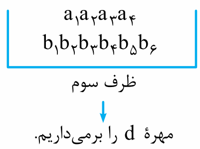
B: پیشامد این‌که گوی دوم آبی باشد.

C: پیشامد این‌که گوی سوم آبی باشد.

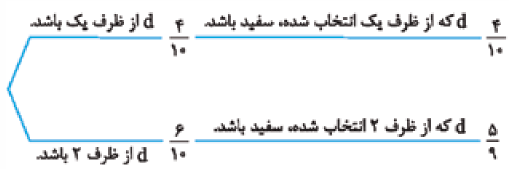
$$P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B\mid A).P(C\mid A\cap B)$$

$$=\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۵}{۹}\times\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۱۲}$$

۱۴- **روش ۱:**



نمودار درختی



$$P=\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۴}{۱۰}+\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۵}{۹}=\frac{۱۶}{۱۰۰}+\frac{۳۰}{۹۰}=\frac{۴۴۴}{۹۰۰}$$

روش ۲: D را پیشامد سفیدبودن مهرهٔ انتخاب‌شده و B_1 و B_2 را به ترتیب پیشامد این‌که مهرهٔ انتخاب‌شده، از ظرف ۱ یا ۲ انتخاب‌شده باشد، تعریف می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$P(D)=P(D\cap B_1)+P(D\cap B_2)$$

$$=P(B_1).P(D\mid B_1)+P(B_2).P(D\mid B_2)$$

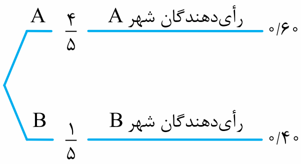
$$=\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۴}{۱۰}+\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۵}{۹}=\frac{۱۶}{۱۰۰}+\frac{۳۰}{۹۰}=\frac{۱۴۴+۳۰۰}{۹۰۰}=\frac{۴۴۴}{۹۰۰}$$

۱۵- R: پیشامد این‌که شخص انتخاب‌شده رأی داده باشد.

A: پیشامد این‌که شخص انتخاب‌شده از شهر A باشد.

B: پیشامد این‌که شخص انتخاب‌شده از شهر B باشد.

$$P(A)=۴P(B)\ ,\ P(A)+P(B)=۱\Rightarrow P(A)=\frac{۴}{۵}\ ,\ P(B)=\frac{۱}{۵}$$



$$P(R)=P(\text{شخص انتخاب‌شده رأی داده باشد})$$

$$=P(A).P(R\mid A)+P(B).P(R\mid B)$$

$$=\frac{۴}{۵}\times ۰/۶۰+\frac{۱}{۵}\times ۰/۴۰=\frac{۲۸}{۵۰}\ \Rightarrow\ P(R)=\frac{۲۸}{۵۰}$$

$$P(A|R)=\frac{P(A\cap R)}{P(R)}=\frac{P(A).P(R|A)}{P(R)}=\frac{\frac{۴}{۵}\times ۰/۶۰}{\frac{۲۸}{۵۰}}=\frac{۶}{۷}$$

۱۶- الف) پیشامد درست جواب دادن به سؤال iاُم را با A_i نشان می‌دهیم.

پیشامد پاسخ‌دادن یا پاسخ‌ندادن به سؤالات مختلف مستقل از هم هستند:

$$P(A_i)=\frac{۱}{۵}\ ,\ P(A'_i)=\frac{۴}{۵}$$

الف) $P(A_1\cap A'_2\cap A_3\cap A'_4\cap\cdots\cap A'_8)$

$$=P(A_1)P(A'_2)P(A_3)P(A'_4)\cdots P(A'_8)$$

$$=\frac{۱}{۵}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۴}{۵}\times\cdots\times\frac{۴}{۵}=(\frac{۱}{۵})^۴(\frac{۴}{۵})^۴$$

ب) ابتدا سه سؤالی را که درست جواب داده می‌شود را انتخاب می‌کنیم که به $\binom{۸}{۳}$ حالت امکان‌پذیر است. احتمال درست جواب‌دادن به هر یک از سؤالات $\frac{۱}{۵}$ و احتمال غلط جواب‌دادن به هر سؤال $\frac{۴}{۵}$ است؛ پس ۳ بار $\frac{۱}{۵}$ و ۵ بار $\frac{۴}{۵}$ در هم ضرب می‌شوند.

$$P(x=۳)=P(\text{به ۳ سؤال، پاسخ درست بدهیم})=\binom{۸}{۳}(\frac{۱}{۵})^۳(\frac{۴}{۵})^۵$$