● تقدیم‌به
اوکه روزی خواهدآمد ...

مقدمه مولّف

تـا کـی بـه انـتـظـارگـذاری بـه زاریـم

بـازآی بعـد از این‌همـه چشـم‌انتظاریم ...

وقتی که یک بچه بود، پدرش به عنوان مربی اسب، برای تربیت اسب‌ها از یک اصطبل به اصطبل دیگر و از یک مزرعه به مزرعهٔ دیگر در گردش بود. به همین خاطر مدرسه‌اش در طول سال چند بار عوض می‌شد.

یک روز، وقتی که شاگرد دبیرستان بود، معلم از شاگردان خواست که بنویسند وقتی بزرگ شدند، می‌خواهند چه کاره شوند. او یک دقیقه هم صبر نکرد و هفت صفحه دربارهٔ هدفش که می‌خواست مالک یک مزرعهٔ اسب باشد، نوشت. او همه‌چیز را با جزئیات کامل نوشت و حتی طرحی از آن مکان با اصطبل‌ها و ویلایش کشید.

دو روز بعد، او نوشته‌اش را با یک نمرهٔ F (پایین‌ترین نمره) در صفحهٔ اول دریافت کرد. بعد از کلاس، نزد معلم رفت و پرسید: «چرا من پایین‌ترین نمره را گرفتم؟»

معلم پاسخ داد: «این آرزو برای بچه‌ای مثل تو که نه پول دارد، نه امکانات و از یک خانوادهٔ دوره‌گرد است خیلی غیرواقعی است. به‌هیچ‌وجه ممکن نیست روزی به این آرزوی بزرگ دست پیدا کنی.» سپس پیشنهاد داد دوباره بنویسید و آرزوی واقعی‌تری داشته باشد. پسر به منزل رفت و از پدرش راهکار خواست. پدر پاسخ داد: «این تصمیم خیلی برای تو مهم است؛ پس خودت باید برای آن فکر کنی.» پس از چند روز، پسر همان نوشته را بدون هیچ تغییری، به معلم داد و گفت: «شما نمرهٔ F را نگه‌دار و من آرزویم را نگه می‌دارم.»

اکنون «مونتی رابرتز» مالک خانه‌ای با زیربنای ۴۰۰ مترمربع در وسط یک مزرعهٔ اسب، به مساحت ۸ هکتار می‌باشد و آن نوشته را قاب گرفته و بالای شومینه‌اش نصب کرده است.

عزیزان من! به خاطر داشته باشید که باید به حرف دل خود گوش کنید و اجازه ندهید هیچ کس رؤیایتان را از شما بگیرد. اهداف بزرگ خودتان را به طور شفاف تعیین کنید و با تلاش خود به آن جامهٔ عمل بپوشانید هر چند به نظر دیگران غیرعملی باشد.

ویژگی‌های این کتاب:

۱ پوشش کامل مثال‌ها، تمرین‌ها، کار در کلاس‌ها و حتی متن کتاب درسی
۲ ارائهٔ درس‌نامه‌های عالی، کامل و روان، اما مختصر و مفید
۳ پاسخ‌های تشریحی با رویکرد آموزشی
۴ طراحی سؤالات به سبک امتحانات نهایی
۵ ارائهٔ چند دوره امتحان نهایی و شبه‌نهایی به همراه پاسخ و بارم‌بندی نمونهٔ نهایی برای آماده‌سازی بهتر شما
۶ ارائهٔ بارم‌بندی نوبت اول و نهایی برای هر فصل

تشکر و قدردانی می‌کنم از:

۱ آقایان دکتر ابوذر نصری و دکتر کمیل نصری
۲ جناب آقای احمد علی‌نژاد مدیر تألیف کاربلد و خوش‌فکر
۳ تیم خوب و کاربلد تولید خیلی‌سبز
۴ ویراستاران عزیز خانم‌ها مریم بیوک‌زاده، سمیه خادمان، مرضیه رضایت، مریم نظری

خدای روزهای خوب، خدای روزهای سخت هم هست. به حکمتش دل بسپار ...

با احترام

ابوالقاسم شعبانی

فهرست مطالب

	سؤال	درسنامه + پاسخ
فصل اول: هندسهٔ تحلیلی و جبر		
درس ۱ـ قسمت اول: یادآوری و تکمیل معادلهٔ خط	۵	۴۹
درس ۱ـ قسمت دوم: هندسهٔ تحلیلی	۶	۵۱
درس ۲ـ قسمت اول: معادلهٔ درجه‌دوم	۷	۵۵
درس ۲ـ قسمت دوم: تابع درجه‌دوم	۸	۵۸
درس ۳ـ قسمت اول: معادلات گویا	۱۰	۶۲
درس ۳ـ قسمت دوم: معادلات رادیکالی	۱۱	۶۵
فصل دوم: هندسه		
درس ۱: ترسیم‌های هندسی	۱۲	۶۷
درس ۲ـ قسمت اول: استدلال و قضیهٔ تالس	۱۳	۷۱
درس ۲ـ قسمت دوم: عکس قضیهٔ تالس	۱۶	۷۴
درس ۳ـ قسمت اول: تشابه مثلث‌ها	۱۷	۷۷
درس ۳ـ قسمت دوم: روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه	۱۹	۷۹
فصل سوم: تابع		
درس ۱ـ قسمت اول: تابع گویا و تساوی دو تابع	۲۰	۸۱
درس ۱ـ قسمت دوم: توابع رادیکالی و جزءصحیح	۲۲	۸۴
درس ۲: وارون یک تابع و تابع یک به یک	۲۳	۸۸
درس ۳: اعمال جبری روی توابع	۲۵	۹۲
فصل چهارم: مثلثات		
درس ۱: واحدهای اندازه‌گیری زاویه	۲۸	۹۸
درس ۲: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی	۲۹	۱۰۱
درس ۳: توابع مثلثاتی	۳۱	۱۰۶
فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی		
درس ۱: تابع نمایی و ویژگی‌های آن	۳۳	۱۰۹
درس ۲ـ قسمت اول: تابع لگاریتمی	۳۴	۱۱۲
درس ۲ـ قسمت دوم: ویژگی‌های لگاریتم و معادلات لگاریتمی	۳۵	۱۱۴
درس ۳: نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی	۳۶	۱۱۸
فصل ششم: حد و پیوستگی		
درس ۱: فرایندهای حدی	۳۸	۱۲۱
درس ۲ـ قسمت اول: قضایا و محاسبهٔ حد توابع	۳۹	۱۲۴
درس ۲ـ قسمت دوم: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ و حد چند تابع خاص	۴۰	۱۲۶
درس ۳: پیوستگی	۴۲	۱۳۰
فصل هفتم: آمار و احتمال		
درس ۱: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل	۴۴	۱۳۴
درس ۲ـ قسمت اول: معیارهای گرایش به مرکز	۴۶	۱۳۸
درس ۲ـ قسمت دوم: معیارهای پراکندگی	۴۶	۱۴۰
ضمیمه: امتحانات شبیه‌ساز نهایی		
امتحان نوبت اول (میان سال) دی ماه	۱۴۵	۱۵۳
امتحان نوبت اول (میان سال) دی ماه	۱۴۶	۱۵۴
امتحان نوبت دوم (پایان سال) خردادماه	۱۴۷	۱۵۵
امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۲ (نوبت صبح)	۱۴۸	۱۵۷
امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۲ (نوبت عصر)	۱۵۰	۱۵۸
امتحان نهایی خردادماه	۱۵۱	۱۵۹

فصل ۱ هندسهٔ تحلیلی و جبر

این فصل توی کتاب درسی سه‌تا درس داره که واسه این‌که بهتر بتونی اونو بخونی، هر درس‌رو به دو قسمت تقسیم کردم. مباحث این فصل که اونو به ۶ قسمت تقسیم کردم، اینان:

۱) یادآوری و تکمیل معادلهٔ خط — ۲) هندسهٔ تحلیلی — ۳) معادلهٔ درجه‌دوم

۴) تابع درجه‌دوم — ۵) معادلات گویا — ۶) معادلات رادیکالی

بارم‌بندی این فصل توی امتحانای داخلی و نهایی:

دی (نوبت اول)	خرداد (نهایی)	شهریور و دی (نهایی)
۶ نمره	۲ نمره	۲/۵ نمره

درس ۱ — قسمت اول: یادآوری و تکمیل معادلهٔ خط

صفحهٔ ۲ تا ۴ کتاب درسی

درس‌نامهٔ ۱ ـ قسمت اول را در صفحهٔ ۴۹ ببینید.

■ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۱- دو خط $y=2x+5$ و $4x-2y=6$ با یکدیگر موازی هستند.

۲- معادلهٔ محور xها به صورت $x=0$ است.

۳- خط $x=2$ بر خط $y=1$ عمود است.

۴- اگر خط $2y+mx-1=0$ بر خط $x=3y-5$ عمود باشد، مقدار m برابر ۶ است.

۵- شیب خطی که از نقاط $A(2,3)$ و $B(-2,5)$ می‌گذرد برابر -2 است.

■ جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

۶- اگر دو خط $y=(m-3)x+5$ و $x+3y=1$ بر هم عمود باشند، مقدار m برابر .... است.

۷- دو خط $3x+y=1$ و $x+3y=1$ نسبت به هم .... هستند.

۸- معادلهٔ خطی که از مبدأ می‌گذرد و شیب آن -2 باشد، به صورت .... است.

۹- شیب خطی که از نقاط $A(-1,4)$ و $B(2,-5)$ می‌گذرد برابر .... است.

۱۰- معادلهٔ هر خط موازی محور xها به شکل .... است.

■ نمودار خطوط زیر را رسم کنید.

۱۱- $y=2x+3$

۱۲- $x+2y=1$

۱۳- $x=-1$

۱۴- $y=2$

۱۵- معادلهٔ خط گذرا از نقاط $A(-3,4)$ و $B(-1,-4)$ را بنویسید.

۱۶- معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $A(2,-1)$ می‌گذرد و بر خط $3x+2y=5$ عمود است.

■ در هر قسمت شیب دو خط داده‌شده را به دست آورید و مشخص کنید که دو خط نسبت به هم چه وضعی دارند؟ (موازی، عمود یا متقاطع غیرعمود)

(مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

۱۷- $L: y=5x-3$ و $T: y=-\frac{1}{5}x+7$

۱۸- $L: x-2y=5$ و $T: y=\frac{1}{2}x-3$

۱۹- $L: x=3y+2$ و $T: y=3x-4$

۲۰- $L: 2x-3y+5=0$ و $T: 3x+2y=6$

۲۱- $L: x=2$ و $T: y=-3$

۲۲- خط L به معادلهٔ $2y-3x=10$ و خط T به معادلهٔ $y=mx+6$ را در نظر بگیرید.

الف) m را طوری بیابید که خط T با خط L موازی باشد.
ب) به ازای چه مقداری از m، دو خط بر هم عمودند؟ (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

۲۳- به ازای چه مقادیری از k، دو خط $y=(k^2-3)x+5$ و $y-6x+7=0$ با هم موازی‌اند؟

۲۴- مقدار m را طوری بیابید که خط به معادلهٔ $(m+1)y=x+2$ بر خط $y=(2m+1)x+1$ عمود باشد.

۲۵- معادلهٔ ارتفاع وارد بر ضلع BC را در مثلثی با رئوس $A(2,1)$، $B(4,-2)$ و $C(-1,8)$ بنویسید.

۲۶- مربع ABCD در ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات واقع است، به طوری که $A(5,1)$ و $B(10,4)$ دو رأس مجاور آن هستند.

الف) شیب ضلع AB را به دست آورید.
ب) شیب ضلع AD را حساب کنید و معادلهٔ این ضلع را بنویسید.
پ) اگر بدانیم نقطهٔ $C(7,9)$ رأس سوم مربع است، مختصات رأس D را بیابید. (کار در کلاس کتاب درسی)

درس ۱ قسمت دوم: هندسهٔ تحلیلی

صفحهٔ ۴ تا ۱۰ کتاب درسی

• درس‌نامهٔ ۱ ـ قسمت دوم را در صفحهٔ ۵۱ ببینید.

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۲۷- فاصلهٔ نقطهٔ $A(2,-1)$ از مبدأ مختصات برابر ۵ است.

۲۸- نقطهٔ $M(1,2)$ وسط پاره‌خط با رئوس $A(4,6)$ و $B(-2,-2)$ است.

۲۹- نقاط $A(1,2)$، $B(-2,4)$، $C(6,-5)$ و $D(9,-1)$، رئوس متوازی‌الاضلاع ABCD با قطر AC هستند.

۳۰- قرینهٔ نقطهٔ $P(\alpha,\beta)$ نسبت به مبدأ مختصات، نقطهٔ $P'(-\alpha,-\beta)$ می‌باشد.

۳۱- فاصلهٔ نقطهٔ $A(-2,6)$ از خط $x=5$ برابر ۳ است.

۳۲- فاصلهٔ دو خط $3x-4y-1=0$ و $3x-4y+4=0$ برابر یک است.

جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

۳۳- فاصلهٔ نقاط $A(2,-1)$ و $B(-1,3)$ برابر .... است.

۳۴- قرینهٔ نقطهٔ $A(2,-1)$ نسبت به نقطهٔ $M(-1,4)$، نقطهٔ .... است.

۳۵- اگر $A(5,1)$، $B(10,4)$ و $C(7,9)$ سه رأس مربع ABCD با قطر AC باشند، مختصات رأس چهارم به صورت .... است.

۳۶- مساحت دایره‌ای به مرکز $O(1,-2)$ و مماس بر خط $5x-12y-3=0$ برابر .... است.

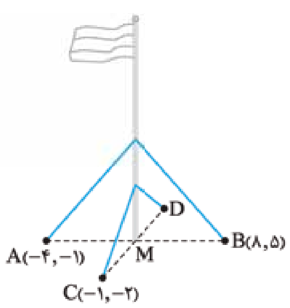
۳۷- نقاط $A(2,0)$، $B(5,4)$ و $C(-2,3)$ سه رأس مثلث ABC هستند. نوع مثلث را تعیین کرده و محیط آن را بیابید. (کار در کلاس کتاب درسی)

۳۸- مساحت مثلثی با رئوس $A(2,5)$، $B(3,0)$ و $C(0,2)$ را به دست آورید.

۳۹- نقطهٔ $M(2,-3)$ وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ $A(5,1)$ و B است. مختصات نقطهٔ B را بیابید. (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

۴۰- دو نقطهٔ $A(4,5)$ و $B(-2,11)$ را در نظر بگیرید. فاصلهٔ مبدأ مختصات را از وسط پاره‌خط AB به دست آورید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۴۱- یک میلهٔ پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است، به طوری که فاصلهٔ هر یک از چهار نقطه تا پای میله برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ مقابل آن تا پای میله. مختصات نقطهٔ D را به دست آورید.
(مشابه تمرین کتاب درسی)



۴۲- معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB که در آن $A(4,-1)$ و $B(-2,5)$ است را به دست آورید.

۴۳- قرینهٔ نقطهٔ $A(2,-1)$ را نسبت به نقطهٔ $M(3,4)$ به دست آورید.

۴۴- نقاط $A(2,-3)$، $B(-1,4)$ و $C(5,7)$ سه رأس مستطیل ABCD هستند. مختصات رأس D را بیابید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۴۵- اگر نقاط $A(2m+1,5)$، $B(2n,n-3)$، $C(2-m,4)$ و $D(-1,m+1)$ رئوس متوازی‌الاضلاع ABCD و AC یکی از قطرهای آن باشد، m و n را به دست آورید.

۴۶- نقطهٔ $A(7,6)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $2y-3x=11$ و $3y+4x=8$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن را به دست آورید.

۴۷- مثلث ABC با رئوس $A(1,9)$، $B(3,1)$ و $C(7,11)$ را در نظر بگیرید.

الف) طول میانهٔ AM را محاسبه کنید.
ب) معادلهٔ خطی که میانهٔ AM روی آن قرار دارد را به دست آورید. (کار در کلاس کتاب درسی)

۴۸- نقطهٔ M روی محور طول‌ها، از دو نقطهٔ $A(-1,2)$ و $B(2,-2)$ به یک فاصله است. مختصات نقطهٔ M را تعیین کنید.

۴۹- نقاطی روی خط $y=x$ به گونه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ $A(2,-1)$ برابر ۳ واحد باشد.

۵۰- نقاط $A(-۳,۲)$ و $B(۵,۸)$ دو سر یکی از قطرهای دایره‌ای می‌باشند.

الف) مختصات مرکز دایره و اندازهٔ شعاع آن دایره را به دست آورید. ب) آیا نقطهٔ $C(۴,۱)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۵۱- فاصلهٔ نقطهٔ $P(۲,۳)$ را از هر یک از خطهای زیر به دست آورید.

الف) $۲x + y = ۲$ ب) $x = -۳$ پ) $y = ۵$

۵۲- خط $L: ۳x - ۴y + ۵ = ۰$ بر دایره‌ای به مرکز $O(۲,-۱)$ مماس است. شعاع دایره را به دست آورید. (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

۵۳- یکی از اضلاع مربعی بر خط $L: y = ۳x + ۱$ واقع است. اگر $A(۲,-۳)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۵۴- فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط $۳x = my + ۱۰$ برابر ۲ واحد است. m را بیابید.

۵۵- معادلهٔ قطر مربعی به صورت $۵x - ۱۲y - ۴ = ۰$ است. اگر $A(۱,-۱)$ یک رأس آن باشد، مساحت مربع را به دست آورید.

۵۶- نقاط $A(۵,۳)$، $B(-۱,۲)$ و $C(۱,-۴)$ سه رأس مثلث ABC هستند. طول ارتفاع AH را به دست آورید.

۵۷- دو نقطه روی خط به معادلهٔ $y = x - ۱$ به گونه‌ای قرار دارند که فاصلهٔ این نقاط از خط به معادلهٔ $۲x - ۳y = ۵$ برابر $\sqrt{۱۳}$ است. مختصات این دو نقطه را به دست آورید.

۵۸- دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط $۲y + x = ۶$ و $۲x - y = ۷$ و یک رأس آن نقطهٔ $A(۸,۵)$ است. مساحت این مستطیل را به دست آورید.

۵۹- نشان دهید دو خط با معادلات $-۵x + ۱۲y + ۲۰ = ۰$ و $۱۰x - ۲۴y + ۱۲ = ۰$ موازی یکدیگرند و سپس فاصلهٔ این دو خط را محاسبه کنید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۶۰- فاصلهٔ دو خط $۳x - ۲y + m = ۰$ و $۶x - ۴y + ۲ = ۰$ برابر $\sqrt{۱۳}$ است. مقادیر m را به دست آورید.

۶۱- دو ضلع مربعی بر دو خط به معادلات $۶x - ۲y = ۴$ و $۳x = y - ۸$ منطبق‌اند. مساحت مربع را حساب کنید.

درس ۲ قسمت اول: معادلهٔ درجه‌دوم

صفحهٔ ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی

درس‌نامهٔ ۲ ـ قسمت اول را در صفحهٔ ۵۵ ببینید.

■ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۶۲- برای حل معادلهٔ $۳x^۴ - ۵x^۲ + ۲ = ۰$ کافی است قرار دهیم $x^۲ = t$ تا به معادلهٔ درجه‌دوم تبدیل شود و سپس آن را حل کنیم.

۶۳- اگر معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ دارای دو ریشهٔ متمایز باشد، آن‌گاه مجموع ریشه‌های آن برابر $-\frac{b}{۲a}$ است.

۶۴- معادلهٔ درجه‌دومی که مجموع ریشه‌های آن برابر ۵ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۳- باشد، به صورت $x^۲ - ۵x - ۳ = ۰$ می‌باشد.

۶۵- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۵x + ۱ = ۰$ باشند، آن‌گاه $\alpha^۲\beta + \beta^۲\alpha = ۵$.

■ جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

۶۶- در معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ اگر a و c مختلف‌العلامه باشد، آن‌گاه معادله دارای .... ریشهٔ حقیقی است.

۶۷- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ - ۸x + ۵ = ۰$ برابر .... است.

۶۸- معادلهٔ درجه‌دومی که مجموع ریشه‌های آن S و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن P باشد، به صورت .... است.

۶۹- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$ باشد، حاصل $\alpha^۲ + \beta^۲$ برابر .... است.

۷۰- معادلهٔ درجه‌دومی که ریشه‌های آن $\sqrt{۵} - ۱$ و $\sqrt{۵} + ۱$ باشد، عبارت است از ....

■ معادلات زیر را حل کنید.

۷۱- $x^۴ - ۱۰x^۲ + ۹ = ۰$ ۷۲- $۲x^۴ - ۷x^۲ - ۴ = ۰$

۷۳- $x^۴ + ۳x^۲ + ۲ = ۰$ ۷۴- $x^۴ - ۸x^۲ + ۸ = ۰$

۷۵- $۴x^۶ + ۱ = ۵x^۳$ ۷۶- $x - ۷\sqrt{x} + ۶ = ۰$

۷۷- $(x+۲)^۴ + (x+۲)^۲ - ۲ = ۰$ ۷۸- $(x^۲ + x)^۲ - ۱۸(x^۲ + x) + ۷۲ = ۰$

■ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلات زیر را بدون حل آن‌ها به دست آورید.

۷۹- $۳x^۲ - ۷x - ۱ = ۰$ ۸۰- $۲x^۲ - (\sqrt{۳} + ۱)x + ۲ - \sqrt{۵} = ۰$

۸۱- اگر مجموع ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $mx^۲ - (m+۲)x + ۱ - ۵m = ۰$ برابر ۲ باشد، حاصل‌ضرب ریشه‌ها را به دست آورید.

۸۲- اگر مجموع ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $۲x^۲ - mx + m - ۲ = ۰$، دو برابر عکس حاصل‌ضرب ریشه‌های آن باشد، m را بیابید.

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۳x+۱=۰$ باشند، بدون حل معادله، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

۸۳- $\alpha\beta^۲+\beta\alpha^۲$ ۸۴- $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ ۸۵- $\alpha^۳+\beta^۳$

۸۶- $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ ۸۷- $\alpha^۲+۳\beta$

۸۸- اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۸x+m-۱=۰$ از ریشهٔ دیگر آن سه واحد بزرگ‌تر باشد، m و هر دو ریشه را به دست آورید.

۸۹- m را طوری بیابید که مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^۲-(m+۳)x+۵=۰$ برابر ۶ باشد.

در هر یک از موارد زیر، معادلهٔ درجه‌دومی بنویسید که ریشه‌های آن، اعداد داده‌شده باشد.

۹۰- $-۳,۲$ ۹۱- $۱+\sqrt{۲},۱-\sqrt{۲}$ ۹۲- $\frac{۵+\sqrt{۳}}{۲},\frac{۵-\sqrt{۳}}{۲}$

۹۳- دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آن‌ها -۱ و حاصل‌ضرب آن‌ها نیز -۱ باشد.

۹۴- محیط مستطیلی $۱۱\,cm$ و مساحت آن $۶\,cm^۲$ است. طول و عرض آن را مشخص کنید.

۹۵- معادلهٔ درجه‌دومی بنویسید که ریشه‌های آن یک واحد از ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲+۷x+۱=۰$ بزرگ‌تر باشد.

۹۶- معادلهٔ درجه‌دومی بنویسید که ریشه‌های آن مکعب ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-x-۲=۰$ باشد.

درس ۲ قسمت دوم: تابع درجه‌دوم

صفحهٔ ۱۴ تا ۱۸ کتاب درسی

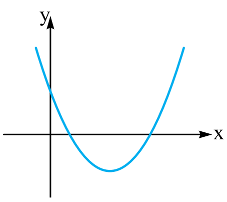
درس‌نامهٔ ۲ ـ قسمت دوم را در صفحهٔ ۵۸ ببینید.

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۹۷- مقدار مینیمم سهمی $f(x)=x^۲-۴x+۱$ برابر ۲ است.

۹۸- اگر $f(x)=۲x^۲+۵x+۱$، آن‌گاه معادلهٔ $f(x)=۰$ دارای دو ریشهٔ منفی است.

۹۹- در شکل مقابل، داریم $a>۰$، $b>۰$ و $c>۰$.



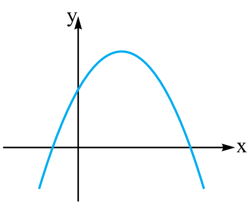
جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

۱۰۰- سهمی $f(x)=-۲x^۲-۴x+۹$ دارای .... به طول .... است و مقدار آن برابر .... است.

۱۰۱- در سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$، عدد c نشان‌دهندهٔ .... است.

۱۰۲- صفرهای تابع f در واقع ریشه‌های معادلهٔ .... است.

۱۰۳- در سهمی مقابل، علامت a ....، علامت b .... و علامت c .... است.



تعیین کنید کدام‌یک از سهمی‌های زیر ماکزیمم و کدام‌یک مینیمم دارند، سپس مقدار ماکزیمم یا مینیمم هر یک را مشخص کنید.

۱۰۴- $f(x)=x^۲-۴x+۱۰$ ۱۰۵- $f(x)=-(x+۲)^۲+۴$

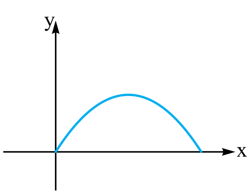
۱۰۶- $f(x)=(x+۱)(۴-۲x)+۱$ ۱۰۷- $f(x)=(۲x+۱)^۲-(x-۱)^۲$

۱۰۸- اگر مقدار ماکزیمم سهمی به معادلهٔ $y=mx^۲+۴x+m+۳$ برابر ۳ باشد، m را تعیین کنید.

۱۰۹- فوتبالیستی توپی را با زاویهٔ ۴۵° نسبت به سطح زمین و با سرعت اولیهٔ $۲۰\,m/s$ شوت می‌کند. معادلهٔ مسیر حرکت توپ، یک تابع درجه‌دوم با ضابطهٔ $y=-\frac{۱}{۴۰}x^۲+x$ است که نمودار آن مانند شکل مقابل می‌باشد. در این رابطه، x مسافت طی‌شدهٔ افقی و y ارتفاع توپ از سطح زمین است.

الف) حداکثر ارتفاع توپ را به دست آورید.

ب) مسافت افقی طی‌شده توسط توپ در هوا چه‌قدر است؟



(مثال کتاب درسی)

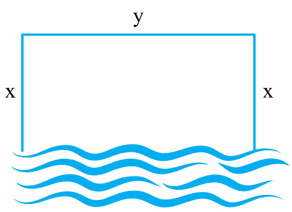
۱۱۰- موشکی که به طور عمودی رو به بالا شلیک شده و t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع hمتری سطح زمین قرار می‌گیرد، معادلهٔ حرکت آن به صورت $h(t)=۱۰۰t-۵t^{۲}\,(t\geq ۰)$ است.

الف) چه‌قدر طول می‌کشد تا موشک به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟ ب) ارتفاع نقطهٔ اوج را بیابید.

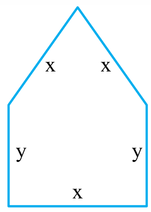
ب) چند ثانیه پس از پرتاب، موشک به زمین برمی‌گردد؟ (تمرین کتاب درسی)

۱۱۱- اگر $۲x+y=۱۲$ باشد، x و y را طوری بیابید که حاصل‌ضرب آن‌ها حداکثر مقدار ممکن باشد.

۱۱۲- قرار است در کنار رودخانه‌ای، محوطه‌ای مستطیل‌شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلعِ محوطه نرده‌کشی شود. اگر تنها هزینهٔ نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدارِ ممکن گردد. (کار در کلاس کتاب درسی)



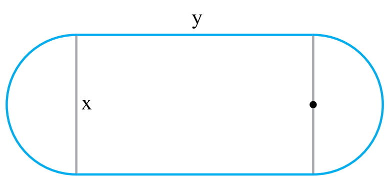
۱۱۳- یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره $۴\,m$ باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد. (مثال کتاب درسی)



۱۱۴- استادیومی به شکل مقابل در حال ساخت است که در آن $x\geq ۰$ و $y\geq ۰$ و نیم‌دایره‌ها به شعاع $\frac{x}{۲}$ هستند. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، x و y را طوری بیابید که: (تمرین کتاب درسی)

الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن گردد.



■ در هر یک از سهمی‌های زیر، بدون حل معادلهٔ $f(x)=۰$، در مورد وجود و علامت ریشه‌های آن بحث کنید. (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

۱۱۵- $f(x)=x^{۲}+۶x+۷$

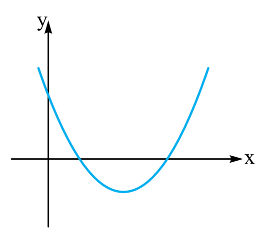
۱۱۶- $f(x)=۵x^{۲}+۷x-۱$

۱۱۷- $f(x)=-۳x^{۲}+x+۶$

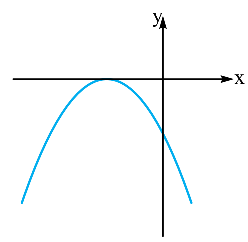
۱۱۸- $f(x)=۴x^{۲}+x+۳$

■ معادلهٔ هر یک از سهمی‌های زیر به صورت $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ است. در هر مورد، علامت ضرایب a، b و c را مشخص نموده و تعیین کنید $f(x)=۰$ چند ریشه دارد؟ (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

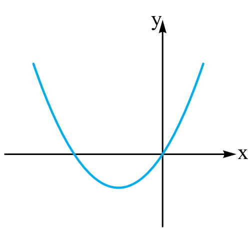
۱۱۹-



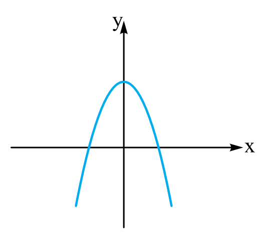
۱۲۰-



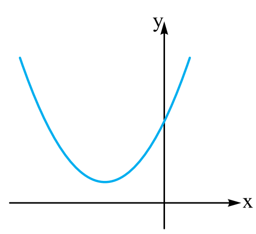
۱۲۱-



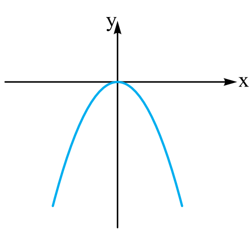
۱۲۲-



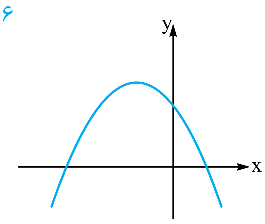
۱۲۳-



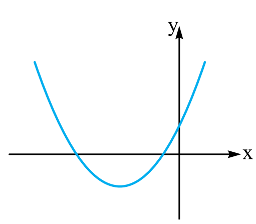
۱۲۴-



۱۲۵-



۱۲۶-



۹۶۳- واریانس، پراکندگی حول میانگین را بیشتر از حد انتظار نشان می‌دهد، زیرا در محاسبهٔ واریانس از میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین، استفاده می‌شود.

■ جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

۹۶۴- برای هر مجموعه‌ای از داده‌ها، مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر .... است.

۹۶۵- واحد واریانس برابر با .... واحد داده‌های مورد نظر است.

۹۶۶- اگر هر یک از داده‌ها در مقدار ثابتی ضرب شود، واریانس آن‌ها در .... ضرب می‌شود.

۹۶۷- نسبت انحراف معیار به میانگین .... نام دارد.

۹۶۸- در داده‌های مرتب‌شده از کوچک به بزرگ، میانهٔ داده‌های قبل از میانهٔ اصلی .... و میانهٔ داده‌های بعد از میانهٔ اصلی .... نام دارد.

۹۶۹- میانهٔ داده‌ها، همان .... است.

۹۷۰- دامنهٔ تغییرات داده‌های ۱۵,۶,۱۰,۴,۱۸,۲۰ را به دست آورید.

۹۷۱- اگر دامنهٔ تغییرات داده‌های $۵,۱۲,m,۱۶,۲۵,۱۵$ برابر ۳۰ باشد، m را بیابید.

■ در هر مورد واریانس داده‌های ارائه‌شده را به دست آورید.

۹۷۲- ۰,۵,۳,۱,۱,۲ ۹۷۳- $۲۰,-۷,-۱۵,۳۱,۱۶$

۹۷۴- اختلاف تعدادی داده از میانگین آن‌ها عبارت‌اند از $۶, a, ۲, -۱, -۳, a$، واریانس داده‌ها را محاسبه کنید.

۹۷۵- هشت دادهٔ آماری با میانگین ۱۲ و واریانس ۵ در اختیار داریم. اگر دو دادهٔ ۸ و ۱۶ به آن‌ها اضافه شود، واریانس ۱۰ دادهٔ آماری حاصل را حساب کنید.

■ هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

۹۷۶- اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، واریانس آن‌ها تغییر نمی‌کند، به عبارت دیگر: $\sigma^۲_{x+b}=\sigma^۲_x$

۹۷۷- اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، واریانس آن‌ها در مجذور همان مقدار ثابت ضرب می‌شود، به عبارت دیگر: $\sigma^۲_{ax}=a^۲.\sigma^۲_x$

۹۷۸- هوای اهواز در هر ساعت از یک روز بهاری گزارش شده است. اگر میانگین دمای هوا ۲۸ درجهٔ سانتی‌گراد و واریانس دمای هوا ۶ درجهٔ سانتی‌گراد به توان ۲ باشد، میانگین و واریانس دمای هوا را برحسب فارنهایت بنویسید. **(کار در کلاس کتاب درسی)**

۹۷۹- فرض کنید واریانس قیمت‌های مواد غذایی برابر ۲۰ باشد. اگر قیمت مواد غذایی در یک سال، ۳۰ درصد افزایش یابد، واریانس قیمت‌های مواد غذایی بعد از یک سال را حساب کنید.

■ در هر مورد انحراف معیار داده‌های ارائه‌شده را به دست آورید.

۹۸۰- ۱۵,۲۰,۲۵,۳۰,۳۵ ۹۸۱- ۲,۴,۳,۱,۶,۸

■ درهر مورد ضریب تغییرات داده‌ها را حساب کنید.

۹۸۲- ۸,۱۲,۶,۱۴ ۹۸۳- ۱۵,۱۱,۱۷,۱۳,۱۹

۹۸۴- توضیح دهید ضریب تغییرات سن دانش‌آموزان یک کلاس ۵ سال دیگر چه تغییری می‌کند.

۹۸۵- حسین و حمید دو کارمند شرکت A هستند که وظایف یکسانی دارند، اما حقوق دریافتی آن‌ها ماهانه به ترتیب ۸ و ۱۲ میلیون تومان است. ماهان و رضا نیز دو کارمند شرکت B هستند که با وظایف یکسانی حقوق‌هایی به ترتیب ۱۳ و ۱۸ میلیون تومان به صورت ماهانه دریافت می‌کنند. در کدام شرکت بی‌عدالتی بیشتری در پرداخت حقوق به این افراد مشاهده می‌شود؟ چرا؟ **(مشابه تمرین کتاب درسی)**

۹۸۶- جدول زیر، پول توجیبی (ده هزار تومان) هفتگی ۵ دوست نزدیک مینا و مریم را نشان می‌دهد.

مینا	۷	۹	۸	۹	۷
مریم	۱۰	۸	۶	۷	۹

الف) میانگین و میانهٔ پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا به دست آورید.

ب) انحراف معیار پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا به دست آورید.

پ) برنامه‌ریزی برای یک سفر یک‌روزه با دوستان، برای مریم ساده‌تر است یا مینا؟ چرا؟ **(مشابه تمرین کتاب درسی)**

۹۸۷- در یک کارگاه، دو گروه مشغول کار هستند. میانگین نمرات مسئولیت‌پذیری و واریانس در گروه اول به ترتیب ۸۰ و ۲۵ و در گروه دوم به ترتیب ۷۲ و ۱۶ می‌باشد. مشخص کنید عملکرد کدام گروه بهتر است؟ چرا؟

۹۸۸- داده‌های $x_i=۱,۲,۳,۴,۵$ مفروض است. ضریب تغییرات داده‌های $u_i=۱۲x_i+۶$ را حساب کنید.

۹۸۹- اگر واریانس داده‌های $۵-c, ۲-b, ۱-a, ۲a, ۳$ برابر صفر باشد، ضریب تغییرات داده‌های a، b و c را به دست آورید.

■ در هر مورد از داده‌های زیر، چارک‌ها را به دست آورید.

۹۹۰- ۲۵,۱۷,۱۹,۳,۱۶,۲۳,۹,۲۷,۱۵,۶,۱۱ ۹۹۱- ۱۳,۵,۹,۱۸,۹,۱۴,۶,۸,۱۵

۹۹۲- ۱۰,۱۵,۱۷,۱۴,۱۱,۸,۱۶,۱۹,۱۳,۱۴,۷,۱۸

۹۹۳- واریانس داده‌های بزرگ‌تر از چارک اول و کوچک‌تر از چارک سوم در داده‌های مقابل را به دست آورید. ۱۸,۱۶,۱۴,۱۱,۱۷,۱۱,۱۷,۱۲,۲۰,۱۴,۱۹,۱۸

فصل ۱ درس ۱

قسمت اول: یادآوری و تکمیل معادلهٔ خط

صفحه ۲ تا ۴ کتاب درسی

سخن دبیر

توی این قسمت مطالبی که در مورد معادلهٔ خط خونده بودید، دوره و تکمیل می‌شه، مثل رسم نمودار خط، انواع معادلهٔ خط، خط‌های خاص و شرط عمود و موازی بودن دو خط. این قسمت مقدمه‌ای واسهٔ قسمت بعدیه که مطالب مهم‌تری رو درباره.

معادلهٔ خط

برای نوشتن معادلهٔ خط، به یک نقطه و شیب نیاز داریم. خطی که از نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ بگذرد و شیب آن m باشد، عبارت است از:

$$\boxed{y-y_۰=m(x-x_۰)}$$

مثال معادلهٔ خطی بنویسید که از نقطهٔ $A(۲,-۳)$ بگذرد و شیب آن ۴ باشد.

✓ **پاسخ:** $y-(-۳)=۴(x-۲) \Rightarrow y+۳=۴x-۸$
$\Rightarrow y=۴x-۱۱$

معادلهٔ خط گذرا از دو نقطهٔ معلوم

اگر خط L از دو نقطهٔ غیرهم‌طول A و B عبور کند، آن‌گاه شیب آن برابر است با:

$$\boxed{\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}}$$

حال با در نظر گرفتن شیب به‌دست‌آمده و یکی از نقاط A و B می‌توان معادلهٔ آن را نوشت.

مثال معادلهٔ خطی بنویسید که از نقاط $A(۲,۳)$ و $B(۴,-۳)$ می‌گذرد.

✓ **پاسخ:** $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-۳-۳}{۴-۲}=\frac{-۶}{۲}=-۳$

معادلهٔ خط: $y-۳=-۳(x-۲) \Rightarrow y-۳=-۳x+۶$
$\Rightarrow y=-۳x+۹$

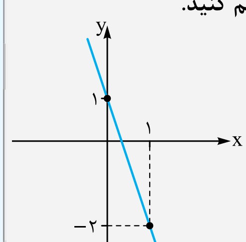
رسم نمودار خط

اگر معادلهٔ خط را داشته باشیم، با مشخص‌کردن دو نقطه از خط، نمودار آن را می‌توان رسم کرد.

مثال خط به معادلهٔ $y=-۳x+۱$ را رسم کنید.

✓ **پاسخ:** دو نقطهٔ دلخواه از خط را به دست آورده و در دستگاه مختصات آن‌ها را به هم وصل کرده و از دو طرف امتداد می‌دهیم:

x	۰	۱
y	۱	-۲



انواع معادلهٔ خط

- معمولاً معادلهٔ خط به یکی از دو صورت $y=mx+h$ یا $ax+by+c=۰$ نوشته می‌شود.
- در خط به معادلهٔ $y=mx+h$، m شیب خط و h عرض از مبدأ است.
- در خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$، $m=-\frac{a}{b}$ شیب خط و $h=-\frac{c}{b}$ عرض از مبدأ خط می‌باشد.

مثال شیب و عرض از مبدأ خطوط $y=۵x+۱$ و $۲x-۳y+۱=۰$ را به دست آورید.

✓ **پاسخ:** شیب و عرض از مبدأ خط $y=۵x+۱$ به ترتیب $m=۵$ و $h=۱$ می‌باشد.

شیب و عرض از مبدأ خط $۲x-۳y+۱=۰$ به ترتیب $m=\frac{۲}{۳}$ و $h=\frac{۱}{۳}$ می‌باشد.

خطوط خاص

- خط به معادلهٔ $x=۰$، معادلهٔ محور yها و در حالت کلی خط به معادلهٔ $x=a$، خطی موازی محور yها است. شیب این خطوط تعریف نشده است.
- خط به معادلهٔ $y=۰$، معادلهٔ محور xها و در حالت کلی خط به معادلهٔ $y=b$، خطی موازی محور xها است. شیب این خطوط برابر صفر است.
- خطوط $y=x$ و $y=-x$، به ترتیب معادلهٔ نیمساز ربع اول و سوم و معادلهٔ نیمساز ربع دوم و چهارم هستند، شیب آن‌ها به ترتیب ۱ و ۱− است.

شرط موازی‌بودن، عمودبودن و متقاطع بودن دو خط

دو خط با شیب‌های $m_۱$ و $m_۲$ را در نظر بگیرید:

الف) شرط آن‌که دو خط با هم موازی باشند، آن است که $m_۱=m_۲$.

ب) شرط آن‌که دو خط بر هم عمود باشند، آن است که $m_۱m_۲=-۱$.

پ) شرط آن که دو خط متقاطع، غیرعمود باشند، آن است که $m_۱\neq m_۲$ و نیز $m_۱m_۲\neq -۱$.

مثال در هر یک از موارد زیر، وضعیت دو خط L و T را نسبت به هم مشخص کنید.

الف) $L:y=۳x-۱$ و $T:y=-\frac{۱}{۳}x+۷$

ب) $L:y=۲x+۵$ و $T:۲x-y-۳=۰$

پ) $L:y=۴x+۱$ و $T:x=۴y-۱$

✓ **پاسخ:** الف) چون شیب خط L برابر $m_۱=۳$ و شیب خط T برابر $m_۲=-\frac{۱}{۳}$ و $m_۱m_۲=-۱$؛ پس این دو خط بر هم عمودند.

ب) شیب خط L برابر $m_۱=۲$ و شیب خط T نیز برابر $m_۲=۲$ است. چون $m_۱=m_۲$، پس این دو خط با هم موازی‌اند.

پ) شیب خط L برابر $m_۱=۴$ و شیب خط T نیز برابر $m_۲=\frac{۱}{۴}$ است؛ پس این دو خط متقاطع غیرعمودند.

پاسخ سؤالات

۱. درست؛ زیرا شیب هر دو خط با هم برابر و مساوی ۲ است.

۲. نادرست؛ معادلهٔ محور xها به صورت $y=۰$ می‌باشد.

۳. درست؛ خط $x=۲$ موازی محور yها و خط $y=۱$ موازی محور xها است و لذا بر هم عمودند.

۴. درست؛ زیرا شیب خط $۲y+mx-۱=۰$ برابر $-\frac{m}{۲}$ و شیب خط $x=۳y-۵$ برابر $\frac{۱}{۳}$ بوده و لذا داریم:

$-\frac{m}{۲}=-۳ \Rightarrow m=۶$

۵. نادرست؛ زیرا: $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۵-۳}{-۲-۲}=\frac{۲}{-۴}=-\frac{۱}{۲}$

۶. زیرا: $m_۱ = m-۳ \,,\, m_۲ = -\frac{۱}{۳}$

دو خط بر هم عمودند $\Rightarrow m_۱m_۲ = -۱ \Rightarrow (m-۳)\times(-\frac{۱}{۳}) = -۱$

$\Rightarrow m-۳ = ۳ \Rightarrow m = ۶$

۷. متقاطع غیرعمود؛ زیرا: $۳x+y=۱ \Rightarrow y=-۳x+۱ \Rightarrow m_۱=-۳$

$x+۳y=۱ \Rightarrow ۳y=-x+۱ \Rightarrow y=-\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۳} \Rightarrow m_۲=-\frac{۱}{۳}$

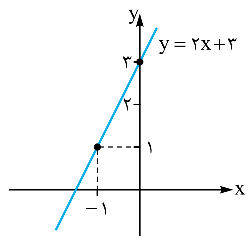
چون $m_۱ \neq m_۲$ و $m_۱m_۲ \neq -۱$، پس دو خط متقاطع و غیرعمود هستند.

۸. $y=-۲x$

۹. $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-۵-۴}{۲-(-۱)} = -۳$

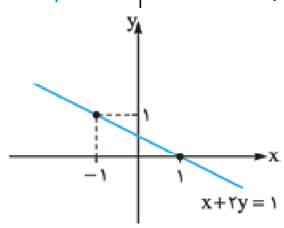
۱۰. $y=b$

۱۱.



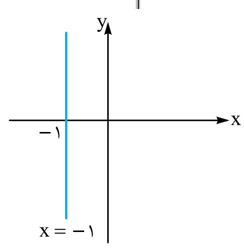
x	۰	-۱
y	۳	۱

۱۲.

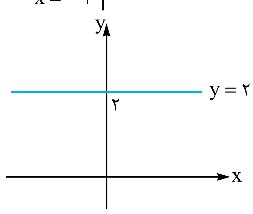


x	-۱	۱
y	۱	۰

۱۳. $x=-۱$ خطی موازی محور yها است که محور xها را در نقطه‌ای به طول -۱ قطع می‌کند.



۱۴. $y=۲$ خطی موازی محور xها است که محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع می‌کند.



۱۵. $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-۴-۴}{-۱-(-۳)} = \frac{-۸}{۲} = -۴$

معادلهٔ خط AB: $y-۴=-۴(x+۳)$

$\Rightarrow y-۴=-۴x-۱۲ \Rightarrow y=-۴x-۸$

۱۶. $۳x+۲y=۵ \Rightarrow$ شیب خط $= -\frac{a}{b} = \frac{-۳}{۲}$

بنابراین شیب خط مطلوب باید $m=\frac{۲}{۳}$ باشد؛ پس معادلهٔ آن عبارت است از:

$y+۱=\frac{۲}{۳}(x-۲) \Rightarrow y+۱=\frac{۲}{۳}x-\frac{۴}{۳} \Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x-\frac{۷}{۳}$

۱۷. شیب خط L برابر $m=۵$ و شیب خط T برابر $m'=-\frac{۱}{۵}$ است. چون $mm'=-۱$، پس این دو خط بر هم عمودند.

۱۸. می‌دانیم شیب خط $ax+by+c=۰$ برابر $-\frac{a}{b}$ است؛ پس شیب خط L برابر $m=\frac{۱}{۲}$ و شیب خط T برابر $m'=\frac{۱}{۲}$ بوده و چون $m=m'$، پس این دو خط با هم موازی‌اند.

۱۹. خط L را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$x=۳y+۲ \Rightarrow ۳y=x-۲ \Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x-\frac{۲}{۳}$

پس شیب خط L برابر $m=\frac{۱}{۳}$ و شیب خط T برابر $m'=۳$ بوده. چون $m \neq m'$ و $mm' \neq -۱$، پس این دو خط با هم متقاطع غیرعمود هستند.

۲۰. شیب خط L برابر $m=\frac{۲}{۳}$ و شیب خط T برابر $m'=-\frac{۳}{۲}$ بوده و چون $mm'=-۱$، پس این دو خط بر هم عمودند.

۲۱. خط L موازی محور yها و خط T موازی محور xها است. در نتیجه این دو خط بر هم عمودند.

۲۲. الف) شیب خط L برابر $m'=\frac{۳}{۲}$ است؛ پس باید $m=\frac{۳}{۲}$.

ب) باید m و m' عکس و قرینهٔ یکدیگر باشند. چون $m'=\frac{۳}{۲}$، پس باید $m=-\frac{۲}{۳}$ باشد.

۲۳. شیب خط $y=(k^۲-۳)x+۵$ برابر $m=k^۲-۳$ و شیب خط $y-۶x+۷=۰$ برابر $m'=۶$ است. چون دو خط موازی هستند، پس داریم:

$m=m' \Rightarrow k^۲-۳=۶ \Rightarrow k^۲=۹ \Rightarrow k=\pm ۳$

۲۴. $(m+۱)y=x+۲ \Rightarrow y=\frac{۱}{m+۱}x+\frac{۲}{m+۱} \Rightarrow m_۱=\frac{۱}{m+۱}$

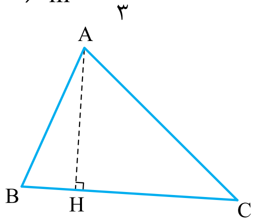
$y=(۲m+۱)x+۱ \Rightarrow m_۲=۲m+۱$

شرط عمودبودن این دو خط آن است که داشته باشیم $m_۱m_۲=-۱$:

$\frac{۱}{m+۱}\times(۲m+۱)=-۱ \Rightarrow ۲m+۱=-m-۱ \Rightarrow ۳m=-۲$

$\Rightarrow m=-\frac{۲}{۳}$

۲۵. AH ارتفاع وارد بر ضلع BC است، پس شیب AH، عکس و قرینهٔ شیب BC می‌باشد:



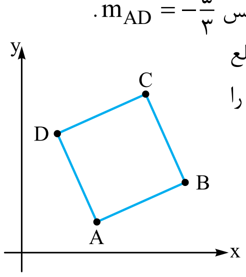
$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{۸-(-۲)}{-۱-۴} = \frac{۱۰}{-۵} = -۲$

بنابراین $m_{AH}=\frac{۱}{۲}$. از طرفی، ارتفاع AH از نقطهٔ $A(۲,۱)$ می‌گذرد. بنابراین معادلهٔ آن عبارت است از:

$y-۱=\frac{۱}{۲}(x-۲) \Rightarrow y-۱=\frac{۱}{۲}x-۱ \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x$

۲۶. الف) $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۴-۱}{۱۰-۵} = \frac{۳}{۵}$

ب) چون ضلع AD بر ضلع AB عمود است، پس $m_{AD}=-\frac{۵}{۳}$. بنابراین شیب ضلع AD برابر $-\frac{۵}{۳}$ و این ضلع از نقطهٔ $A(۵,۱)$ می‌گذرد. پس معادلهٔ آن را می‌توان به صورت مقابل نوشت:



$y-۱=-\frac{۵}{۳}(x-۵) \Rightarrow y-۱=-\frac{۵}{۳}x+\frac{۲۵}{۳}$

$\Rightarrow AD: y=-\frac{۵}{۳}x+\frac{۲۸}{۳}$

پ) کافی است محل تلاقی دو ضلع DC و AD را بیابیم.

خط CD با خط AB موازی است؛ پس $m_{DC}=\frac{۳}{۵}$ و این خط از نقطهٔ $C(۷,۹)$ می‌گذرد، پس معادلهٔ آن عبارت است از:

$$y-۹=\frac{۳}{۵}(x-۷) \Rightarrow y-۹=\frac{۳}{۵}x-\frac{۲۱}{۵} \Rightarrow y=\frac{۳}{۵}x-\frac{۲۱}{۵}+۹$$
$$\Rightarrow y=\frac{۳}{۵}x+\frac{۲۴}{۵}$$

حال دو خط $AD: y=-\frac{۵}{۳}x+\frac{۲۸}{۳}$ و $CD: y=\frac{۳}{۵}x+\frac{۲۴}{۵}$ را با هم تلاقی می‌دهیم. (y آن‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم.)

$$-\frac{۵}{۳}x+\frac{۲۸}{۳}=\frac{۳}{۵}x+\frac{۲۴}{۵} \xrightarrow{\times ۱۵} -۲۵x+۱۴۰=۹x+۷۲$$

$\Rightarrow ۳۴x=۶۸ \Rightarrow x=\frac{۶۸}{۳۴}=۲$ طول نقطهٔ تلاقی (x_D)

$y=-\frac{۵}{۳}x+\frac{۲۸}{۳}$

$\xrightarrow{x=۲} y=-\frac{۱۰}{۳}+\frac{۲۸}{۳}=\frac{۱۸}{۳}=۶$ عرض نقطهٔ تلاقی (y_D)

بنابراین نقطهٔ $D(۲,۶)$ رأس چهارم مربع است.

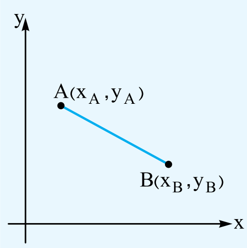
فصل ۱ درس ۱
قسمت دوم: هندسهٔ تحلیلی

صفحهٔ ۴ تا ۱۰ کتاب درسی

سخن دبیر

مطالب مهمی که توی این قسمت می‌خونیم ایناًن: فاصلهٔ دو نقطه، مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط، رابطهٔ مختصات رئوس متوازی‌الاضلاع، قرینهٔ یه نقطه نسبت به نقطهٔ دیگر، فاصلهٔ نقطه از خط و فاصلهٔ دو خط موازی. این قسمت مطالب بسیار مهمی رو دربرداره و معمولاً تو امتحانا ازش سؤال مطرح می‌شه.

فاصلهٔ دو نقطه



اگر $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ دو نقطه در صفحهٔ مختصات باشند، آن‌گاه فاصلهٔ آن‌ها از یکدیگر یا همان طول پاره‌خط AB از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$$

تذکر الف) اگر عرض نقاط A و B برابر باشد، آن‌گاه فاصلهٔ آن‌ها برابر است با:

$$AB=|x_A-x_B|$$

ب) اگر طول نقاط A و B برابر باشد، آن‌گاه فاصلهٔ آن‌ها برابر است با:

$$AB=|y_A-y_B|$$

مثال اگر $A(-۱,۴)$، $B(-۱,-۴)$ و $C(۵,۴)$ سه رأس مثلث ABC باشند، نوع مثلث را تعیین کنید.

✔ **پاسخ:** ابتدا طول اضلاع AB، AC و BC را می‌یابیم:

نقاط A و B دارای طول‌های مساوی هستند؛ پس:

$AB=|y_A-y_B|=|۴-(-۴)|=۸$

نقاط A و C دارای عرض‌های مساوی هستند؛ پس:

$AC=|x_A-x_C|=|-۱-۵|=۶$

همچنین:

$$BC=\sqrt{(x_B-x_C)^۲+(y_B-y_C)^۲}=\sqrt{(-۱-۵)^۲+(-۴-۴)^۲}$$
$$=\sqrt{۳۶+۶۴}=\sqrt{۱۰۰}=۱۰$$

چون طول اضلاع دو به دو متفاوت است، پس مثلث متساوی‌الساقین و متساوی‌الاضلاع نیست، اما رابطهٔ فیثاغورس برقرار است: $۸^۲+۶^۲=۱۰^۲$

پس مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

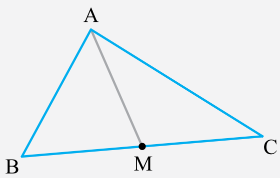
مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط

اگر نقاط $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ دو سر پاره‌خط AB باشند، آن‌گاه مختصات وسط پاره‌خط AB عبارت است از:

$$M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲})$$

مثال مثلث با رئوس $A(-۲,۲)$، $B(-۱,۳)$ و $C(۳,۹)$ را در نظر بگیرید. طول میانهٔ AM را به دست آورید.

✔ **پاسخ:** برای درک بهتر، شکلی برای مسئله رسم می‌کنیم:

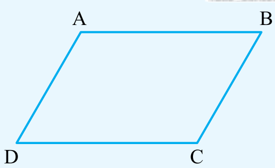


با توجه به شکل، باید ابتدا مختصات وسط ضلع BC را بیابیم و سپس فاصلهٔ آن را تا رأس A به دست آوریم:

$$M(\frac{x_B+x_C}{۲},\frac{y_B+y_C}{۲})=M(\frac{-۱+۳}{۲},\frac{۳+۹}{۲})=M(۱,۶)$$

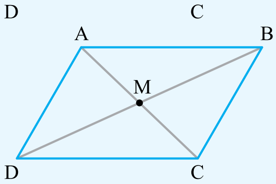
$$AM=\sqrt{(x_A-x_M)^۲+(y_A-y_M)^۲}=\sqrt{(-۲-۱)^۲+(۲-۶)^۲}$$
$$=\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۲۵}=۵$$

رابطهٔ مختصات رئوس متوازی‌الاضلاع



در متوازی‌الاضلاع ABCD داریم:

$$x_A+x_C=x_B+x_D$$
$$y_A+y_C=y_B+y_D$$



اثبات اگر قطرهای متوازی‌الاضلاع را رسم کنیم، از آن‌جایی که قطرها در متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x_M=\frac{x_A+x_C}{۲}=\frac{x_B+x_D}{۲} \\ y_M=\frac{y_A+y_C}{۲}=\frac{y_B+y_D}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases}$$

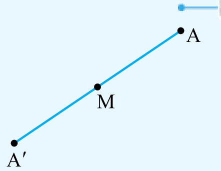
مثال اگر $A(۲,-۳)$، $B(۴,۵)$ و $C(-۱,۸)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع ABCD باشد، رأس D را بیابید.

✔ **پاسخ:**

$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲-۱=۴+x_D \\ -۳+۸=۵+y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D=-۳ \\ y_D=۰ \end{cases}$$

پس $D(-۳,۰)$ رأس چهارم متوازی‌الاضلاع است.

قرینهٔ یک نقطه نسبت به نقطهٔ دیگر



قرینهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ نسبت به نقطهٔ $M(\alpha,\beta)$ برابر است با:

$$A'(۲\alpha-x_۰,۲\beta-y_۰)$$

اثبات با توجه به شکل، M وسط پاره‌خط AA' است. فرض کنیم مختصات A' به صورت $A'(x_۱,y_۱)$ باشد.

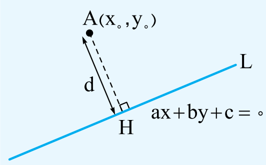
$$x_M=\frac{x_A+x_{A'}}{۲}\Rightarrow \alpha=\frac{x_۰+x_۱}{۲}\Rightarrow ۲\alpha=x_۰+x_۱$$
$$\Rightarrow x_۱=۲\alpha-x_۰$$
$$y_M=\frac{y_A+y_{A'}}{۲}\Rightarrow \beta=\frac{y_۰+y_۱}{۲}\Rightarrow ۲\beta=y_۰+y_۱$$
$$\Rightarrow y_۱=۲\beta-y_۰$$

نتیجه مهم قرینهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ نسبت به مبدأ مختصات برابر $A'(-x_۰,-y_۰)$ می‌باشد.

مثال قرینهٔ نقطهٔ $A(۲,-۵)$ را نسبت به نقطهٔ $M(-۴,۲)$ بیابید.

پاسخ: اگر A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ M باشد، آن‌گاه داریم:
$$A'(۲x_M-x_A,۲y_M-y_A)=A'(-۸-۲,۴-(-۵))=A'(-۱۰,۹)$$

فاصلهٔ نقطه از خط



فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر است با:
$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

مثال فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۳,۱)$ را از خط $۳x-۴y-۲=۰$ به دست آورید.

پاسخ: $$d=\frac{|۳(-۳)-۴(۱)-۲|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{|-۹-۴-۲|}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

فاصلهٔ یک نقطه از خط‌های خاص

الف) فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط $x=a$ برابر است با: $d=|a-x_۰|$

ب) فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط $y=b$ برابر است با: $d=|b-y_۰|$

مثال فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,-۵)$ را از خط‌های $L:x=-۶$ و $T:y=۲$ به دست آورید.

پاسخ: فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,-۵)$ از خط L: $d=|-۶-۲|=۸$

فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,-۵)$ از خط T: $d=|۲-(-۵)|=۷$

فاصلهٔ دو خط موازی

فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ از یکدیگر برابر است با:
$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

مثال فاصلهٔ دو خط $۳x+۴y+۳=۰$ و $۶x+۸y-۴=۰$ را از یکدیگر به دست آورید.

پاسخ: ابتدا طرفین معادلهٔ خط $۶x+۸y-۴=۰$ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا ضرایب x و y در دو خط داده‌شده مانند هم باشند:
$$۶x+۸y-۴=۰\xrightarrow{\div ۲}۳x+۴y-۲=۰$$
حال فاصلهٔ این دو خط موازی را می‌یابیم:
$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۳-(-۲)|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۵}{۵}=۱$$

پاسخ سؤالات

۲۷. نادرست؛ زیرا: $OA=\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$

۲۸. درست؛ زیرا: $M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲})=M(۱,۲)$

۲۹. نادرست؛ زیرا رابطهٔ $y_A+y_C=y_B+y_D$ برقرار نیست.

۳۰. درست

۳۱. نادرست؛ زیرا: $d=|۵-(-۲)|=۷$

۳۲. درست؛ زیرا: $$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۴-(-۱)|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۵}{۵}=۱$$

۳۳. ۵، زیرا: $$AB=\sqrt{(۲-(-۱))^۲+(-۱-۳)^۲}=\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}$$
$$=\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۲۵}=۵$$

۳۴. $A'(-۴,۹)$، زیرا:
$$A'(۲\alpha-x,۲\beta-y)=A'(۲(-۱)-۲,۲(۴)-(-۱))=A'(-۴,۹)$$

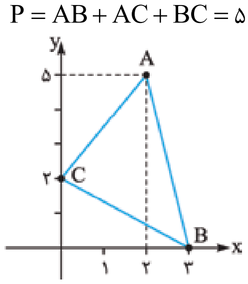
۳۵. $D(۲,۶)$، زیرا:
$$x_A+x_C=x_B+x_D\Rightarrow ۵+۷=۱۰+x_D\Rightarrow x_D=۲$$
$$y_A+y_C=y_B+y_D\Rightarrow ۱+۹=۴+y_D\Rightarrow y_D=۶$$

۳۶. ۴π، زیرا فاصلهٔ مرکز دایره از خط $۵x-۱۲y-۳=۰$، همان اندازهٔ شعاع دایره است؛ پس:
$$\text{شعاع دایره: } r=\frac{|۵\times۱-۱۲\times(-۲)-۳|}{\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}}=\frac{|۵+۲۴-۳|}{\sqrt{۲۵+۱۴۴}}$$
$$=\frac{۲۶}{\sqrt{۱۶۹}}=\frac{۲۶}{۱۳}=۲\Rightarrow S=\pi r^۲=۴\pi$$

۳۷. طول اضلاع مثلث را به دست می‌آوریم:
$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{(۲-۵)^۲+(۰-۴)^۲}$$
$$=\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۲۵}=۵$$
$$AC=\sqrt{(x_A-x_C)^۲+(y_A-y_C)^۲}=\sqrt{(۲+۲)^۲+(۰-۳)^۲}$$
$$=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}=۵$$
$$BC=\sqrt{(x_B-x_C)^۲+(y_B-y_C)^۲}=\sqrt{(۵+۲)^۲+(۴-۳)^۲}$$
$$=\sqrt{۴۹+۱}=\sqrt{۵۰}$$
چون $AB=AC$، پس مثلث متساوی‌الساقین بوده و چون $BC^۲=AB^۲+AC^۲$، پس این مثلث در رأس A قائم‌الزاویه است. در نتیجه مثلث ABC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

محیط مثلث ABC برابر است با:
$$P=AB+AC+BC=۵+۵+\sqrt{۵۰}=۱۰+۵\sqrt{۲}$$

۳۸. شکل مثلث با رئوس داده‌شده به صورت مقابل است. داریم:



$$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{۲-۵}{۰-۲}=\frac{۳}{۲}$$
$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{۲-۰}{۰-۳}=-\frac{۲}{۳}$$

چون $m_{AC}\cdot m_{BC}=-۱$، پس اضلاع AC و BC بر هم عمودند. در واقع مثلث در رأس C قائم‌الزاویه است؛ پس مساحت آن برابر است با $S=\frac{۱}{۲}AC\times BC$.

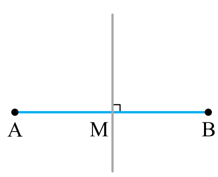
$$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(0-2)^2+(2-5)^2}$$
$$=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$
$$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(0-3)^2+(2-0)^2}$$
$$=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$
$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}AC\times BC=\frac{1}{2}\times\sqrt{13}\times\sqrt{13}=\frac{13}{2}=6/5$$

۳۹.
$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}\Rightarrow 2=\frac{5+x_B}{2}\Rightarrow 4=5+x_B$$
$$\Rightarrow x_B=-1$$
$$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}\Rightarrow -3=\frac{1+y_B}{2}\Rightarrow -6=1+y_B$$
$$\Rightarrow y_B=-7$$
بنابراین مختصات نقطهٔ B به صورت $B(-1,-7)$ می‌باشد.

۴۰. فرض کنیم M وسط پاره‌خط AB باشد؛ پس:
$$M(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2})=M(\frac{4+(-2)}{2},\frac{5+11}{2})=M(1,8)$$
فاصلهٔ نقطهٔ $M(1,8)$ از مبدأ مختصات برابر است با:
$$OM=\sqrt{1^2+8^2}=\sqrt{1+64}=\sqrt{65}$$

۴۱. طبق فرض $AM=BM$ و $CM=MD$؛ یعنی نقطهٔ M وسط AB و نیز وسط CD است. از این‌که نقطهٔ M وسط AB است، می‌توان مختصات آن را یافت:
$$M(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2})=M(\frac{-4+8}{2},\frac{-1+5}{2})=M(2,2)$$
نقطهٔ M وسط CD نیز می‌باشد؛ پس داریم:
$$x_M=\frac{x_C+x_D}{2}\Rightarrow 2=\frac{-1+x_D}{2}\Rightarrow 4=-1+x_D$$
$$\Rightarrow x_D=5$$
$$y_M=\frac{y_C+y_D}{2}\Rightarrow 2=\frac{-2+y_D}{2}\Rightarrow 4=-2+y_D$$
$$\Rightarrow y_D=6$$
پس مختصات نقطهٔ D به صورت $D(5,6)$ خواهد بود.

۴۲. عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر وسط پاره‌خط AB عمود می‌شود؛ بنابراین ابتدا مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB را می‌یابیم:



$$M(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2})$$
$$=M(\frac{4+(-2)}{2},\frac{-1+5}{2})=M(1,2)$$
برای یافتن شیب عمودمنصف، کافی است شیب پاره‌خط AB را یافته و آن را عکس و قرینه کنیم:
$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{5-(-1)}{-2-4}=\frac{6}{-6}=-1$$
$\Rightarrow$ شیب عمودمنصف $=m=1$

بنابراین معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB عبارت است از:
$$y-2=1(x-1)\Rightarrow y-2=x-1\Rightarrow y=x+1$$

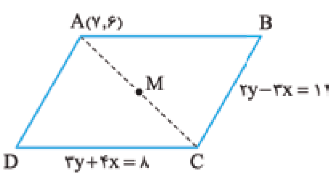
۴۳. روش اول: فرض می‌کنیم نقطهٔ $B(x_B,y_B)$ قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ M باشد، پس نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB خواهد بود؛ بنابراین داریم:
$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}\Rightarrow 3=\frac{2+x_B}{2}\Rightarrow 6=2+x_B\Rightarrow x_B=4$$
$$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}\Rightarrow 4=\frac{-1+y_B}{2}\Rightarrow 8=-1+y_B\Rightarrow y_B=9$$
بنابراین نقطهٔ $B(4,9)$، همان قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ M است.

روش دوم: می‌دانیم قرینهٔ نقطهٔ $A(a,b)$ نسبت به نقطهٔ $M(\alpha,\beta)$ عبارت است از $B(2\alpha-a,2\beta-b)$؛ بنابراین قرینهٔ نقطهٔ $A(2,-1)$ نسبت به نقطهٔ $M(3,4)$ عبارت است از: $B(2\times3-2,2\times4-(-1))=B(4,9)$

۴۴. می‌دانیم اگر ABCD متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه:
$$\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\ y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}$$
چون مستطیل نیز نوعی متوازی‌الاضلاع است، داریم:
$$\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\ y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2+5=-1+x_D\\ -3+7=4+y_D\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_D=8\\ y_D=0\end{cases}$$
پس نقطهٔ $D(8,0)$ رأس چهارم این مستطیل است.

۴۵. چون AC یکی از قطرهای متوازی‌الاضلاع است، پس A و C روبه‌روی هم و B و D نیز روبه‌روی هم قرار دارند؛ بنابراین داریم:
$$x_A+x_C=x_B+x_D\Rightarrow 2m+1+2-m=2n-1$$
$$\Rightarrow m+3=2n-1\Rightarrow m-2n=-4\quad(1)$$
$$y_A+y_C=y_B+y_D\Rightarrow 5+4=n-3+m+1$$
$$\Rightarrow 9=m+n-2\Rightarrow m+n=11\Rightarrow -m-n=-11\quad(2)$$
$$(1),(2)\Rightarrow\begin{cases}m-2n=-4\\ -m-n=-11\end{cases}\Rightarrow -3n=-15$$
$$\Rightarrow n=5\xrightarrow{m+n=11}m=6$$

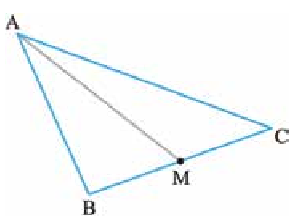
۴۶. دو خط داده‌شده، موازی نیستند، زیرا شیب‌های برابر ندارند و نیز مختصات نقطهٔ A در هیچ‌یک از دو معادلهٔ داده‌شده صدق نمی‌کند. بنابراین وضعیت رأس A و دو ضلع متوازی‌الاضلاع به صورت مقابل است:



دو خط داده‌شده را در یک دستگاه حل می‌کنیم تا مختصات نقطهٔ C به دست آید:
$$\begin{matrix}(-3)\times\\ 2\times\end{matrix}\begin{cases}2y-3x=11\\ 3y+4x=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6y+9x=-33\\ 6y+8x=16\end{cases}$$
$$\Rightarrow 17x=-17\Rightarrow x=-1$$
$$2y-3x=11\xrightarrow{x=-1}2y+3=11\Rightarrow 2y=8\Rightarrow y=4$$
$\Rightarrow$ مختصات نقطهٔ C: $C(-1,4)$

با توجه به شکل، M وسط قطر AC است؛ پس:
$$M(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2})=M(\frac{7-1}{2},\frac{6+4}{2})=M(3,5)$$

۴۷. الف) میانهٔ AM خطی است که از رأس A به وسط ضلع BC رسم می‌شود؛ بنابراین مختصات وسط پاره‌خط BC را می‌یابیم و سپس فاصلهٔ آن تا A را به دست می‌آوریم:



$$M(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2})=M(\frac{3+7}{2},\frac{1+11}{2})=M(5,6)$$
$$AM=\sqrt{(x_A-x_M)^2+(y_A-y_M)^2}=\sqrt{(1-5)^2+(9-6)^2}$$

$$= \sqrt{۱۶+۹} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

ب) شیب میانهٔ AM عبارت است از: $m_{AM} = \dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{۶-۹}{۵-۱} = \dfrac{-۳}{۴}$

شیب AM را به دست آوردیم. برای نوشتن معادلهٔ آن به یک نقطه نیاز داریم. این نقطه را می‌توانیم هر یک از نقاط A یا M بگیریم (فرقی نمی‌کند). مثلاً اگر نقطهٔ $A(۱,۹)$ را در نظر بگیریم، داریم:

$$\text{معادلهٔ AM}: \ y-۹ = -\frac{۳}{۴}(x-۱) \Rightarrow y-۹ = -\frac{۳}{۴}x + \frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{۳}{۴}x + \frac{۳۹}{۴}$$

۴۸. مختصات نقطهٔ M به صورت $M(x,۰)$ می‌باشد. طبق فرض داریم:

$$AM = BM \Rightarrow \sqrt{(x_A - x_M)^۲ + (y_A - y_M)^۲}$$

$$= \sqrt{(x_B - x_M)^۲ + (y_B - y_M)^۲}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(-۱-x)^۲ + (۲-۰)^۲} = \sqrt{(۲-x)^۲ + (-۲-۰)^۲}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(-۱-x)^۲ + ۴} = \sqrt{(۲-x)^۲ + ۴}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (-۱-x)^۲ + \cancel{۴} = (۲-x)^۲ + \cancel{۴}$$

$$\Rightarrow ۱+۲x+\cancel{x^۲} = ۴-۴x+\cancel{x^۲} \Rightarrow ۶x = ۳$$

$$\Rightarrow x = \frac{۳}{۶} \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \text{مختصات نقطهٔ M}: M(\tfrac{۱}{۲},۰)$$

۴۹. فرض کنیم M نقطه‌ای روی خط $y = x$ با ویژگی مسئله باشد. اگر طول نقطهٔ M برابر a باشد، از آن‌جایی که نقطهٔ M روی خط $y = x$ قرار دارد، عرض نقطهٔ M نیز برابر a خواهد بود؛ بنابراین باید a را به گونه‌ای بیابیم که فاصلهٔ نقاط $M(a,a)$ و $A(۲,-۱)$ برابر ۳ باشد.

$$AM = ۳ \Rightarrow \sqrt{(a-۲)^۲ + (a+۱)^۲} = ۳$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (a-۲)^۲ + (a+۱)^۲ = ۹$$

$$\Rightarrow a^۲ - ۴a + ۴ + a^۲ + ۲a + ۱ = ۹ \Rightarrow ۲a^۲ - ۲a - ۴ = ۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲} a^۲ - a - ۲ = ۰ \Rightarrow (a-۲)(a+۱) = ۰$$

$$\Rightarrow a = ۲ \ \text{یا} \ a = -۱$$

پس نقاط مورد نظر $M(-۱,-۱)$ و $M(۲,۲)$ می‌باشند.

۵۰. الف) مرکز دایره، وسط نقاط A و B است:

$$\text{مرکز دایره}: M(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲}) = M(\frac{۵+(-۳)}{۲}, \frac{۸+۲}{۲}) = M(۱,۵)$$

برای یافتن اندازهٔ شعاع دایره، می‌توان اندازهٔ پاره‌خط AB را به دست آورده و آن را نصف کنیم و یا این‌که فاصلهٔ M را تا یکی از نقاط A یا B بیابیم:

$$\text{اندازهٔ شعاع دایره}: \ AM = \sqrt{(x_A - x_M)^۲ + (y_A - y_M)^۲}$$

$$= \sqrt{(-۳-۱)^۲ + (۲-۵)^۲} = \sqrt{۱۶+۹} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

ب) کافی است فاصلهٔ C را تا نقطهٔ M به دست آوریم. اگر اندازهٔ MC برابر شعاع دایره باشد، نقطهٔ C روی محیط دایره واقع است:

$$MC = \sqrt{(x_M - x_C)^۲ + (y_M - y_C)^۲} = \sqrt{(۱-۴)^۲ + (۵-۱)^۲}$$

$$= \sqrt{۹+۱۶} = ۵$$

بنابراین نقطهٔ C روی محیط دایره قرار دارد.

۵۱. الف) $۲x + y = ۲ \Rightarrow ۲x + y - ۲ = ۰$

$$d = \frac{|۲\times۲+۳-۲|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۵}} = \frac{۵}{\sqrt{۵}} \times \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}} = \frac{۵\sqrt{۵}}{۵} = \sqrt{۵}$$

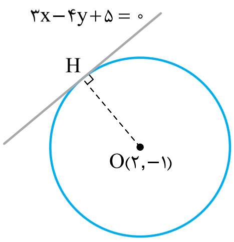
ب) می‌دانیم فاصلهٔ نقطهٔ $P(x_۰, y_۰)$ از خط $x = \alpha$ برابر است با $d = |x_۰ - \alpha|$؛ بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ $P(۲,۳)$ از خط $x = -۳$ برابر است با:

$$d = |۲-(-۳)| = ۵$$

پ) می‌دانیم فاصلهٔ نقطهٔ $P(x_۰, y_۰)$ از خط $y = \beta$ برابر است با $d = |y_۰ - \beta|$؛ بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ $P(۲,۳)$ از خط $y = ۵$ برابر است با:

$$d = |۳-۵| = ۲$$

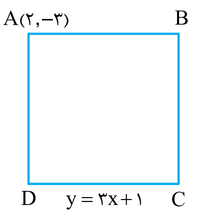
۵۲. می‌دانیم خط مماس بر دایره، بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس عمود است.



پس شعاع دایره برابر فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس می‌باشد:

$$r = OH = \frac{|۳\times۲-۴\times(-۱)+۵|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}} = \frac{۱۵}{۵} = ۳$$

۵۳. مختصات نقطهٔ A در خط L صدق نمی‌کند.



پس نقطهٔ A روی ضلعی که معادلهٔ آن داده شده است قرار ندارد.

با توجه به شکلی که رسم کرده‌ایم، فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,-۳)$ از خط $y = ۳x + ۱$، برابر طول ضلع مربع است:

$$y = ۳x + ۱ \Rightarrow ۳x - y + ۱ = ۰$$

$$\text{اندازهٔ ضلع مربع}: AD = \frac{|۳\times۲-(-۳)+۱|}{\sqrt{۳^۲+۱^۲}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۱۰}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۱۰}} \times \frac{\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۱۰}} = \sqrt{۱۰}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با: $S = (AD)^۲ = (\sqrt{۱۰})^۲ = ۱۰$

۵۴. ابتدا معادلهٔ خط را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$۳x = my + ۱۰ \Rightarrow ۳x - my - ۱۰ = ۰$$

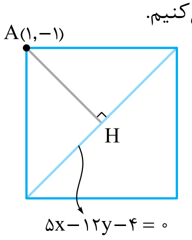
طبق فرض، فاصلهٔ مبدأ مختصات یعنی نقطهٔ $O(۰,۰)$ از این خط برابر ۲ واحد است؛ پس:

$$d = \frac{|۰-۰-۱۰|}{\sqrt{۳^۲+m^۲}} = ۲ \Rightarrow \frac{۱۰}{\sqrt{۹+m^۲}} = ۲ \Rightarrow ۱۰ = ۲\sqrt{۹+m^۲}$$

$$\xrightarrow{\div ۲} ۵ = \sqrt{۹+m^۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۲۵ = ۹ + m^۲ \Rightarrow m^۲ = ۱۶$$

$$\Rightarrow m = \pm ۴$$

۵۵. برای درک بهتر مسئله، شکلی برای آن رسم می‌کنیم.

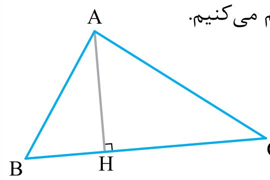


توجه کنید که چون مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ قطر صدق نمی‌کند، پس نقطهٔ A روی قطری که معادله‌اش را داریم، قرار ندارد. فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱,-۱)$ از خط $۵x - ۱۲y - ۴ = ۰$ برابر نصف اندازهٔ قطر مربع است. داریم:

$$AH = \frac{|۵\times۱-۱۲\times(-۱)-۴|}{\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}} = \frac{۱۳}{\sqrt{۲۵+۱۴۴}} = \frac{۱۳}{\sqrt{۱۶۹}} = \frac{۱۳}{۱۳} = ۱$$

بنابراین اگر اندازهٔ قطر مربع را d بگیریم، آن‌گاه $d = ۲AH = ۲$. می‌دانیم مساحت مربع با قطر d برابر $S = \dfrac{d^۲}{۲}$ است؛ پس: $S = \dfrac{d^۲}{۲} = \dfrac{۲^۲}{۲} = ۲$

۵۶. برای درک بهتر، شکلی برای مسئله رسم می‌کنیم.



اندازهٔ ارتفاع AH، همان فاصلهٔ نقطهٔ A از خط BC می‌باشد؛ بنابراین ابتدا معادلهٔ خط BC را می‌نویسیم و سپس فاصلهٔ نقطهٔ A را تا خط BC می‌یابیم:

$$m_{BC}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{۲-(-۴)}{-۱-۱}=\frac{۶}{-۲}=-۳$$

معادلهٔ خط BC: $y-۲=-۳(x+۱) \Rightarrow y-۲=-۳x-۳$

$\Rightarrow ۳x+y+۱=۰$

اکنون باید فاصلهٔ نقطهٔ $A(۵,۳)$ را از خط $BC: ۳x+y+۱=۰$ به دست آوریم:

$$AH=\frac{|۳\times۵+۳+۱|}{\sqrt{۳^۲+۱^۲}}=\frac{۱۹}{\sqrt{۱۰}}$$

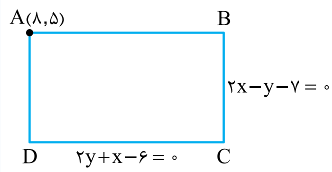
۵۷. فرض می‌کنیم طول نقطه a باشد، پس عرض آن برابر $y=a-۱$ خواهد بود؛ بنابراین نقاط مورد نظر به شکل $A(a,a-۱)$ خواهد بود. فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط $۲x-۳y-۵=۰$ برابر $\sqrt{۱۳}$ است؛ پس:

$$\sqrt{۱۳}=\frac{|۲a-۳(a-۱)-۵|}{\sqrt{۲^۲+۳^۲}} \Rightarrow \sqrt{۱۳}=\frac{|۲a-۳a+۳-۵|}{\sqrt{۱۳}}$$

$$\Rightarrow |-a-۲|=۱۳ \Rightarrow \begin{cases}-a-۲=۱۳\\-a-۲=-۱۳\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-۱۵\\a=۱۱\end{cases}$$

نقاط به شکل $(a,a-۱)$ بودند؛ پس نقاط مورد نظر به صورت $A(-۱۵,-۱۶)$ و $B(۱۱,۱۰)$ می‌باشند.

۵۸. شیب دو خط داده‌شده، عکس و قرینهٔ یکدیگرند؛ پس این دو خط بر هم عمودند و همچنین مختصات نقطهٔ A در هیچ‌یک از این دو خط صدق نمی‌کند، پس وضعیت نقطهٔ A و دو ضلع مستطیل به صورت مقابل می‌باشد:



با توجه به شکل، اندازهٔ اضلاع AB و AD به ترتیب برابر فاصلهٔ نقطهٔ A از خطوط $۲x-y-۷=۰$ و $۲y+x-۶=۰$ می‌باشد؛ بنابراین:

$$AD=\frac{|۲\times۵+۸-۶|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}$$

$$AB=\frac{|۲\times۸-۵-۷|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}$$

در نتیجه مساحت مستطیل برابر است با:

$$S=AB\times AD=\frac{۴}{\sqrt{۵}}\times\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}=\frac{۴۸}{۵}=۹/۶$$

۵۹. ابتدا یادآوری می‌کنیم که دو خط $ax+by+c=۰$ و $a'x+b'y+c'=۰$ وقتی با هم موازیند که شیب آن‌ها مساوی باشند و یا این‌که $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ باشد. در این‌جا داریم:

$$\frac{-۵}{۱۰}=\frac{۱۲}{-۲۴}=\frac{-۱}{۲}$$

پس این دو خط با هم موازی‌اند.

فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$، برابر است با:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

ابتدا باید کاری کنیم که ضریب x و y در دو خط یکسان باشند. برای این منظور در خط $۱۰x-۲۴y+۱۲=۰$، طرفین را بر (-۲) تقسیم می‌کنیم:

$-۵x+۱۲y-۶=۰$

خط اولی هم به شکل $-۵x+۱۲y+۲۰=۰$ بود؛ پس فاصلهٔ این دو خط موازی برابر است با:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۲۰-(-۶)|}{\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}}=\frac{۲۶}{\sqrt{۲۵+۱۴۴}}=\frac{۲۶}{۱۳}=۲$$

۶۰. طرفین خط دوم را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا ضرایب x و y در دو خط یکسان باشند:

$$۶x-۴y+۲=۰ \xrightarrow{\div ۲} ۳x-۲y+۱=۰$$

می‌دانیم فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ برابر $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ می‌باشد. در این‌جا فاصلهٔ دو خط موازی $۳x-۲y+m=۰$ و $۳x-۲y+۱=۰$ طبق فرض برابر $\sqrt{۱۳}$ است؛ پس داریم:

$$\frac{|m-۱|}{\sqrt{۳^۲+۲^۲}}=\sqrt{۱۳} \Rightarrow \frac{|m-۱|}{\sqrt{۹+۴}}=\sqrt{۱۳} \Rightarrow \frac{|m-۱|}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳}$$

$$\Rightarrow |m-۱|=۱۳ \Rightarrow \begin{cases}m-۱=۱۳\\ \text{یا}\\ m-۱=-۱۳\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m=۱۴\\ \text{یا}\\ m=-۱۲\end{cases}$$

۶۱. می‌توان نوشت:

$$۶x-۲y=۴ \xrightarrow{\div ۲} ۳x-y=۲ \Rightarrow ۳x-y-۲=۰$$

$$۳x=y-۸ \Rightarrow ۳x-y+۸=۰$$

بنابراین دو خط داده‌شده با هم موازی هستند و در نتیجه دو ضلع موازی مربع روی این دو خط قرار دارند. بنابراین فاصلهٔ این دو خط موازی، همان اندازهٔ ضلع مربع خواهد بود:

$$\text{اندازهٔ ضلع مربع}=AB=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-۲-۸|}{\sqrt{۳^۲+۱^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۱۰}}=\sqrt{۱۰}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با: $S=(AB)^۲=۱۰$

فصل ۱ — درس ۲

قسمت اول: معادلهٔ درجه‌دوم

صفحهٔ ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی

سخن دبیر

توی این قسمت، اول با روش حل معادله‌های دومجذوری که با تغییر متغیر به معادلهٔ درجه۲ تبدیل می‌شن آشنا می‌شیم. بعدش روابط بین ریشه‌های معادلهٔ درجه۲ رو می‌خونیم و آخرش تشکیل معادلهٔ درجه۲ به کمک ریشه‌هاش رو بررسی می‌کنیم. این قسمت و قسمت بعدی بسیار مهمن و معمولاً تو امتحانا ازشون سؤال مطرح می‌شه.

روش تغییر متغیر برای حل معادله

گاهی اوقات برخی از معادلاتی که درجه‌دوم نیستند را می‌توان به کمک تغییر متغیر به معادلهٔ درجه‌دوم تبدیل نمود. سپس به کمک روش‌هایی که برای حل معادلهٔ درجه‌دوم داریم، آن‌ها را حل نمود.

مثال: معادلهٔ $۲x^۴-۳x^۲-۲۰=۰$ را حل کنید.

✓ **پاسخ:** قرار می‌دهیم $x^۲=t$. خواهیم داشت: $۲t^۲-۳t-۲۰=۰$

این معادله را به روش Δ حل می‌کنیم:

$$\Delta=b^۲-۴ac=۹-۴\times۲(-۲۰)=۱۶۹$$

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۳\pm\sqrt{۱۶۹}}{۲\times۲}=\frac{۳\pm۱۳}{۴}$$

$$\Rightarrow t=۴ \ \text{یا}\ t=-\frac{۱۰}{۴}=-\frac{۵}{۲}$$

چون $t=x^۲$ بود، پس داریم: $t=۴ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow x=\pm ۲$

$t=-\frac{۵}{۲} \Rightarrow x^۲=-\frac{۵}{۲}$ (غیرممکن)

پس این معادله فقط دو جواب دارد.

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲

فرض کنیم معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲+bx+c=۰$ دارای دو ریشهٔ α و β باشد. در این صورت:

مجموع ریشه‌ها: $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها: $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$

اثبات وقتی معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ دو ریشه دارد، ریشه‌ها به صورت $\alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$ و $\beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$ هستند؛ پس:

$$S=\alpha+\beta=\frac{-۲b}{۲a}=-\frac{b}{a}$$

$$P=\alpha\beta=\frac{b^۲-\Delta}{۴a^۲}=\frac{b^۲-(b^۲-۴ac)}{۴a^۲}=\frac{۴ac}{۴a^۲}=\frac{c}{a}$$

نکته با استفاده از اتحادهای فرعی $a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab$ و $a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$، خواهیم داشت:

مجموع مربعات ریشه‌ها: $\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P$

مجموع مکعبات ریشه‌ها: $\alpha^۳+\beta^۳=S^۳-۳SP$

مثال اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۸x-۱=۰$ باشند، بدون حل معادله، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}$ ب) $\frac{\alpha^۲}{\beta+۱}+\frac{\beta^۲}{\alpha+۱}$

پاسخ: الف) در معادلهٔ $۲x^۲-۸x-۱=۰$، داریم $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۴$ و $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{۱}{۲}$؛ پس:

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}=\frac{۴}{-\frac{۱}{۲}}=-۸$$

ب)

$$\frac{\alpha^۲}{\beta+۱}+\frac{\beta^۲}{\alpha+۱}=\frac{\alpha^۳+\alpha^۲+\beta^۳+\beta^۲}{(\alpha+۱)(\beta+۱)}=\frac{(\alpha^۳+\beta^۳)+(\alpha^۲+\beta^۲)}{\alpha\beta+\alpha+\beta+۱}$$

$$=\frac{(S^۳-۳SP)+(S^۲-۲P)}{P+S+۱}=\frac{(۴^۳-۳\times۴\times(-\frac{۱}{۲}))+(۴^۲-۲(-\frac{۱}{۲}))}{-\frac{۱}{۲}+۴+۱}$$

$$=\frac{(۶۴+۶)+(۱۶+۱)}{\frac{۹}{۲}}=\frac{۷۰+۱۷}{\frac{۹}{۲}}=\frac{۸۷}{\frac{۹}{۲}}=\frac{۲\times\cancel{۸۷}^{۲۹}}{\cancel{۹}_{۳}}=\frac{۵۸}{۳}$$

تذکر اگر رابطهٔ داده‌شده برحسب α و β متقارن نباشد، یعنی اگر با تعویض جای α و β، رابطه تغییر کند، گاهی می‌توان یکی از ریشه‌ها را در معادله قرار داد و از نتیجهٔ به‌دست‌آمده در رابطه استفاده کرد.

مثال اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۵x+۱=۰$ باشد، حاصل $۵\alpha+\beta^۲$ را بیابید.

پاسخ: چون β ریشهٔ معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$x^۲-۵x+۱=۰ \xrightarrow{x=\beta} \beta^۲-۵\beta+۱=۰ \Rightarrow \beta^۲=۵\beta-۱\ (*)$$

$$۵\alpha+\beta^۲ \overset{(*)}{=} ۵\alpha+۵\beta-۱=۵(\alpha+\beta)-۱$$

$$=۵S-۱=۵\times۵-۱=۲۴$$

تشکیل معادلهٔ درجه ۲ با استفاده از S و P

معادلهٔ درجه‌دومی که مجموع ریشه‌های آن S و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن P باشد، عبارت است از: $\boxed{x^۲-Sx+P=۰}$

مثال معادلهٔ درجه‌دومی بیابید که ریشه‌های آن $۳+\sqrt{۷}$ و $۳-\sqrt{۷}$ باشد.

پاسخ: با فرض $\alpha=۳+\sqrt{۷}$ و $\beta=۳-\sqrt{۷}$ داریم:

$$S=\alpha+\beta=۶\ ,\ P=\alpha\beta=(۳+\sqrt{۷})(۳-\sqrt{۷})=۹-۷=۲$$

معادلهٔ مورد نظر: $x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-۶x+۲=۰$

مثال معادلهٔ درجه‌دومی بنویسید که ریشه‌های آن، مربع ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۱۰x+۱=۰$ باشد.

پاسخ: فرض کنیم ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۱۰x+۱=۰$، α و β باشد؛ پس داریم:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۵\ ,\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}$$

اگر ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم خواسته‌شده را α' و β' بگیریم، طبق فرض می‌توان نوشت: $\alpha'=\alpha^۲\ ,\ \beta'=\beta^۲$

حالا باید S' و P' معادلهٔ مطلوب را یافته و در رابطهٔ $x^۲-S'x+P'=۰$ قرار دهیم:

$$S'=\alpha'+\beta'=\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P=۵^۲-۲(\frac{۱}{۲})=۲۵-۱=۲۴$$

$$P'=\alpha'\beta'=\alpha^۲\beta^۲=(\alpha\beta)^۲=P^۲=(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر عبارت است از:

$$x^۲-S'x+P'=۰ \Rightarrow x^۲-۲۴x+\frac{۱}{۴}=۰$$

پاسخ سؤالات

۶۲. درست

۶۳. نادرست، مجموع ریشه‌ها برابر $S=-\frac{b}{a}$ است.

۶۴. درست

۶۵. درست، زیرا: $\alpha^۲\beta+\beta^۲\alpha=\alpha\beta(\alpha+\beta)=P\times S=۱\times۵=۵$

۶۶. ۲

۶۷. ۴

۶۸. $x^۲-Sx+P=۰$

۶۹. ۱۴؛ زیرا: $\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P=۴^۲-۲\times۱=۱۶-۲=۱۴$

۷۰. $x^۲-۲x-۴=۰$، زیرا: $S=۲,P=-۴$

$\Rightarrow$ معادله: $x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-۲x-۴=۰$

۷۱. $x^۲=t \Rightarrow t^۲-۱۰t+۹=۰$

$\Rightarrow (t-۱)(t-۹)=۰ \Rightarrow t=۱$ یا $t=۹$

$\xrightarrow{t=x^۲} x^۲=۱$ یا $x^۲=۹ \Rightarrow x=\pm۱$ یا $x=\pm۳$

۷۲. $x^۲=t \Rightarrow ۲t^۲-۷t-۴=۰ \Rightarrow \Delta=۴۹+۳۲=۸۱$

$\Rightarrow t=\frac{۷\pm\sqrt{۸۱}}{۴}=\frac{۷\pm۹}{۴} \Rightarrow t=۴$ یا $t=-\frac{۱}{۲}$

$\xrightarrow{t=x^2} x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2,\ x^2=-\frac{1}{2}$ (غیرممکن)

۷۳. $x^2=t \Rightarrow t^2+3t+2=0 \Rightarrow (t+2)(t+1)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} t=-2 \\ t=-1 \end{cases} \xrightarrow{t=x^2} \begin{cases} x^2=-2 \ (\text{غیرممکن}) \\ x^2=-1 \ (\text{غیرممکن}) \end{cases}$

بنابراین این معادله جواب ندارد.

۷۴. $x^2=t \Rightarrow t^2-8t+8=0 \Rightarrow \Delta=64-32=32$

$\Rightarrow t=\frac{8\pm\sqrt{32}}{2}=\frac{8\pm4\sqrt{2}}{2}=\frac{\cancel{2}(4\pm2\sqrt{2})}{\cancel{2}} \Rightarrow t=4\pm2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} t=4+2\sqrt{2} \\ t=4-2\sqrt{2} \end{cases} \xrightarrow{t=x^2} \begin{cases} x^2=4+2\sqrt{2} \\ x^2=4-2\sqrt{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{4+2\sqrt{2}} \\ x=\pm\sqrt{4-2\sqrt{2}} \end{cases}$

۷۵. $x^3=t \Rightarrow 4t^2+1=5t$

$\Rightarrow 4t^2-5t+1=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} t=1 \\ t=\frac{c}{a}=\frac{1}{4} \end{cases}$

$\xrightarrow{t=x^3} \begin{cases} x^3=1 \\ x^3=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \end{cases}$

۷۶. $\sqrt{x}=t \Rightarrow t^2-7t+6=0$

$\xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} t=1 \\ t=\frac{c}{a}=6 \end{cases} \xrightarrow{t=\sqrt{x}} \begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{x}=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=36 \end{cases}$

۷۷. $(x+2)^2=t \Rightarrow t^2+t-2=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} t=1 \\ t=\frac{c}{a}=-2 \end{cases}$

$\xrightarrow{(x+2)^2=t} \begin{cases} (x+2)^2=1 \\ (x+2)^2=-2 \ (\text{غیرممکن}) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x+2=1 \\ \text{یا} \\ x+2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \end{cases}$

۷۸. $x^2+x=t \Rightarrow t^2-18t+72=0 \Rightarrow (t-6)(t-12)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} t=6 \\ t=12 \end{cases}$

$\xrightarrow{t=x^2+x} \begin{cases} x^2+x=6 \\ x^2+x=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+x-6=0 \\ x^2+x-12=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (x+3)(x-2)=0 \\ (x+4)(x-3)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \ \text{یا} \ x=2 \\ x=-4 \ \text{یا} \ x=3 \end{cases}$

۷۹. مجموع: $S=-\frac{b}{a}=\frac{7}{3}$، حاصل‌ضرب: $P=\frac{c}{a}=-\frac{1}{3}$

۸۰. مجموع: $S=-\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$، حاصل‌ضرب: $P=\frac{c}{a}=\frac{2-\sqrt{5}}{2}$

۸۱. $S=2 \Rightarrow -\frac{b}{a}=2 \Rightarrow \frac{m+2}{m}=2 \Rightarrow m+2=2m$

$\Rightarrow m=2 \Rightarrow$ معادله: $2x^2-4x+1-10=0 \Rightarrow 2x^2-4x-9=0$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها $P=\frac{c}{a}=-\frac{9}{2}$

۸۲. داریم: $S=-\frac{b}{a}=\frac{m}{2},\ P=\frac{c}{a}=\frac{m-2}{2}$

بنا بر فرض داریم: $S=\frac{2}{P} \Rightarrow \frac{m}{2}=\frac{2}{\frac{m-2}{2}} \Rightarrow \frac{m}{2}=\frac{4}{m-2}$

$\Rightarrow m(m-2)=8 \Rightarrow m^2-2m-8=0 \Rightarrow (m-4)(m+2)=0$

$\Rightarrow m=4$ یا $m=-2$

۸۳. در معادلهٔ $x^2-3x+1=0$، داریم:

$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=3\ ,\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=1$

بنابراین: $\alpha\beta^2+\beta\alpha^2=\alpha\beta(\beta+\alpha)=P\times S=1\times3=3$

۸۴. $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{S^2-2P}{P}=\frac{3^2-2(1)}{1}=7$

۸۵. $\alpha^3+\beta^3=S^3-3SP=3^3-3\times3\times1=27-9=18$

۸۶. $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=A \xrightarrow{\text{توان ۲}} (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=A^2$

$\Rightarrow \alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=A^2 \Rightarrow S+2\sqrt{P}=A^2$

$\Rightarrow 3+2\sqrt{1}=A^2 \Rightarrow A^2=5 \Rightarrow A=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{5}$

۸۷. چون α ریشهٔ معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ است، پس در این معادله صدق می‌کند:

$\alpha^2-3\alpha+1=0 \Rightarrow \alpha^2=3\alpha-1 \ (*)$

بنابراین: $\alpha^2+3\beta \overset{(*)}{=} 3\alpha-1+3\beta=3(\alpha+\beta)-1=3S-1$

$=3\times3-1=8$

۸۸. بنا بر فرض داریم: $\alpha=\beta+3$

از طرفی مجموع ریشه‌های معادله برابر است با: $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=4$

$\alpha+\beta=4 \xrightarrow{\alpha=\beta+3} \beta+3+\beta=4 \Rightarrow 2\beta=1 \Rightarrow \beta=\frac{1}{2}$

$\alpha=\beta+3 \xrightarrow{\beta=\frac{1}{2}} \alpha=\frac{1}{2}+3 \Rightarrow \alpha=\frac{7}{2}$

برای به دست آوردن مقدار m می‌توان یکی از α یا β را در معادله قرار داد و یا آن‌که از حاصل‌ضرب ریشه‌ها استفاده نمود. در این‌جا از حاصل‌ضرب ریشه‌ها استفاده می‌کنیم:

$\alpha\beta=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{7}{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}=\frac{m-1}{\cancel{2}} \Rightarrow m-1=\frac{7}{2} \Rightarrow m=\frac{9}{2}$

۸۹. فرض کنیم α و β ریشه‌های معادلهٔ $mx^2-(m+3)x+5=0$ باشد، پس:

$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{m+3}{m}$

$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{5}{m}$

بنا بر فرض داریم:

$\alpha^2+\beta^2=6 \Rightarrow S^2-2P=6 \Rightarrow (\frac{m+3}{m})^2-2(\frac{5}{m})=6$

$\Rightarrow \frac{(m+3)^2}{m^2}-\frac{10}{m}=6 \Rightarrow \frac{m^2+6m+9}{m^2}-\frac{10}{m}=6$

$$\xrightarrow{\times m^۲} m^۲+۶m+۹-۱۰m=۶m^۲ \Rightarrow ۵m^۲+۴m-۹=۰$$

$$\xrightarrow{a+b+c=۰} m=۱ \text{ یا } m=\frac{c}{a}=-\frac{۹}{۵}$$

به ازای $m=۱$ معادله به صورت $x^۲-۴x+۵=۰$ درمی‌آید که در آن $\Delta=۱۶-۴\times۵<۰$؛ پس $m=۱$ قابل قبول نیست، اما به ازای $m=-\frac{۹}{۵}$ مقدار Δ مثبت می‌شود و لذا $m=-\frac{۹}{۵}$ را می‌پذیریم.

۹۰. $\alpha=۲, \beta=-۳ \Rightarrow S=\alpha+\beta=-۱, P=\alpha\beta=-۶$

معادلهٔ مورد نظر: $x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲+x-۶=۰$

۹۱. $\alpha=۱+\sqrt{۲}, \beta=۱-\sqrt{۲} \Rightarrow S=\alpha+\beta=۲$

$$P=\alpha\beta=(۱+\sqrt{۲})(۱-\sqrt{۲})=۱-۲=-۱$$

معادلهٔ مورد نظر: $x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-۲x-۱=۰$

۹۲. $\alpha=\frac{۵+\sqrt{۳}}{۲}, \beta=\frac{۵-\sqrt{۳}}{۲}$

$$\Rightarrow S=\alpha+\beta=\frac{۵+\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۵-\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۱۰}{۲}=۵$$

$$P=\alpha\beta=(\frac{۵+\sqrt{۳}}{۲})(\frac{۵-\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۲۵-۳}{۴}=\frac{۲۲}{۴}=\frac{۱۱}{۲}$$

معادلهٔ مورد نظر: $x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-۵x+\frac{۱۱}{۲}=۰$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۲x^۲-۱۰x+۱۱=۰$$

۹۳. طبق فرض $S=-۱$ و $P=-۱$؛ بنابراین دو عدد حقیقی، ریشه‌های معادلهٔ مقابل هستند: $x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲+x-۱=۰ \Rightarrow \Delta=۱+۴=۵$

$$x=\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow x_۱=\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}, x_۲=\frac{-۱-\sqrt{۵}}{۲}$$

۹۴. فرض کنیم ابعاد مستطیل α و β باشد. طبق فرض داریم:

$$\text{محیط}=۱۱ \Rightarrow ۲(\alpha+\beta)=۱۱ \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{۱۱}{۲} \Rightarrow S=\frac{۱۱}{۲}$$

$$\text{مساحت}=۶ \Rightarrow \alpha\beta=۶ \Rightarrow P=۶$$

بنابراین α و β ریشه‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-\frac{۱۱}{۲}x+۶=۰ \xrightarrow{\times ۲} ۲x^۲-۱۱x+۱۲=۰$$

$$\Delta=۱۱^۲-۴\times۲\times۱۲=۱۲۱-۹۶=۲۵$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱۱\pm\sqrt{۲۵}}{۲\times۲}=\frac{۱۱\pm۵}{۴} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=۴\\ \beta=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

یعنی طول مستطیل برابر ۴ و عرض آن برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

۹۵. فرض کنیم ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲+۷x+۱=۰$، α و β باشد؛ پس:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{۷}{۳}, P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۳}$$

اگر α' و β' ریشه‌های معادلهٔ مطلوب باشد، آن‌گاه بنا بر فرض داریم:

$$\alpha'=\alpha+۱, \beta'=\beta+۱$$

$$S'=\alpha'+\beta'=\alpha+۱+\beta+۱=\alpha+\beta+۲=S+۲=-\frac{۷}{۳}+۲=-\frac{۱}{۳}$$

$$P'=\alpha'\beta'=(\alpha+۱)(\beta+۱)=\alpha\beta+\alpha+\beta+۱=P+S+۱$$

$$=\frac{۱}{۳}-\frac{۷}{۳}+۱=-۱$$

پس معادلهٔ خواسته‌شده به صورت زیر می‌باشد:

$$x^۲-S'x+P'=۰ \Rightarrow x^۲+\frac{۱}{۳}x-۱=۰$$

۹۶. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-x-۲=۰$ باشند، آن‌گاه:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{۱}{۲}, P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۱$$

فرض کنیم ریشه‌های معادلهٔ خواسته‌شده برابر α' و β' باشد. بنا بر فرض داریم:

$$\alpha'=\alpha^۳, \beta'=\beta^۳$$

$$S'=\alpha'+\beta'=\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$=S^۳-۳PS=(\frac{۱}{۲})^۳-۳(-۱)(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۲}=\frac{۱۳}{۸}$$

$$P'=\alpha'\beta'=\alpha^۳\beta^۳=P^۳=(-۱)^۳=-۱$$

بنابراین معادلهٔ خواسته‌شده به صورت زیر خواهد بود:

$$x^۲-S'x+P'=۰ \Rightarrow x^۲-\frac{۱۳}{۸}x-۱=۰$$

فصل ۱ درس ۲
قسمت دوم: تابع درجه دوم

صفحه ۱۴ تا ۱۸ کتاب درسی

سخن دبیر

توی این قسمت، ماکزیمم و مینیمم تابع درجه ۲ و به خصوص کاربردش رو توی مسائل بهینه‌سازی می‌خونیم. در ادامه هم با طریقهٔ نوشتن ضابطهٔ سهمی از روی نمودارش آشنا می‌شیم و اینم یاد می‌گیریم که چه‌جوری از روی سهمی می‌شه علامت ضرایب معادلهٔ درجه ۲ رو پیدا کرد. این قسمت هم خیلی مهمه و معمولاً ازش سؤال مطرح می‌شه.

ماکزیمم و مینیمم سهمی

در سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$، اگر $a>۰$، سهمی مینیمم دارد که به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ رخ می‌دهد و مقدار آن برابر $f(-\frac{b}{۲a})$ است.

و چنان‌چه $a<۰$، سهمی ماکزیمم دارد که به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ رخ می‌دهد و مقدار آن برابر $f(-\frac{b}{۲a})$ است.

مثال **مقدار ماکزیمم یا مینیمم سهمی‌های زیر را به دست آورید.**

الف) $f(x)=x^۲-۶x-۵$ **ب) $f(x)=-۲x^۲-۸x+۱۱$**

پاسخ: الف) چون $a=۱>۰$، پس این سهمی مینیمم دارد که به ازای $x=-\frac{b}{۲a}=۳$ رخ می‌دهد و برابر است با:

$$f(۳)=۹-۱۸-۵=-۱۴$$

ب) چون $a=-۲<۰$، پس این سهمی ماکزیمم دارد که به ازای $x=-\frac{b}{۲a}=-۲$ رخ می‌دهد و مقدار آن برابر است با:

$$f(-۲)=-۸+۱۶+۱۱=۱۹$$

بهینه‌سازی

گاهی اوقات شرایطی بر مسئله حاکم می‌شود که تحت آن شرایط می‌توان مقدار کمیتی را ماکزیمم یا مینیمم نمود. به این عمل، بهینه‌سازی می‌گویند.

فرایند حل مسائل بهینه‌سازی

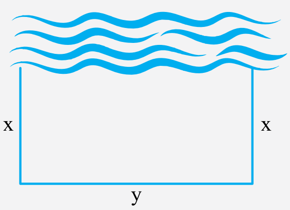
۱ در صورت لزوم شکلی برای مسئله رسم می‌کنیم.

۲ کمیتی که خواسته می‌شود که ماکزیمم یا مینیمم شود را به صورت معادله‌ای از متغیرها می‌نویسیم. به این معادله، معادلهٔ هدف می‌گوییم.

۳) اگر معادلهٔ هدف بیشتر از یک متغیر داشت، به کمک روابطی که بین متغیرها وجود دارد، سعی می‌کنیم معادلهٔ هدف را به یک معادلهٔ یک متغیرهٔ درجه‌دوم تبدیل کنیم.

۴) ماکزیمم یا مینیمم معادلهٔ هدف که به صورت یک معادلهٔ درجه‌دوم درآمده است را می‌یابیم.

مثال **می‌خواهیم به کمک ۴۰ متر طناب، زمین مستطیل‌شکلی را در کنار رودخانه محصور کنیم به طوری که حداکثر مساحت ممکن را داشته باشد. طول و عرض زمین را بیابید. (توجه کنید که در سمت رودخانه طناب نمی‌کشیم.)**



✓ **پاسخ:** شکلی برای مسئله رسم کرده و طول و عرض مستطیل را نام‌گذاری می‌کنیم.

قرار است مساحت مستطیل ماکزیمم شود؛ پس:

معادلهٔ هدف: $S = xy \quad (1)$

این معادله دو متغیر دارد. باید کاری کنیم این معادله، یک معادلهٔ درجه‌دوم یک‌متغیره شود. با توجه به شکل داریم:

$$y + 2x = 40 \Rightarrow y = 40 - 2x \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow S = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2$$

$$\Rightarrow S = -2x^2 + 40x$$

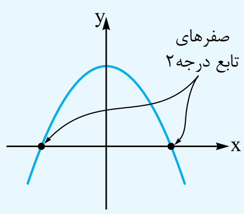
چون $a = -2 < 0$، پس S دارای ماکزیمم است که به ازای $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-40}{-4} = 10$ رخ می‌دهد. همچنین داریم:

$$y = 40 - 2x \xrightarrow{x=10} 40 - 20 \Rightarrow y = 20$$

پس ابعاد زمین مستطیل‌شکل باید به صورت 10×20 باشد.

صفرهای تابع درجه ۲

به طور کلی نقاط برخورد نمودار یک تابع مانند f با محور xها را صفرهای تابع می‌نامیم که در واقع ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = 0$ هستند؛ بنابراین صفرهای تابع درجه ۲، همان نقاط برخورد سهمی با محور xها است.



بحث در وجود و علامت صفرهای تابع درجه ۲

برای تشخیص وجود و علامت صفرهای تابع درجه ۲، می‌توان از علامت Δ، S و P استفاده نمود.

مثال **در مورد وجود و علامت صفرهای تابع $f(x) = 2x^2 - \sqrt{13}x + 1$ بحث کنید.**

✓ **پاسخ:**

$\Delta = 13 - 8 > 0 \Rightarrow$ معادلهٔ $f(x) = 0$ دارای دو ریشهٔ متمایز است.

$P = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ ریشه‌ها هم‌علامت‌اند.

$S = -\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2} > 0 \Rightarrow$ هر دو ریشه مثبت‌اند.

علامت ضرایب تابع درجه ۲

اگر نمودار تابع درجه‌دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ را داشته باشیم، در این صورت:

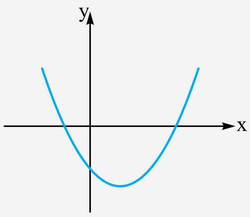
الف) اگر دهانهٔ سهمی رو به بالا باشد، $a > 0$ و اگر دهانهٔ سهمی رو به پایین باشد، $a < 0$ خواهد بود.

ب) c همان محل برخورد سهمی با محور yها است.

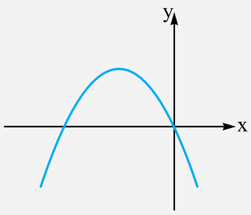
پ) شیب نمودار در محل تلاقی سهمی با محور yها، همان b است.

مثال **علامت a، b و c را در هر یک از سهمی‌های زیر بیابید.**

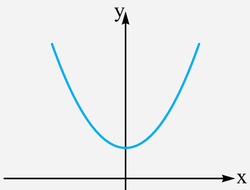
الف)



ب)



پ)



✓ **پاسخ:** الف) سهمی رو به بالا است؛ پس $a > 0$. عرض از مبدأ سهمی (محل تلاقی سهمی با محور yها) منفی است؛ پس $c < 0$. همچنین شیب خط مماس بر سهمی در نقطهٔ تلاقی با محور yها منفی است؛ پس $b < 0$.

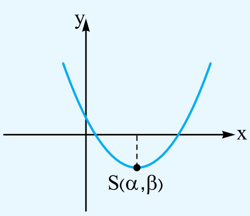
ب) سهمی رو به پایین است؛ پس $a < 0$. سهمی محور yها را در مبدأ قطع کرده است؛ پس $c = 0$. همچنین شیب خط مماس در محل تلاقی سهمی با محور yها (در این‌جا مبدأ) منفی است؛ پس $b < 0$.

پ) سهمی رو به بالا است؛ پس $a > 0$. عرض از مبدأ سهمی مثبت است؛ پس $c > 0$. شیب خط مماس در محل تلاقی سهمی با محور yها صفر است؛ پس $b = 0$.

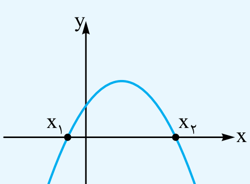
نوشتن ضابطهٔ سهمی به کمک نمودار آن

برای نوشتن معادله یا ضابطهٔ سهمی، با توجه به نمودار آن به فراخور به یکی از روش‌های زیر عمل می‌کنیم:

الف) اگر مختصات رأس سهمی معلوم و برابر $S(\alpha, \beta)$ باشد، از معادلهٔ $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ استفاده می‌کنیم.

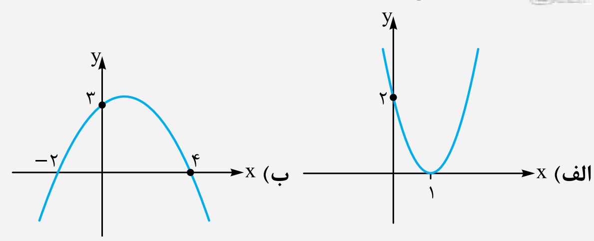


ب) اگر صفرهای تابع درجه ۲ معلوم و برابر x_1 و x_2 باشد، از معادلهٔ $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ استفاده می‌کنیم.



پ) اگر هیچ‌کدام از حالت‌های الف و ب رخ ندهد، از معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ استفاده می‌کنیم.

مثال معادلهٔ سهمی‌های زیر را بنویسید.



پاسخ: الف) چون مختصات رأس سهمی معلوم و به صورت $S(1,0)$ است، از معادلهٔ $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ استفاده می‌کنیم:

$$y=a(x-\alpha)^2+\beta \xrightarrow{\alpha=1,\beta=0} y=a(x-1)^2+0$$
$$\Rightarrow y=a(x-1)^2$$

نقطهٔ $(0,2)$ روی سهمی قرار دارد؛ پس در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند:

$$2=a(-1)^2 \Rightarrow a=2 \Rightarrow \text{معادلهٔ سهمی}: y=2(x-1)^2$$

ب) چون صفرهای تابع درجه۲ داده‌شده از رابطهٔ $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ استفاده می‌کنیم:

$$y=a(x-x_1)(x-x_2) \xrightarrow{x_1=-2,x_2=4} y=a(x+2)(x-4)$$

سهمی از نقطهٔ $(0,3)$ عبور کرده است؛ پس:

$$3=a(0+2)(0-4) \Rightarrow 3=-8a \Rightarrow a=-\frac{3}{8}$$
$$\Rightarrow \text{معادلهٔ سهمی}: y=-\frac{3}{8}(x+2)(x-4)$$

پاسخ سؤالات

۹۷. نادرست؛ زیرا: $x=-\frac{b}{2a}=2 \Rightarrow f(2)=4-8+1=-3$

۹۸. درست؛ زیرا: $\Delta>0 \Rightarrow$ معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

$P=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}>0 \Rightarrow$ ریشه‌ها هم‌علامت‌اند.

$S=-\frac{b}{a}=-\frac{5}{2}<0 \Rightarrow$ هر دو ریشه منفی‌اند.

۹۹. نادرست؛ زیرا شیب خط مماس بر نمودار در محل تلاقی سهمی با محور yها منفی است؛ پس باید $b<0$.

۱۰۰. ماکزیمم، $x=-\frac{b}{2a}=-1$ ، $f(-1)=11$

۱۰۱. محل برخورد نمودار با محور yها

۱۰۲. $f(x)=0$

۱۰۳. منفی ـ مثبت ـ مثبت

۱۰۴. چون $a=1>0$، پس این تابع مینیمم دارد که به ازای $x=-\frac{b}{2a}=\frac{4}{2}=2$ اتفاق می‌افتد و مقدار آن برابر است با: $f(2)=4-8+10=6$

۱۰۵. می‌توان نوشت:

$$f(x)=-(x+2)^2+4=-x^2-4x-4+4=-x^2-4x$$

چون $a=-1<0$، پس این تابع ماکزیمم دارد که به ازای $x=-\frac{b}{2a}=-2$ اتفاق می‌افتد و مقدار آن برابر است با: $f(-2)=-4+8=4$

۱۰۶. می‌توان نوشت: $f(x)=(x+1)(4-2x)+1$

$$=4x-2x^2+4-2x+1=-2x^2+2x+5$$

چون $a=-2<0$، پس این تابع ماکزیمم دارد. $x=-\frac{b}{2a}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \text{مقدار ماکزیمم}: f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}+1+5=\frac{11}{2}$$

۱۰۷. می‌توان نوشت: $f(x)=4x^2+4x+1-x^2+2x-1=3x^2+6x$

چون $a=3>0$، پس این تابع مینیمم دارد.

$$x=-\frac{b}{2a}=-1 \Rightarrow \text{مقدار مینیمم}=f(-1)=-3$$

۱۰۸. طول نقطهٔ ماکزیمم سهمی برابر است با: $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2m}=-\frac{2}{m}$

طبق فرض، باید مقدار y به ازای $x=-\frac{2}{m}$ برابر ۳ باشد:

$$y(-\frac{2}{m})=3 \Rightarrow m(-\frac{2}{m})^2+4(-\frac{2}{m})+m+\cancel{3}=\cancel{3}$$
$$\Rightarrow \frac{4}{m}-\frac{8}{m}+m=0 \xrightarrow{\times m} 4-8+m^2=0 \Rightarrow m^2=4$$
$$\Rightarrow m=\pm 2$$

طبق فرض، سهمی دارای ماکزیمم است؛ پس باید ضریب x^2 منفی باشد. در نتیجه $m=-2$ را می‌پذیریم.

۱۰۹. الف) حداکثر ارتفاع توپ به ازای $x=-\frac{b}{2a}=\frac{-1}{-\frac{1}{20}}=20$ رخ می‌دهد و برابر است با:

$$y(20)=-\frac{1}{40}(20)^2+20=-\frac{400}{40}+20=-10+20=10\,m$$

ب) باید ببینیم توپ بعد از طی چه مسافتی به زمین برخورد می‌کند:

$$y=0 \Rightarrow -\frac{1}{40}x^2+x=0 \Rightarrow x(-\frac{1}{40}x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=40\end{cases}$$

بدیهی است که $x=0$، زمانی است که توپ توسط فوتبالیست شوت می‌شود و بنابراین $40\,m$ توپ به صورت افقی در هوا طی می‌کند.

۱۱۰. الف) $t=-\frac{b}{2a}=\frac{-100}{2(-5)}=\frac{-100}{-10}=10\,s$

بنابراین پس از $t=10$ ثانیه، موشک به بالاترین ارتفاع ممکن می‌رسد.

ب) ارتفاع نقطهٔ اوج برابر است با:

$$h(10)=100\times 10-5(10)^2=1000-500=500\,m$$

پ) در لحظهٔ برخورد موشک به زمین، ارتفاع برابر صفر است؛ پس:

$$h(t)=0 \Rightarrow 100t-5t^2=0 \Rightarrow 5t(20-t)=0$$
$$\Rightarrow t=0 \text{ یا } t=20$$

واضح است که $t=0$، همان لحظهٔ پرتاب موشک است و در نتیجه پس از $t=20$ ثانیه بعد از پرتاب آن، موشک به زمین برمی‌گردد.

۱۱۱. دو عدد را x و y می‌گیریم. قرار است حاصل‌ضرب دو عدد حداکثر مقدار ممکن باشد؛ پس: معادلهٔ هدف $A=xy \quad (1)$

حال باید A را برحسب یک متغیر بنویسیم. از رابطهٔ فرض داریم:

$$2x+y=12 \Rightarrow y=12-2x \quad (2)$$

در نتیجه: $(1),(2) \Rightarrow A=x(12-2x) \Rightarrow A=-2x^2+12x$

چون $a<0$، پس A دارای ماکزیمم است که به ازای $x=-\frac{b}{2a}=3$ رخ می‌دهد؛ بنابراین: $y=12-2x \xrightarrow{x=3} y=12-6 \Rightarrow y=6$

پس $x=3$ و $y=6$ دو عدد مطلوب هستند.

۱۱۲. کمیتی که قرار است ماکزیمم شود، مساحت مستطیل است؛ پس:

معادلهٔ هدف: $S=xy \quad (1)$

از طرفی داریم: معادلهٔ کمکی: $۲x+y=۱۰۰ \Rightarrow y=۱۰۰-۲x \quad (۲)$

$$(۱),(۲) \Rightarrow S=x(۱۰۰-۲x)=۱۰۰x-۲x^{۲}$$

$$\Rightarrow S=-۲x^{۲}+۱۰۰x$$

چون $a=-۲<۰$، پس S دارای ماکزیمم است که به ازای $x=-\frac{b}{۲a}=\frac{۱۰۰}{۴}=۲۵$ به دست می‌آید.

همچنین: $y=۱۰۰-۲x \xrightarrow{x=۲۵} ۱۰۰-۲\times۲۵ \Rightarrow y=۵۰$

۱۱۳. با توجه به شکل می‌توان نوشت: $۴ =$ محیط پنجره $\Rightarrow ۳x+۲y=۴$

$$\Rightarrow ۲y=۴-۳x \Rightarrow y=۲-\frac{۳}{۲}x \quad (۱)$$

برای آن که پنجره بیشترین نوردهی را داشته باشد، لازم است بیشترین مساحت را دارا باشد. پنجره از یک مستطیل به ابعاد x و y و یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع x تشکیل شده است. می‌دانیم مساحت مثلث از رابطهٔ $S=\frac{۱}{۲}ab\sin\theta$ به دست می‌آید؛ بنابراین:

$$\text{مساحت پنجره}: S=S_{\text{مثلث}}+S_{\text{مستطیل}}=\frac{۱}{۲}x.x\sin۶۰^{\circ}+xy$$

$$=\frac{۱}{۲}x^{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}+xy \Rightarrow S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^{۲}+xy \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^{۲}+x(۲-\frac{۳}{۲}x)=\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^{۲}+۲x-\frac{۳}{۲}x^{۲}$$

$$=(\frac{\sqrt{۳}}{۴}-\frac{۳}{۲})x^{۲}+۲x \Rightarrow S=\frac{\sqrt{۳}-۶}{۴}x^{۲}+۲x$$

چون $a=\frac{\sqrt{۳}-۶}{۴}<۰$، پس S ماکزیمم دارد و به ازای $x=-\frac{b}{۲a}=\frac{-۲}{\frac{\sqrt{۳}-۶}{۲}}=\frac{۴}{۶-\sqrt{۳}}\simeq ۰/۹۴\,m$ اتفاق می‌افتد. در نتیجه:

$$y=۲-\frac{۳}{۲}x\simeq ۲-\frac{۳}{۲}(۰/۹۴)=۰/۵۹\,m$$

۱۱۴. الف) قرار است مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد؛ پس:

معادلهٔ هدف: $S=xy \quad (۱)$

از طرفی محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر است؛ پس:

$$۲y+۲(\text{محیط نیم‌دایره})=۱۵۰۰ \Rightarrow ۲y+۲(\frac{۱}{۲}\times۲\pi\frac{x}{۲})=۱۵۰۰$$

$$\Rightarrow ۲y+\pi x=۱۵۰۰ \Rightarrow y=۷۵۰-\frac{\pi}{۲}x \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow S=x(۷۵۰-\frac{\pi}{۲}x)=۷۵۰x-\frac{\pi}{۲}x^{۲}$$

$$\Rightarrow S=-\frac{\pi}{۲}x^{۲}+۷۵۰x$$

چون $a=-\frac{\pi}{۲}<۰$، پس S دارای ماکزیمم است که به ازای $x=-\frac{b}{۲a}=\frac{۷۵۰}{\pi}$ رخ می‌دهد. همچنین:

$$y=۷۵۰-\frac{\pi}{۲}x=۷۵۰-\frac{\pi}{۲}(\frac{۷۵۰}{\pi})=۳۷۵\,m$$

پس وقتی طول و عرض مستطیل برابر $x=\frac{۷۵۰}{\pi}m$ و $y=۳۷۵\,m$ باشد، مساحت مستطیل ماکزیمم می‌شود.

ب) قرار است مساحت استادیوم ماکزیمم شود؛ پس:

معادلهٔ هدف: $S=S_{\text{مستطیل}}+S_{\text{دو نیم‌دایره}}$

$$\Rightarrow S=xy+۲(\frac{۱}{۲}\pi(\frac{x}{۲})^{۲})=xy+\frac{\pi x^{۲}}{۴}$$

از طرفی با توجه به قسمت (الف) به دست آوردیم $y=۷۵۰-\frac{\pi}{۲}x$ ؛ پس:

$$S=x(۷۵۰-\frac{\pi}{۲}x)+\frac{\pi}{۴}x^{۲}=۷۵۰x-\frac{\pi}{۲}x^{۲}+\frac{\pi}{۴}x^{۲}$$

$$\Rightarrow S=-\frac{\pi}{۴}x^{۲}+۷۵۰x$$

چون $a=-\frac{\pi}{۴}<۰$، پس S دارای ماکزیمم است که به ازای $x=-\frac{b}{۲a}=\frac{۷۵۰}{\frac{\pi}{۲}}=\frac{۱۵۰۰}{\pi}$ رخ می‌دهد؛ بنابراین:

$$x=\frac{۱۵۰۰}{\pi},\ y=۷۵۰-\frac{\pi}{۲}x=۷۵۰-\frac{\cancel{\pi}}{۲}(\frac{۱۵۰۰}{\cancel{\pi}})=۰$$

توجه کنید که در حالتی که طول مستطیل استادیوم صفر شود؛ یعنی استادیوم یک دایره به شعاع $\frac{x}{۲}=\frac{۷۵۰}{\pi}$ باشد، مساحت استادیوم ماکزیمم می‌شود.

۱۱۵.

معادلهٔ $f(x)=۰$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد. $\Delta=۳۶-۲۸=۸>۰ \Rightarrow$

ریشه‌ها هم‌علامت‌اند. $P=\frac{c}{a}=\frac{۷}{۱}>۰ \Rightarrow$

هر دو ریشه منفی‌اند. $S=-\frac{b}{a}=-۶<۰ \Rightarrow$

۱۱۶.

معادلهٔ $f(x)=۰$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد. $\Delta=۴۹+۲۰=۶۹>۰ \Rightarrow$

ریشه‌ها مختلف‌العلامه هستند. $P=\frac{c}{a}=-\frac{۱}{۵}<۰ \Rightarrow$

ریشهٔ منفی از نظر اندازه، بزرگ‌تر از ریشهٔ مثبت است. $S=-\frac{b}{a}=-\frac{۷}{۵}<۰ \Rightarrow$

۱۱۷. معادلهٔ $f(x)=۰$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد. $\Delta=۱+۷۲=۷۳>۰ \Rightarrow$

ریشه‌ها مختلف‌العلامه‌اند. $P=\frac{c}{a}=\frac{۶}{-۳}=-۲<۰ \Rightarrow$

ریشهٔ مثبت از نظر اندازه، بزرگ‌تر از ریشهٔ منفی است. $S=-\frac{b}{a}=\frac{۱}{۳}>۰ \Rightarrow$

۱۱۸. معادلهٔ ریشهٔ حقیقی ندارد. $\Delta=۱-۴۸<۰ \Rightarrow$

۱۱۹. سهمی رو به بالاست؛ پس $a>۰$.

عرض از مبدأ سهمی مثبت است؛ پس $c>۰$.

شیب خط مماس بر سهمی در نقطهٔ تلاقی با محور yها، منفی است؛ پس $b<۰$.

سهمی محور xها را در دو نقطه قطع کرده است؛ لذا معادلهٔ $f(x)=۰$ دو ریشه دارد.

۱۲۰. سهمی رو به پایین است؛ پس $a<۰$.

عرض از مبدأ سهمی منفی است؛ پس $c<۰$.

شیب خط مماس بر سهمی در نقطهٔ تلاقی با محور yها منفی است؛ پس $b<۰$.

سهمی محور xها را در یک نقطه قطع کرده است؛ پس معادلهٔ $f(x)=۰$ یک ریشهٔ مضاعف دارد.

۱۲۱. سهمی رو به بالا است؛ پس $a>۰$.

عرض از مبدأ سهمی صفر است؛ پس $c=۰$.

شیب خط مماس بر سهمی در نقطهٔ تلاقی با محور yها مثبت است؛ پس $b>۰$.

سهمی محور xها را در دو نقطه قطع کرده است؛ پس معادلهٔ $f(x)=۰$ دو ریشه دارد.

۱۲۲. سهمی رو به پایین است؛ پس $a<۰$.

عرض از مبدأ سهمی مثبت است؛ پس $c>۰$.

شیب خط مماس بر سهمی در نقطهٔ تلاقی با محور yها، صفر است؛ پس $b=۰$.

سهمی محور xها را در دو نقطه قطع کرده است؛ پس معادلهٔ $f(x)=0$ دو ریشه دارد.

۱۲۳. سهمی رو به بالا است؛ پس $a>0$.

عرض از مبدأ سهمی مثبت است؛ پس $c>0$.

شیب خط مماس بر نمودار در نقطهٔ تلاقی با محور yها مثبت است؛ پس $b>0$.

سهمی محور xها را قطع نمی‌کند؛ پس $f(x)=0$ ریشه ندارد.

۱۲۴. سهمی رو به پایین است؛ پس $a<0$.

عرض از مبدأ سهمی صفر است؛ پس $c=0$.

شیب خط مماس بر سهمی در نقطهٔ تلاقی با محور yها صفر است؛ پس $b=0$.

سهمی محور xها را در یک نقطه قطع می‌کند؛ پس $f(x)=0$ یک ریشهٔ مضاعف دارد.

۱۲۵. سهمی رو به پایین است؛ پس $a<0$.

عرض از مبدأ سهمی مثبت است؛ پس $c>0$.

شیب خط مماس بر نمودار در نقطهٔ تلاقی با محور yها منفی است؛ پس $b<0$.

سهمی محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند؛ پس $f(x)=0$ دو ریشه دارد.

۱۲۶. سهمی رو به بالا است؛ پس $a>0$.

عرض از مبدأ سهمی مثبت است؛ پس $c>0$.

شیب خط مماس بر نمودار در نقطهٔ تلاقی با محور yها مثبت است؛ پس $b>0$.

سهمی محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند؛ پس $f(x)=0$ دو ریشه دارد.

پاسخ سؤالات

۹۶۳. درست

۹۶۴. صفر

۹۶۵. توان دوم

۹۶۶. مجذور همان مقدار ثابت

۹۶۷. ضریب تغییرات

۹۶۸. چارک اول، چارک سوم

۹۶۹. چارک دوم

۹۷۰. $R = \max - \min = ۲۰ - ۴ = ۱۶$

۹۷۱. m یا بزرگ‌ترین داده است یا کوچک‌ترین داده.

حالت اول: اگر m بزرگ‌ترین داده باشد، داریم:

$$R = \max - \min \Rightarrow ۳۰ = m - ۵ \Rightarrow m = ۳۵$$

حالت دوم: اگر m کوچک‌ترین داده باشد، داریم:

$$R = \max - \min \Rightarrow ۳۰ = ۲۵ - m \Rightarrow m = -۵$$

۹۷۲.

$$\bar{x} = \frac{۰+۵+۳+۱+۱+۲}{۶} = \frac{۱۲}{۶} = ۲$$

$$\sigma^۲ = \frac{(۰-۲)^۲+(۵-۲)^۲+(۳-۲)^۲+(۱-۲)^۲+(۱-۲)^۲+(۲-۲)^۲}{۶}$$

$$= \frac{۴+۹+۱+۱+۱+۰}{۶} = \frac{۱۶}{۶} = \frac{۸}{۳}$$

۹۷۳. ابتدا میانگین داده‌ها را می‌یابیم:

$$\bar{x} = \frac{۲۰+(-۷)+(-۱۵)+۳۱+۱۶}{۵} = \frac{۴۵}{۵} = ۹$$

حال میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین را که همان واریانس است، به دست می‌آوریم:

$$\sigma^۲ = \frac{(۲۰-۹)^۲+(-۷-۹)^۲+(-۱۵-۹)^۲+(۳۱-۹)^۲+(۱۶-۹)^۲}{۵}$$

$$= \frac{۱۲۱+۲۵۶+۵۷۶+۴۸۴+۴۹}{۵} \Rightarrow \sigma^۲ = \frac{۱۴۸۶}{۵} = ۲۹۷/۲$$

۹۷۴. می‌دانیم همواره برای هر مجموعه‌ای از داده‌ها، مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر صفر می‌شود؛ پس داریم:

$$-۳+(-۱)+۲+a+۶ = ۰ \Rightarrow ۴+a = ۰ \Rightarrow a = -۴$$

واریانس داده‌ها برابر است با میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین آن‌ها؛ پس:

$$\sigma^2=\frac{(-3)^2+(-1)^2+2^2+(-4)^2+6^2}{5}$$

$$=\frac{9+1+4+16+36}{5}=\frac{66}{5}=13/2$$

۹۷۵. اگر $x_1, x_2, \dots$ و x_8 داده‌های مفروض با میانگین ۱۲ باشند، طبق فرض داریم:

$$\frac{(x_1-12)^2+(x_2-12)^2+\cdots+(x_8-12)^2}{8}=5$$

$$\Rightarrow (x_1-12)^2+(x_2-12)^2+\cdots+(x_8-12)^2=40$$

از آن‌جایی که میانگین دو عدد ۸ و ۱۶ نیز برابر ۱۲ است؛ پس میانگین داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_8$، ۸ و ۱۶ برابر ۱۲ خواهد بود، داریم:

$$\sigma^2=\frac{(x_1-12)^2+(x_2-12)^2+\cdots+(x_8-12)^2+(8-12)^2+(16-12)^2}{10}$$

$$=\frac{40+16+16}{10}=\frac{72}{10}=7/2$$

۹۷۶. فرض کنیم واریانس داده‌های $x_1, \dots$ و x_N برابر σ_x^2 و $\bar{x}$ میانگین آن‌ها باشد؛ پس:

$$\sigma_x^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_N-\bar{x})^2}{N}$$

می‌دانیم که اگر همهٔ داده‌ها با مقدار ثابت b جمع شوند، میانگین آن‌ها برابر $\bar{x}+b$ می‌شود و واریانس آن‌ها برابر است با:

$$\sigma_{x+b}^2=\frac{((x_1+b)-(\bar{x}+b))^2+\cdots+((x_N+b)-(\bar{x}+b))^2}{N}$$

$$=\frac{(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_N-\bar{x})^2}{N}=\sigma^2 x$$

۹۷۷. فرض کنیم واریانس و میانگین داده‌های $x_1, \dots$ و x_N به ترتیب برابر σ_x^2 و $\bar{x}$ باشد؛ پس:

$$\sigma_x^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_N-\bar{x})^2}{N}$$

می‌دانیم که اگر همهٔ داده‌ها در مقدار ثابت a ضرب شوند، میانگین آن‌ها $a\bar{x}$ می‌شود و واریانس آن‌ها برابر است با:

$$\sigma_{ax}^2=\frac{(ax_1-a\bar{x})^2+\cdots+(ax_N-a\bar{x})^2}{N}$$

$$=\frac{a^2(x_1-\bar{x})^2+\cdots+a^2(x_N-\bar{x})^2}{N}$$

$$=a^2\times\frac{(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_N-\bar{x})^2}{N}=a^2\sigma_x^2$$

۹۷۸. می‌دانیم $F=\frac{9}{5}C+32$

میانگین، مانند داده‌ها تغییر می‌کند؛ پس: $\bar{F}=\overline{\frac{9}{5}C+32}=\frac{9}{5}\bar{C}+32$

(فارنهایت) $=\frac{9}{5}\times 28+32=50/4+32=82/4$

اگر داده‌ها با عدد ثابتی جمع شوند، واریانس تغییر نمی‌کند، ولی اگر داده‌ها در یک عدد ثابتی ضرب شوند، واریانس در مجذور آن عدد ثابت ضرب می‌شود؛ پس در این‌جا که داده‌ها در $\frac{9}{5}$ ضرب شده‌اند، واریانس در $(\frac{9}{5})^2$ ضرب می‌شود و عدد ۳۲ تأثیری روی واریانس ندارد. به عبارت دیگر:

جدید $\sigma_F^2=(\frac{9}{5})^2\times 6=\frac{81}{25}\times 6=3/24\times 6=19/44$

۹۷۹. فرض کنیم $x_1, x_2, \dots$ و x_N قیمت‌های مواد غذایی باشد که واریانس آن‌ها $\sigma_x^2=20$ است.

وقتی در یک سال قیمت‌ها ۳۰ درصد افزایش می‌یابد، قیمت‌ها ۱/۳ برابر می‌شوند، یعنی قیمت‌های جدید مواد غذایی به صورت $1/3x_1, 1/3x_2, \dots$ و $1/3x_N$ خواهند بود. در واقع داده‌ها در ۱/۳ ضرب شده‌اند، در نتیجه واریانس داده‌ها در $(1/3)^2$ ضرب می‌شوند، یعنی داریم:

$$\sigma_{1/3x}^2=(1/3)^2\sigma_x^2=1/69\times 20=33/8$$

۹۸۰.

$$\bar{x}=\frac{15+20+25+30+35}{5}=\frac{125}{5}=25$$

$$\sigma^2=\frac{(15-25)^2+(20-25)^2+(25-25)^2+(30-25)^2+(35-25)^2}{5}$$

$$=\frac{100+25+0+25+100}{5}=\frac{250}{5}=50\Rightarrow \sigma=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

۹۸۱.

$$\bar{x}=\frac{2+4+3+1+6+8}{6}=\frac{24}{6}=4$$

$$\sigma^2=\frac{(2-4)^2+(4-4)^2+(3-4)^2+(1-4)^2+(6-4)^2+(8-4)^2}{6}$$

$$=\frac{4+0+1+9+4+16}{6}=\frac{34}{6}\Rightarrow \sigma=\sqrt{\frac{34}{6}}$$

۹۸۲.

$$\bar{x}=\frac{8+12+6+14}{4}=\frac{40}{4}=10$$

$$\sigma^2=\frac{(8-10)^2+(12-10)^2+(6-10)^2+(14-10)^2}{4}$$

$$=\frac{4+4+16+16}{4}=\frac{40}{4}=10\Rightarrow \sigma=\sqrt{10}\Rightarrow CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

۹۸۳.

$$\bar{x}=\frac{15+11+17+13+19}{5}=\frac{75}{5}=15$$

$$\sigma^2=\frac{(15-15)^2+(11-15)^2+(17-15)^2+(13-15)^2+(19-15)^2}{5}$$

$$=\frac{0+16+4+4+16}{5}=\frac{40}{5}=8\Rightarrow \sigma=\sqrt{8}$$

$$\Rightarrow CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{8}}{15}$$

۹۸۴. فرض کنیم میانگین و انحراف معیار سن دانش‌آموزان کلاس به ترتیب $\bar{x}$ و σ باشد و لذا ضریب تغییرات برابر $CV_1=\frac{\sigma}{\bar{x}}$ است. بعد از ۵ سال، به سن هر کدام از دانش‌آموزان ۵ سال اضافه می‌شود. در واقع همهٔ داده‌ها با مقدار ثابت ۵ جمع می‌شود؛ پس میانگین و انحراف معیار سن دانش‌آموزان بعد از ۵ سال به ترتیب برابر $\bar{x}+5$ و σ خواهد بود و لذا ضریب تغییرات سن آن‌ها برابر $CV_2=\frac{\sigma}{\bar{x}+5}$ است.

چون در CV_2، مخرج کسر از CV_1 بزرگ‌تر است؛ پس $CV_2<CV_1$، یعنی ۵ سال دیگر، ضریب تغییرات سن دانش‌آموزان این کلاس کوچک‌تر می‌شود.

۹۸۵. ضریب تغییرات را برای دو شرکت محاسبه کرده و آن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\bar{x}_1=\frac{8+12}{2}=10$$

$$\sigma_1^2=\frac{(8-10)^2+(12-10)^2}{2}=\frac{4+4}{2}=\frac{8}{2}\Rightarrow \sigma_1^2=4$$

$$\Rightarrow \sigma_1=2\Rightarrow CV_1=\frac{\sigma_1}{\bar{x}_1}=\frac{2}{10}=0/2$$

$$\bar{x}_۲=\frac{۱۳+۱۸}{۲}=\frac{۳۱}{۲}=۱۵/۵$$

$$\sigma_۲^۲=\frac{(۱۳-۱۵/۵)^۲+(۱۸-۱۵/۵)^۲}{۲}=\frac{۶/۲۵+۶/۲۵}{۲}$$

$$=\frac{۱۲/۵}{۲}=۶/۲۵\Rightarrow \sigma_۲=\sqrt{۶/۲۵}=۲/۵$$

$$CV_۲=\frac{\sigma_۲}{\bar{x}_۲}=\frac{۲/۵}{۱۵/۵}=\frac{۲۵}{۱۵۵}=\frac{۵}{۳۱}\simeq ۰/۱۶$$

چون $CV_۲<CV_۱$؛ پس بی‌عدالتی در شرکت A در پرداخت حقوق بین کارمندان بیشتر از شرکت B می‌باشد.

۹۸۶ الف) $\bar{x}_۱=\frac{۷+۹+۸+۹+۷}{۵}=\frac{۴۰}{۵}=۸$

$$۷,۷,\boxed{۸},۹,۹\Rightarrow \text{میانه}=Q_۲=۸$$

$$\bar{x}_۲=\frac{۱۰+۸+۶+۷+۹}{۵}=\frac{۴۰}{۵}=۸$$

$$۶,۷,\boxed{۸},۹,۱۰\Rightarrow \text{میانه}=Q_۲=۸$$

میانگین و میانهٔ پول توجیبی دوستان مریم و مینا برابرند.

ب) $\sigma_۱^۲=\frac{(۷-۸)^۲+(۹-۸)^۲+(۸-۸)^۲+(۹-۸)^۲+(۷-۸)^۲}{۵}$

$$=\frac{۱+۱+۰+۱+۱}{۵}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow \sigma_۱=\sqrt{\frac{۴}{۵}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

$$\sigma_۲^۲=\frac{(۱۰-۸)^۲+(۸-۸)^۲+(۶-۸)^۲+(۷-۸)^۲+(۹-۸)^۲}{۵}$$

$$=\frac{۴+۰+۴+۱+۱}{۵}=\frac{۱۰}{۵}=۲\Rightarrow \sigma_۲=\sqrt{۲}$$

پ) $CV_۱=\frac{\sigma_۱}{\bar{x}_۱}=\frac{\frac{۲}{\sqrt{۵}}}{۸}$ و $CV_۲=\frac{\sigma_۲}{\bar{x}_۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۸}$

چون $CV_۱<CV_۲$؛ پس برنامه‌ریزی برای یک سفر یک‌روزه با دوستان مینا ساده‌تر است. در واقع پول توجیبی دوستان مینا به همدیگر نزدیک‌ترند.

۹۸۷ عملکرد گروهی بهتر است که ضریب تغییرات نمرات مسئولیت‌پذیری آن کوچک‌تر باشد:

گروه اول: $\bar{x}_۱=۸۰,\sigma_۱^۲=۲۵\Rightarrow \sigma_۱=۵$

$$\Rightarrow CV_۱=\frac{\sigma_۱}{\bar{x}_۱}=\frac{۵}{۸۰}=\frac{۱}{۱۶}$$

گروه دوم: $\bar{x}_۲=۷۲,\sigma_۲^۲=۱۶\Rightarrow \sigma_۲=۴$

$$\Rightarrow CV_۲=\frac{\sigma_۲}{\bar{x}_۲}=\frac{۴}{۷۲}=\frac{۱}{۱۸}$$

چون $CV_۲<CV_۱$؛ پس عملکرد گروه دوم بهتر است.

۹۸۸ ابتدا میانگین و انحراف معیار داده‌های اولیه یعنی $x_i=۱,۲,۳,۴,۵$ را می‌یابیم.

$$\bar{x}=\frac{۱+۲+۳+۴+۵}{۵}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

$$\sigma^۲=\frac{(۱-۳)^۲+(۲-۳)^۲+(۳-۳)^۲+(۴-۳)^۲+(۵-۳)^۲}{۵}$$

$$=\frac{۴+۱+۰+۱+۴}{۵}=\frac{۱۰}{۵}=۲\Rightarrow \sigma=\sqrt{۲}$$

همهٔ داده‌ها در ۱۲ ضرب و با ۶ جمع شده‌اند، میانگین مانند داده‌ها تغییر می‌کند:

$$\overline{۱۲x_i+۶}=۱۲\bar{x}+۶=۱۲\times۳+۶=۳۶+۶=۴۲$$

عدد ثابت که به داده‌ها اضافه شده، تأثیری روی انحراف معیار ندارد ولی چون داده‌ها در ۱۲ ضرب شده‌اند؛ پس انحراف معیار نیز در ۱۲ ضرب می‌شود:

$$\sigma_{۱۲x_i+۶}=۱۲\sigma_x=۱۲\sqrt{۲}$$

بنابراین ضریب تغییرات داده‌های جدید برابر است با:

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{۱۲\sqrt{۲}}{۴۲}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۷}$$

۹۸۹ وقتی یکی از شاخص‌های پراکندگی صفر باشند، داده‌ها با هم برابرند؛ پس در این مسئله نیز همهٔ داده‌ها با هم برابرند.

$$۳=۲a-۱=b-۲=c-۵\Rightarrow a=۲,b=۵,c=۸$$

باید ضریب تغییرات داده‌های ۸، ۵ و ۲ را بیابیم. $\bar{x}=\frac{۲+۵+۸}{۳}=\frac{۱۵}{۳}=۵$

$$\sigma^۲=\frac{(۲-۵)^۲+(۵-۵)^۲+(۸-۵)^۲}{۳}=\frac{۹+۰+۹}{۳}=\frac{۱۸}{۳}=۶$$

$$\Rightarrow \sigma=\sqrt{۶}\Rightarrow CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{۶}}{۵}$$

۹۹۰ داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۳,۶,۹,۱۱,۱۵,۱۶,۱۷,۱۹,۲۳,۲۵,۲۷

تعداد داده‌ها فرد است؛ پس دادهٔ وسط همان میانه است:

$$\text{میانه (چارک دوم)}=Q_۲=۱۶$$

میانهٔ داده‌های قبل از ۱۶ همان چارک اول است و میانهٔ داده‌های بعد از ۱۶ همان چارک سوم است، یعنی داریم:

$$\text{چارک اول}=Q_۱=۹ \quad ،\text{چارک سوم}=Q_۳=۲۳$$

۹۹۱ داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۵,۶,۸,۹,۹,۹,۱۳,۱۴,۱۵,۱۸

داریم: $\text{میانه (چارک دوم)}=Q_۲=۹$

$$\text{چارک اول}=Q_۱=\frac{۶+۸}{۲}=۷$$

$$\text{چارک سوم}=Q_۳=\frac{۱۴+۱۵}{۲}=۱۴/۵$$

۹۹۲ داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۷,۸,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۴,۱۵,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹

داریم: $\text{میانه (چارک دوم)}=Q_۲=\frac{۱۴+۱۴}{۲}=۱۴$

$$\text{چارک اول}=Q_۱=\frac{۱۰+۱۱}{۲}=۱۰/۵$$

$$\text{چارک سوم}=Q_۳=\frac{۱۶+۱۷}{۲}=۱۶/۵$$

۹۹۳ داده‌ها را مرتب کرده و چارک‌ها را می‌یابیم:

$$۱۱,۱۱,\underset{Q_۱=۱۳}{۱۲,۱۴},۱۴,\underset{Q_۲=۱۶/۵}{۱۶,۱۷},۱۷,\underset{Q_۳=۱۸}{۱۸,۱۸},۱۹,۲۰$$

داده‌های بزرگ‌تر از چارک اول و کوچک‌تر از چارک سوم عبارت‌اند از:

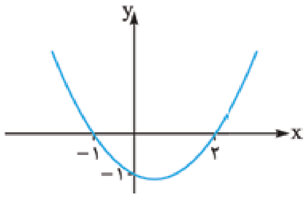
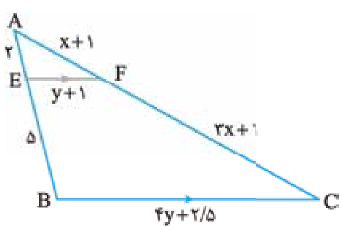
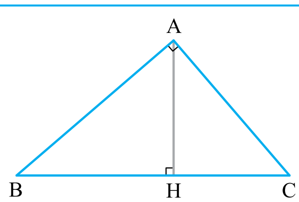
۱۴,۱۴,۱۶,۱۷,۱۷,۱۸

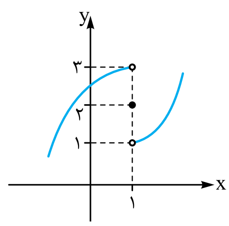
واریانس این داده‌ها را می‌یابیم:

$$\bar{x}=\frac{۱۴+۱۴+۱۶+۱۷+۱۷+۱۸}{۶}=\frac{۹۶}{۶}=۱۶$$

$$\sigma^۲=\frac{۲(۱۴-۱۶)^۲+(۱۶-۱۶)^۲+۲(۱۷-۱۶)^۲+(۱۸-۱۶)^۲}{۶}$$

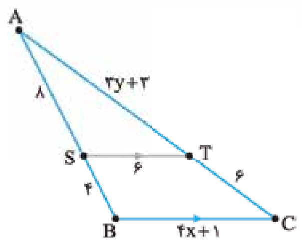
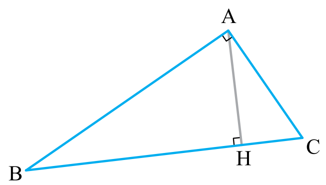
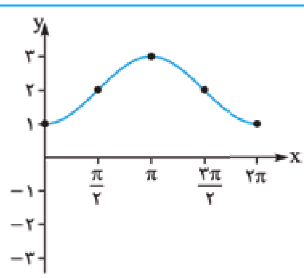
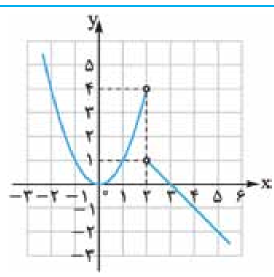
$$=\frac{۸+۰+۲+۴}{۶}=\frac{۱۴}{۶}=\frac{۷}{۳}$$

ردیف	امتحان نوبت اول (میان‌سال): ریاضی ۲ — امتحان شمارهٔ ۱	رشته: علوم تجربی — پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه	تاریخ امتحان: دی‌ماه — مدت امتحان: ۹۰ دقیقه	نمره
۱	درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید. الف) دو خط $x = ۲y + ۵$ و $y = ۲x - ۱$ بر هم عمودند. ب) مقدار ماکزیمم تابع $f(x) = ۳x^۲ + ۶x + ۵$ برابر ۲ است. پ) در استدلال استقرایی، همیشه از جزء به کل می‌رسیم. ت) هر تابع خطی یک‌به‌یک است			۱
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. الف) معادلهٔ درجه‌دومی که ریشه‌های آن $۱ + \sqrt{۵}$ و $\sqrt{۵} - ۱$ باشد، عبارت است از ………………… . ب) هر نقطه روی ………………… یک زاویه از دو ضلع آن زاویه ………………… است. پ) اگر $\frac{۲b+۳}{۳b+۶} = \frac{۲a+۱}{۳a+۲}$ باشد، نسبت $\frac{a}{b}$ برابر ………………… است. ت) $\frac{۳\pi}{۵}$ رادیان برابر ………………… درجه است.			۱/۲۵
۳	اگر $A(۰,۴)$، $B(-۲,۰)$ و $C(۶,۶)$ مختصات سه رأس مثلث ABC باشند، مطلوب است محاسبهٔ طول ارتفاع وارد بر ضلع BC.			۱/۵
۴	ابعاد مستطیلی را بیابید که مساحت آن $۲۴\ cm^۲$ و محیط آن برابر $۲۲\ cm$ باشد.			۱/۲۵
۵	معادلهٔ سهمی مقابل را بنویسید.  			۱
۶	معادلات زیر را حل کنید. الف) $\frac{۳x^۲+۳}{x^۲-۴} = \frac{۲x-۱}{x+۲} - \frac{۲x+۱}{x-۲}$ ب) $\sqrt{x+۱} - \sqrt{۲x-۵} = ۱$			۲
۷	روش رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیرواقع بر آن را به کمک خط‌کش و پرگار شرح دهید.			۱
۸	در شکل مقابل $EF \parallel BC$ است. x و y را به دست آورید.  			۲
۹	در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل مقابل داریم $AB = ۱۰\ cm$ و $AH = ۶\ cm$، اندازهٔ اضلاع BC و AC را به دست آورید.  			۱/۵
۱۰	تساوی دو تابع $f(x) = \frac{x^۲-۱۶}{x+۴}$ و $g(x) = x - ۴$ را بررسی کنید.			۱/۲۵
۱۱	نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲[x] - ۱$ را در بازهٔ $[-۱,۲]$ رسم کنید.			۱/۵
۱۲	ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = \frac{۲}{۳}x - ۵$ را به دست آورید.			۱
۱۳	اگر $f(x) = x^۲ + ۳x + ۲$ و $g(x) = \frac{x+۲}{x+۴}$ باشد، دامنه و ضابطهٔ تابع $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.			۲
۱۴	الف) زاویهٔ -۱۰۵° را به رادیان تبدیل کنید و آن را روی دایرهٔ مثلثاتی نمایش دهید. ب) اندازهٔ کمانی از یک دایره به شعاع $۱۰\ cm$ و مقابل به زاویهٔ مرکزی ۳۶° را حساب کنید.			۰/۷۵ ۱
	«موفق باشید»		جمع نمرات	۲۰

ردیف	سؤال	نمره
۷	نمودار تابع $y=۲-\sqrt{x-۱}$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را به دست آورید.	۱
۸	اگر $f(x)=\frac{۵x-۴}{۷}$، مطلوب است محاسبهٔ $f^{-۱}(۳)$.	۱
۹	اگر $\tan ۲۰^\circ \simeq ۰/۴$ باشد، مقدار عبارت $A=\frac{\sin(۲۵۰^\circ)-۲\sin(-۳۴۰^\circ)}{\cos(-۱۱۰^\circ)+\cos(۲۰۰^\circ)}$ را به دست آورید.	۲
۱۰	نمودار تابع $y=۱+\sin(x+\frac{\pi}{۴})$ را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم کنید.	۱
۱۱	اگر $\log ۲ \simeq ۰/۳$ و $\log ۳ \simeq ۰/۴۸$، مقدار تقریبی $\log\frac{۱۸}{\sqrt{۵}}$ را به دست آورید.	۱
۱۲	معادلات زیر را حل کنید. الف) $(\frac{۳}{۵})^{x^۲+x+۲}=(\frac{۲۵}{۹})^x$ ب) $\log_۵(x+۶)+\log_۵(x+۲)=۱$	۲
۱۳	با توجه به شکل مقابل، حاصل $۲\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)-۳\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)+f(۱)$ را به دست آورید. 	۱
۱۴	حد مقابل را محاسبه کنید. $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۳x^۲+x-۴}{x^۳-۱}$	۱
۱۵	a و b را طوری بیابید که تابع f با ضابطهٔ مقابل در $x=۱$ پیوسته باشد. $f(x)=\begin{cases}\frac{x^۲-۳x+۲}{\lvert x-۱\rvert} & x<۱\\ ۳ax-۲ & x=۱\\ b[-۲x]+۷x & x>۱\end{cases}$	۱/۵
۱۶	احتمال قبولی سارا در کنکور ۰/۷ و احتمال قبولی سدنا در کنکور ۰/۶ است. مطلوب است محاسبهٔ احتمال این‌که حداقل یکی از این دو نفر در کنکور قبول شوند.	۱
۱۷	ضریب تغییرات داده‌های $۲,۴,۶,۸,۱۰$ را به دست آورید.	۱/۲۵
	«موفق باشید» **جمع نمرات**	۲۰

ردیف	امتحان نهایی: **ریاضی ۲**	رشته: **علوم تجربی**	تاریخ امتحان: **خرداد ۱۴۰۲ (نوبت صبح)**	
	امتحان شمارهٔ ۴	**پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه**	مدت امتحان: **۱۲۰ دقیقه**	**نمره**

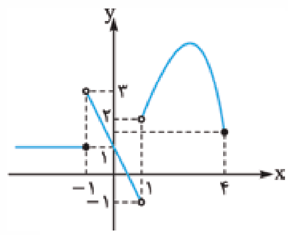
ردیف	سؤال	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) برای هر عدد حقیقی k، داریم: $[x+k]=[x]+k$. ($[x]$ نشان‌دهندهٔ جزء صحیح x است.) ب) اگر تمام داده‌های آماری را ۲ برابر کنیم، انحراف معیار نیز ۲ برابر می‌شود. پ) دو تابع $f(x)=\sqrt{x^۲}$ و $g(x)=x$ با هم برابرند.	۰/۷۵
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. الف) مرکز دایره‌ای که سه رأس مثلث روی آن قرار دارند، نقطهٔ برخورد .... می‌باشد. ب) حد تابع $f(x)=\frac{x+۴}{[x]+۳}$ وقتی $x\to(-۱)^-$، برابر .... است. پ) مقدار مینیمم تابع $f(x)=۳x^۲+۶x+۵$ برابر با .... است. ت) حداکثر مقدار تابع $f(x)=\cos x$ برابر با .... است که در نقاط به طول .... حاصل می‌شود.	۱/۲۵

۳	گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید. الف) ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=۳x-۲$ کدام است؟ ۱) $f^{-۱}(x)=-۳x+۲$ ۲) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۲}$ ۳) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۳}x+\frac{۲}{۳}$ ۴) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۳}x-\frac{۲}{۳}$ ب) کدام‌یک از توابع زیر در کل دامنهٔ خود یک‌به‌یک است؟ ۱) $f(x)=x^۲$ ۲) $f(x)=[x]$ ۳) $f(x)=\|x\|$ ۴) $f(x)=۲^x$	۰/۵
۴	نقطهٔ $A(۳,۰)$ یکی از رئوس مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $L: y-x=۵$ می‌باشد. مساحت این مربع را به دست آورید.	۰/۷۵
۵	معادلهٔ $۲x=۱-\sqrt{۲-x}$ را حل کنید.	۱
۶	در شکل مقابل $ST \parallel BC$ است. مقدار y و x را به دست آورید. 	۱/۲۵
۷	در مثلث قائم‌الزاویهٔ روبه‌رو، اندازهٔ پاره خط‌های خواسته‌شده را به دست آورید. $BH=۹$, $AH=۶$, $BC=?$, $AC=?$ 	۱
۸	نمودار تابع $f(x)=۱-\sqrt{x-۳}$ را با استفاده از انتقال نمودار $y=\sqrt{x}$ رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید.	۱/۵
۹	حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. (مراحل محاسبه را بنویسید.) $\sin(\frac{۲۵\pi}{۳})-\cos(\frac{-۵\pi}{۶})-\tan(\frac{۴\pi}{۳})=$	۱/۵
۱۰	نمودار رسم‌شده مربوط به کدام ضابطه است؟ نمودار ضابطهٔ دیگر را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم کنید. الف) $y=۲\cos x+۱$ ب) $y=۲-\cos x$ 	۱
۱۱	نمودار تابع $f(x)=۲^x-۱$ را رسم کنید. دامنه و برد آن را به صورت بازه بنویسید.	۱/۵
۱۲	معادلهٔ (الف) را حل کنید و حاصل عبارت (ب) را به دست آورید. الف) $\log_۵(x+۶)+\log_۵(x+۲)=۱$ ب) $\log_{۱۲}^{۴}+۲\log_{۱۲}^{۶}=$	۲
۱۳	حاصل حد مقابل را به دست آورید. $\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۳x}{x^۲-۹}=$	۱
۱۴	با استفاده از نمودار مقابل، مقادیر خواسته‌شده را در صورت وجود به دست آورید. الف) $\lim_{x\to ۲^+} f(x)=$ ب) $\lim_{x\to ۲^-} f(x)=$ پ) $\lim_{x\to ۰} f(x)=$ 	۰/۷۵

ردیف	سؤال	نمره
۱۵	پیوستگی تابع مقابل را در نقطهٔ $x=۲$ بررسی کنید. $f(x)=\begin{cases}۲x-۹ & x>۲\\ -۵ & x=۲\\ -۲x^{۲}+۳ & x<۲\end{cases}$	۱/۵
۱۶	احتمال این‌که یک تیم فوتبال، اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، $\frac{۱}{۶}$ است. احتمال قهرمانی این تیم در حال حاضر $\frac{۱}{۴}$ و در صورت بردن رقیب اصلی‌اش، این احتمال به $\frac{۱}{۳}$ افزایش می‌یابد. با چه احتمالی حداقل یکی از این دو اتفاق (قهرمانی یا بردن رقیب اصلی) برای این تیم اتفاق خواهد افتاد؟	۱/۲۵
۱۷	نمرات ریاضی یک کلاس به قرار روبه‌رو است. ۱۹,۱۱,۱۷,۱۴,۱۵,۱۷,۲۰,۱۳,۱۸,۱۶ میانه و انحراف معیار را برای این جامعهٔ آماری به دست آورید.	۱/۵
	«موفق باشید» جمع نمرات	۲۰

امتحان نهایی: ریاضی ۲	رشته: علوم تجربی	تاریخ امتحان: خرداد ۱۴۰۲ (نوبت عصر)
امتحان شمارهٔ ۵	پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

ردیف	سؤال	نمره
۱	گزینهٔ مناسب را تعیین کنید. الف) فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۲,۲)$ از خط $۳x+۴y-۶=۰$ کدام است؟ ۱) $\frac{-۴}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۸}{۵}$ ۴) $\frac{۶}{۵}$ ب) در هر مثلث هر پاره‌خطی که وسط دو ضلع را به هم وصل می‌کند .... ضلع سوم است. ۱) موازی ۲) مساوی ۳) موازی و مساوی نصف ۴) موازی و مساوی پ) اگر نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر $\frac{۴}{۲۵}$ باشد، نسبت نیمسازهای آن‌ها برابر .... است. ۱) $\frac{۱۶}{۶۲۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵۰}$ ت) برد تابع $f(x)=[x]$ کدام است؟ ۱) اعداد حقیقی ۲) اعداد گویا ۳) اعداد طبیعی ۴) اعداد صحیح ث) اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟ ۱) $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ ۲) $P(A\cap B)=P(S)$ ۳) $A\cap B=\varnothing$ ۴) $A\cap B=A\times B$	۱/۲۵
۲	الف) اگر $A(۲,۴)$ و $B(۴,-۲)$ دو سر قطر یک دایره باشند، مختصات مرکز دایره را بیابید. ب) معادلهٔ روبه‌رو را حل کنید. $\sqrt{۲-x}=x$	۱/۷۵
۳	الف) حکم کلی زیر را با مثال نقض رد کنید. به ازای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت $n^{۲}+n+۴۱$ عددی اول است. ب) در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC به رأس قائمهٔ A، اگر AH ارتفاع وارد بر BC باشد و $AH=۴\ cm$ و $BH=۲\ cm$، آن‌گاه اندازهٔ HC و AB را به دست آورید.	۲
۴	اگر $f(x)=۳x+۵$ باشد، مقدار $f^{-۱}(۸)$ را تعیین کنید.	۰/۵
۵	اگر $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ و $g(x)=x^{۲}-۴$ باشد، ضابطه و دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ را تعیین کنید.	۱/۷۵
۶	نمودار تابع $y=-\sin x+۱$ را در فاصلهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم کنید و مقدار ماکزیمم و مینیمم نمودار را تعیین کنید.	۱/۵
۷	حاصل عبارت مقابل را بیابید: $A=\sin ۱۲۰^{\circ}-\cos ۱۵۰^{\circ}$	۱/۵
۸	نمودار تابع $y=-\log_{۲}(x-۳)$ را رسم کنید.	۱

ردیف	سؤال	نمره
۹	معادلات نمایی و لگاریتمی زیر را حل کنید. الف) $۳^{x-۲}=\frac{۱}{۲۷^{x}}$ ب) $\log(x+۳)+\log x=۱$	۲
۱۰	اگر $\log ۲\approx ۰/۳$ و $\log ۳\approx ۰/۴۸$، آن‌گاه حاصل $\log ۱۲$ را بیابید.	۰/۵
۱۱	با توجه به نمودار، حاصل را بیابید. $\lim\limits_{x\to(-۱)^{+}} f(x)-۳\lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x)+۳f(-۱)=$ 	۱
۱۲	مقدار حدهای زیر را در صورت وجود تعیین کنید. الف) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۳x}{x^{۲}-۹}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۱۴۰۲^{-}}[x]$ پ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}\cos x$	۱
۱۳	مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تابع مقابل در نقطهٔ $x=-۱$ پیوسته باشد. $f(x)=\begin{cases}-۱ & x<-۱\\ ax+b & x=-۱\\ x^{۲}-b & x>-۱\end{cases}$	۱/۵
۱۴	فرض کنید در یک سال، احتمال قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران در آسیا برابر ۰/۵ و احتمال قهرمانی تیم ملی والیبال ایران در آسیا برابر ۰/۶ باشد. با چه احتمالی حداقل یکی از دو تیم قهرمان خواهد شد؟	۱/۲۵
۱۵	ضریب تغییرات داده‌های مقابل را تعیین کنید. ۱,۳,۵,۷	۱/۵
	«موفق باشید» جمع نمرات	۲۰

امتحان نوبت دوم: ریاضی ۲	رشته: علوم تجربی	تاریخ امتحان: خردادماه
امتحان شمارهٔ ۶	پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

ردیف	سؤال	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) معادلهٔ $x^{۲}+۶x+۷=۰$ دو ریشهٔ مثبت دارد. ب) اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن‌گاه $P(A\mid B)=P(A)$. پ) تابع $f(x)=\sqrt{۱-x}$ در $x=۱$ پیوستگی راست دارد. ت) هر تابع خطی غیرثابت، یک‌به‌یک است.	۱
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. الف) برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است قرینهٔ نمودار آن را نسبت به .... رسم کنیم. ب) دامنهٔ تابع $f(x)=۲^{x}-۳$ برابر با .... و برد آن برابر با .... است. پ) طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ ۲۱۰ درجه در دایره‌ای به شعاع ۶ برابر با .... است.	۱
۳	گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید. الف) معادلهٔ $\sqrt{x-۲}+\sqrt{۱-x}=۰$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟ ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر ب) مقدار ماکزیمم تابع $f(x)=-۲x^{۲}+۸x-۵$ برابر با چند است؟ ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) -۲ ۴) -۳	۱
۴	نقاط $A(۲,-۲)$ و $B(۴,۴)$ دو انتهای یک قطر دایره‌ای هستند. مختصات مرکز و اندازهٔ شعاع دایره را بیابید.	۰/۷۵

پاسخ‌امتحان‌شمارهٔ (۱): دی‌ماه

۱. الف) نادرست (۰/۲۵) $y=۲x-۱ \Rightarrow m=۲$

$x=۲y+۵ \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۵}{۲} \Rightarrow m'=\frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow mm'=۲(\frac{۱}{۲})\neq -۱ \Rightarrow$ عمود نیستند.

ب) درست (۰/۲۵)　　پ) درست (۰/۲۵)

ت) نادرست (۰/۲۵)، زیرا تابع خطی ثابت، غیریک‌به‌یک است.

۲. الف) $S=۲\ ,\ P=-۴ \Rightarrow x^۲-۲x-۴=۰$ (۰/۲۵)

ب) نیمساز(۰/۲۵)، به یک فاصله (۰/۲۵)

پ) $\frac{۱}{۳}$ (۰/۲۵)، زیرا: $\frac{۲a+۱}{۳a+۲}=\frac{۲b+۳}{۳b+۶}$

$\Rightarrow (۲a+۱)(۳b+۶)=(۳a+۲)(۲b+۳)$

$\Rightarrow \cancel{۶ab}+۱۲a+۳b+\cancel{۶}=\cancel{۶ab}+۹a+۴b+\cancel{۶}$

$\Rightarrow ۳a=b \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۱}{۳}$

ت) ۱۰۸° (۰/۲۵)، زیرا: $\frac{۳\pi}{۵}=\frac{۳\times۱۸۰^\circ}{۵}=۱۰۸^\circ$

۳. باید فاصلهٔ نقطهٔ A را تا خط BC بیابیم؛ پس معادلهٔ BC را می‌نویسیم:

$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{۶-۰}{۶-(-۲)}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$ (۰/۵)

معادلهٔ BC: $y-۰=\frac{۳}{۴}(x+۲)\Rightarrow ۴y=۳x+۶$

$\Rightarrow ۳x-۴y+۶=۰$ (۰/۵)

طول ارتفاع: $AH=\frac{|۳\times۰-۴\times۴+۶|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$ (۰/۵)

۴. اگر α و β، طول و عرض مستطیل باشند، داریم:

$\alpha\beta=۲۴$ و $۲(\alpha+\beta)=۲۲ \Rightarrow \alpha+\beta=۱۱$ (۰/۲۵)

پس $S=۱۱$ و $P=۲۴$؛ بنابراین α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-Sx+P=۰$ هستند:

$x^۲-Sx+P=۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x^۲-۱۱x+۲۴=۰$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow (x-۸)(x-۳)=۰ \Rightarrow x=۸\ ,\ x=۳$ (۰/۵)

یعنی طول مستطیل برابر ۸ و عرض آن ۳ می‌باشد.

۵. چون ریشه‌های سهمی را می‌دانیم؛ پس معادلهٔ سهمی به شکل $y=a(x+۱)(x-۲)$ است.(۰/۲۵) این سهمی از نقطهٔ $(۰,-۱)$ می‌گذرد؛ پس:

$-۱=a(۰+۱)(۰-۲)\Rightarrow -۲a=-۱ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$ (۰/۲۵)

در نتیجه: معادلهٔ سهمی: $y=\frac{۱}{۲}(x+۱)(x-۲)=\frac{۱}{۲}(x^۲-x-۲)$

$=\frac{۱}{۲}x^۲-\frac{۱}{۲}x-۱$ (۰/۵)

۶. الف) طرفین معادله را در $(x-۲)(x+۲)$ ضرب می‌کنیم، داریم:

$(۲x+۱)(x+۲)-(۲x-۱)(x-۲)=۳x^۲+۳$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow ۲x^۲+۴x+x+۲-(۲x^۲-۴x-x+۲)=۳x^۲+۳$

$\Rightarrow \cancel{۲x^۲}+۵x+\cancel{۲}-\cancel{۲x^۲}+۵x-\cancel{۲}=۳x^۲+۳$

$\Rightarrow ۳x^۲-۱۰x+۳=۰$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow \Delta=۱۰۰-۳۶=۶۴ \Rightarrow x=\frac{۱۰\pm۸}{۶}\Rightarrow x=۳$ یا $x=\frac{۱}{۳}$ (۰/۲۵)

هیچ‌یک از این دو، مخرج کسرها را صفر نمی‌کند؛ پس هر دو جواب، قابل قبول است. (۰/۲۵)

ب) $\sqrt{x+۱}-\sqrt{۲x-۵}=۱ \Rightarrow \sqrt{x+۱}=۱+\sqrt{۲x-۵}$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x+۱=۱+۲x-۵+۲\sqrt{۲x-۵}$

$\Rightarrow ۵-x=۲\sqrt{۲x-۵}$ (۰/۲۵)

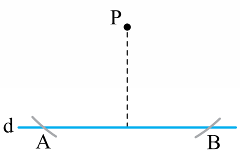
$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲۵+x^۲-۱۰x=۸x-۲۰$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow x^۲-۱۸x+۴۵=۰ \Rightarrow (x-۳)(x-۱۵)=۰$

$\Rightarrow x=۳$ یا $x=۱۵$ (۰/۲۵)

$x=۱۵$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند و $x=۳$ تنها جواب معادله است. (۰/۲۵)

۷. خط d و نقطهٔ P واقع در خارج آن را در نظر می‌گیریم.



گام اول: دهانهٔ پرگار را باز کرده و به مرکز P کمانی می‌زنیم که خط d را در دو نقطهٔ A و B قطع کند. (۰/۲۵)

گام دوم: عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم (۰/۲۵)، چون $PA=PB$؛ پس عمودمنصف پاره‌خط AB از نقطهٔ P می‌گذرد. (۰/۲۵)

عمودمنصف پاره‌خط AB جواب مسئله است، زیرا از P می‌گذرد و بر خط d عمود است. (۰/۲۵)

۸. $EF\parallel BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{x+۱}{۳x+۱}$ (۰/۲۵)

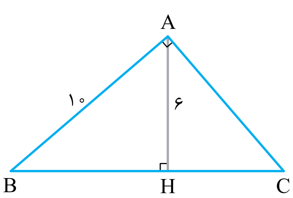
$\Rightarrow ۶x+۲=۵x+۵$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x=۳$ (۰/۲۵)

$EF\parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow \frac{۲}{۷}=\frac{y+۱}{۴y+۲/۵}$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow ۸y+۵=۷y+۷$ (۰/۲۵) $\Rightarrow y=۲$ (۰/۲۵)

۹.



$\overset{\Delta}{ABH}: AB^۲=AH^۲+BH^۲$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow ۱۰^۲=۶^۲+BH^۲$

$\Rightarrow BH^۲=۱۰۰-۳۶=۶۴$

$\Rightarrow BH=۸$ (۰/۲۵)

$\overset{\Delta}{ABC}: AB^۲=BH\times BC$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۱۰^۲=۸\times BC$

$\Rightarrow BC=\frac{۱۰۰}{۸}=\frac{۲۵}{۲}=۱۲/۵$ (۰/۲۵)

$\overset{\Delta}{ABC}: AH\times BC=AB\times AC$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \overset{۳}{\cancel{۶}}\times\frac{۲۵}{\cancel{۲}}=۱۰\times AC$

$\Rightarrow AC=\frac{۷۵}{۱۰}=۷/۵$ (۰/۲۵)

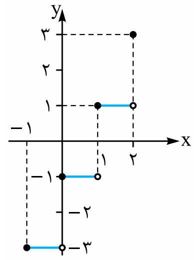
۱۰. $f(x)=\frac{x^۲-۱۶}{x+۴} \Rightarrow x+۴\neq ۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x\neq -۴$

$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-۴\}$ (۰/۲۵)

$g(x)=x-۴ \xrightarrow{\text{g چندجمله‌ای}} D_g=\mathbb{R}$ (۰/۲۵)

چون $D_f\neq D_g$؛ پس $f\neq g$. (۰/۵)

.۱۱



(رسم نمودار (۰/۵))

$-۱\leq x<۰ \Rightarrow [x]=-۱ \Rightarrow y=-۳$ (۰/۲۵)

$۰\leq x<۱ \Rightarrow [x]=۰ \Rightarrow y=-۱$ (۰/۲۵)

$۱\leq x<۲ \Rightarrow [x]=۱ \Rightarrow y=۱$ (۰/۲۵)

$x=۲ \Rightarrow y=۳$ (۰/۲۵)

.۱۲

$$y=\frac{۲}{۳}x-۵ \Rightarrow y+۵=\frac{۲}{۳}x\ (۰/۲۵) \xrightarrow{\times\frac{۳}{۲}} \frac{۳}{۲}y+\frac{۱۵}{۲}=x\ (۰/۲۵)$$

$$f^{-۱}(y)=\frac{۳}{۲}y+\frac{۱۵}{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۳}{۲}x+\frac{۱۵}{۲}\ (۰/۵)$$

.۱۳

$$f(x)=x^{۲}+۳x+۲ \xrightarrow{\text{چندجمله‌ای } f} D_f=\mathbb{R}\ (۰/۲۵)$$

$$g(x)=\frac{x+۲}{x+۴},\ x+۴\neq ۰ \Rightarrow x\neq -۴\ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{-۴\}\ (۰/۲۵)$$

$$D_{\frac{f}{g}}=\underbrace{D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=۰\}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\mathbb{R}\cap(\mathbb{R}-\{-۴\})-\{-۲\}}_{(۰/۲۵)}$$

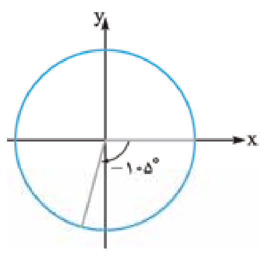
$$=\mathbb{R}-\{-۴,-۲\}\ (۰/۲۵)$$

ضابطه: $\frac{f}{g}(x)=\dfrac{x^{۲}+۳x+۲}{\frac{x+۲}{x+۴}}=\dfrac{\cancel{(x+۲)}(x+۱)}{\frac{\cancel{x+۲}}{x+۴}}$ (۰/۲۵)

$$=(x+۱)(x+۴)=x^{۲}+۵x+۴\ (۰/۲۵)$$

$$(x\neq -۲,-۴)$$

.۱۴ الف) (رسم نمودار(۰/۲۵))



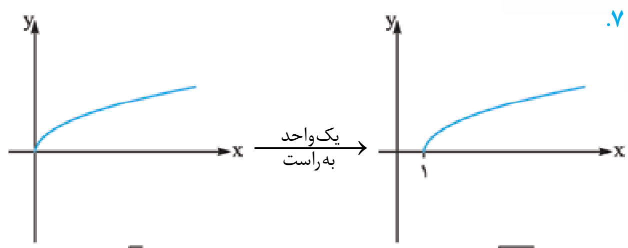
$$-۱۰۵^{\circ}=-۱۰۵\times\frac{\pi}{۱۸۰}=-\frac{۷\pi}{۱۲}\text{ rad}\ (۰/۵)$$

ب) $۳۶^{\circ}=۳۶\times\frac{\pi}{۱۸۰}=\frac{\pi}{۵}\text{ rad}$ (۰/۵)

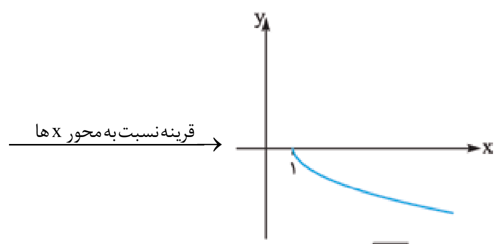
$$L=r\alpha\ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow L=۱۰\times\frac{\pi}{۵}=۲\pi\text{ cm}\ (۰/۲۵)$$

۷.

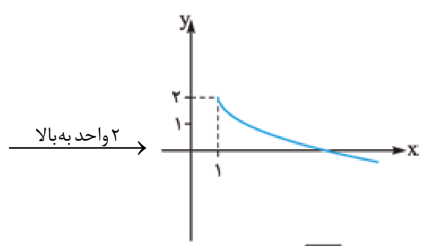


$y=\sqrt{x}$ $y=\sqrt{x-۱}$ (۰/۲۵)



(۰/۲۵)

$y=-\sqrt{x-۱}$



(۰/۲۵)

$y=۲-\sqrt{x-۱}$

با توجه به نمودار، $D_f=[۱,+\infty)$ و $R_f=(-\infty,۲]$ (۰/۲۵)

۸. $f^{-۱}(۳)=x \Rightarrow f(x)=۳$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \frac{۵x-۴}{۷}=۳$

$\Rightarrow ۵x-۴=۲۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۵x=۲۵$

$\Rightarrow x=۵$ (۰/۲۵) $\Rightarrow f^{-۱}(۳)=۵$ (۰/۲۵)

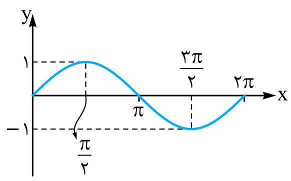
۹. $A=\frac{\sin(۲۷۰^\circ-۲۰^\circ)+۲\sin(۳۶۰^\circ-۲۰^\circ)}{\cos(۹۰^\circ+۲۰^\circ)+\cos(۱۸۰^\circ+۲۰^\circ)}$ (۰/۵)

$$=\frac{\overbrace{-\cos۲۰^\circ}^{(۰/۲۵)}-\overbrace{۲\sin۲۰^\circ}^{(۰/۲۵)}}{\underbrace{-\sin۲۰^\circ}_{(۰/۲۵)}-\underbrace{\cos۲۰^\circ}_{(۰/۲۵)}}$$

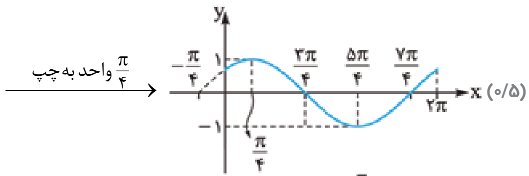
صورت و مخرج کسر را بر $\cos۲۰^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$A=\frac{-۱-۲\tan۲۰^\circ}{-\tan۲۰^\circ-۱}$ (۰/۲۵) $\simeq\frac{-۱-۲\times۰/۴}{-۰/۴-۱}=\frac{-۱/۸}{-۱/۴}=\frac{۱۸}{۱۴}=\frac{۹}{۷}$ (۰/۲۵)

۱۰.

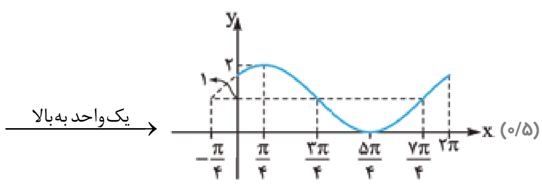


y=sin x



(۰/۵)

$y=\sin(x+\frac{\pi}{۴})$



(۰/۵)

$y=۱+\sin(x+\frac{\pi}{۴})$

۱۱. $\log\frac{۱۸}{\sqrt{۵}}=\log۱۸-\log\sqrt{۵}=\log۳^۲\times۲-\log۵^{\frac{۱}{۲}}$ (۰/۲۵)

$=\log۳^۲+\log۲-\frac{۱}{۲}\log۵$ (۰/۲۵) $=۲\log۳+\log۲-\frac{۱}{۲}(۱-\log۲)$ (۰/۲۵)

$\simeq۲\times۰/۴۸+۰/۳-\frac{۱}{۲}(۱-۰/۳)=۰/۹۶+۰/۳-\frac{۱}{۲}\times۰/۷$

$=۱/۲۶-۰/۳۵=۰/۹۱$ (۰/۲۵)

۱۲. الف) $(\frac{۳}{۵})^{x^۲+x+۲}=(\frac{۲۵}{۹})^x=((\frac{۵}{۳})^۲)^x=(\frac{۵}{۳})^{۲x}=(\frac{۳}{۵})^{-۲x}$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow x^۲+x+۲=-۲x$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x^۲+۳x+۲=۰$

$\Rightarrow (x+۱)(x+۲)=۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x=-۱$ یا $x=-۲$ (۰/۲۵)

ب)

$\log_۵(x+۶)+\log_۵(x+۲)=۱ \Rightarrow \log_۵(x+۶)(x+۲)=۱$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow (x+۶)(x+۲)=۵^۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x^۲+۸x+۱۲=۵$

$\Rightarrow x^۲+۸x+۷=۰ \Rightarrow (x+۱)(x+۷)=۰$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow x=-۱$ یا $x=-۷$

$x=-۷$ عبارت جلوی لگاریتم‌ها را منفی می‌کند؛ پس $x=-۱$ تنها جواب این معادله است. (۰/۲۵)

۱۳. $$۲\lim_{x\to ۱^+} f(x) - ۳\lim_{x\to ۱^-} f(x) + f(۱) = \overbrace{۲\times ۱}^{(۰/۲۵)} - \overbrace{۳\times ۳}^{(۰/۲۵)} + \overbrace{۲}^{(۰/۲۵)}$$
$$= ۲-۹+۲=-۵ \ (۰/۲۵)$$

۱۴. $$\lim_{x\to ۱}\frac{۳x^۲+x-۴}{x^۳-۱} = \lim_{x\to ۱}\frac{\overbrace{\cancel{(x-۱)}(۳x+۴)}^{(۰/۲۵)}}{\underbrace{\cancel{(x-۱)}(x^۲+x+۱)}_{(۰/۲۵)}} = \frac{۷}{۳} \ (۰/۵)$$

۱۵. $$f(۱)=۳a-۲ \ (۰/۲۵)$$
$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} b[-۲x]+۷x = -۳b+۷ \ (۰/۲۵)$$
$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲-۳x+۲}{|x-۱|} = \lim_{x\to ۱^-}\frac{\overbrace{(x-۱)(x-۲)}^{(۰/۲۵)}}{-(x-۱)} = ۱ \ (۰/۲۵)$$
f در $x=۱$ پیوسته است.
$$\Rightarrow \begin{cases} ۳a-۲=۱ \Rightarrow ۳a=۳ \Rightarrow a=۱ \ (۰/۲۵) \\ -۳b+۷=۱ \Rightarrow -۳b=-۶ \Rightarrow b=۲ \ (۰/۲۵) \end{cases}$$

۱۶. فرض کنیم A و B به ترتیب پیشامد قبولی سارا و سدنا در کنکور باشند؛ پس $P(A)=۰/۷$ و $P(B)=۰/۶$ و باید $P(A\cup B)$ را بیابیم. (۰/۲۵)
بدیهی است که A و B مستقل‌اند؛ پس $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$. (۰/۲۵)
داریم:
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \ (۰/۲۵) = P(A)+P(B)$$
$$-P(A)\times P(B) = ۰/۷+۰/۶-۰/۴۲=۰/۸۸ \ (۰/۲۵)$$

۱۷. $$\bar{x}=\frac{۲+۴+۶+۸+۱۰}{۵}=\frac{۳۰}{۵}=۶ \ (۰/۲۵)$$
$$\sigma^۲=\frac{(۲-۶)^۲+(۴-۶)^۲+(۶-۶)^۲+(۸-۶)^۲+(۱۰-۶)^۲}{۵} \ (۰/۲۵)$$
$$=\frac{۱۶+۴+۰+۴+۱۶}{۵}=\frac{۴۰}{۵}=۸ \ (۰/۲۵) \Rightarrow \sigma=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲} \ (۰/۲۵)$$
$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۶}=\frac{\sqrt{۲}}{۳} \ (۰/۲۵)$$

پاسخ امتحان شمارهٔ (۴): خرداد ۱۴۰۲ (نوبت صبح)

۱. الف) نادرست (۰/۲۵)، زیرا: $\underbrace{[۱/۵+۰/۵]}_{۲} \neq \underbrace{[۱/۵]+۰/۵}_{۱/۵}$

ب) درست (۰/۲۵)　　پ) درست (۰/۲۵)

۲. الف) عمودمنصف‌های اضلاع مثلث (۰/۲۵)

ب) ۳ (۰/۲۵)، زیرا: $\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{x+۴}{[x]+۳}=\frac{۳}{\underbrace{[(-۱)^-]}_{-۲}+۳}=\frac{۳}{۱}=۳$

پ) $a>۰ \ , \ x_{min}=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۶}{۲\times ۳}=-۱ \Rightarrow y_{min}=۲ \ (۰/۲۵)$

ت) ۱ (۰/۲۵)، $x=۲k\pi$ (۰/۲۵)

۳. الف) گزینهٔ «۳» (۰/۲۵)

$(۱,۱)\in f \Rightarrow (۱,۱)\in f^{-۱} \xrightarrow[\text{گزینه‌ها}]{\text{امتحان‌کردن}}$ گزینهٔ «۳»

ب) گزینهٔ «۴» (۰/۲۵)، زیرا هر خط موازی با محورxها نمودار این تابع را در یک نقطه قطع می‌کند.

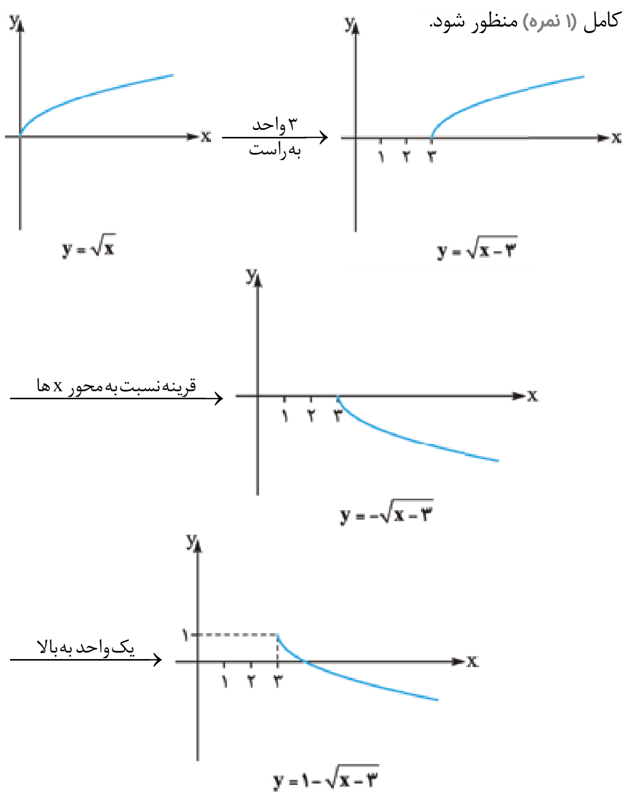
۴. فاصلهٔ نقطهٔ $A(۳,۰)$ از خط $y-x=۵$ یا $-x+y-۵=۰$ همان طول ضلع مربع است.
$$AH=\frac{|-۳+۰-۵|}{\sqrt{۱+۱}} \ (۰/۲۵) = \frac{۸}{\sqrt{۲}} \ (۰/۲۵) \Rightarrow S=\frac{۶۴}{۲}=۳۲ \ (۰/۲۵)$$

۵. $$۲x-۱=-\sqrt{۲-x}$$
$$\Rightarrow \underbrace{(۲x-۱)^۲=(-\sqrt{۲-x})^۲ \Rightarrow ۴x^۲-۴x+۱=۲-x}_{(۰/۲۵)}$$
$$\Rightarrow ۴x^۲-۳x-۱=۰ \ (۰/۲۵)$$
$\xrightarrow{a+b+c=۰} x_۱=۱$ غیر قابل قبول (۰/۲۵) , $x_۲=\frac{-۱}{۴}$ (۰/۲۵)

۶. $$\underbrace{ST \parallel BC \Rightarrow \frac{AS}{SB}=\frac{AT}{TC} , \frac{AS}{AB}=\frac{ST}{BC}}_{(۰/۲۵)}$$
$$\underbrace{\frac{۸}{۴}=\frac{۳y+۳}{۶}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow ۳y+۳=۱۲ \Rightarrow y=۳ \ (۰/۲۵)$$
$$\underbrace{\frac{۸}{۱۲}=\frac{۶}{۴x+۱}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow ۸x+۲=۱۸ \Rightarrow x=۲ \ (۰/۲۵)$$

۷. $$\underbrace{AH^۲=BH\times HC \Rightarrow ۳۶=۹\times HC}_{(۰/۲۵)}$$
$$\Rightarrow HC=۴ \Rightarrow BC=۱۳ \ (۰/۲۵)$$
$$\underbrace{AC^۲=HC\times BC \Rightarrow AC^۲=۴\times ۱۳}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow AC=۲\sqrt{۱۳} \ (۰/۲۵)$$

۸. هر مرحله از رسم نمودار (۰/۲۵) نمره. در صورت رسم صحیح نمودار نهایی، نمرهٔ کامل (۱ نمره) منظور شود.



$R_f=(-\infty,۱]$ (۰/۲۵)　　$D_f=[۳,+\infty)$ (۰/۲۵)

۹. $\underbrace{\sin(۸\pi+\frac{\pi}{۳})-\cos(\pi-\frac{\pi}{۶})-\tan(\pi+\frac{\pi}{۳})}_{(۰/۷۵)}$

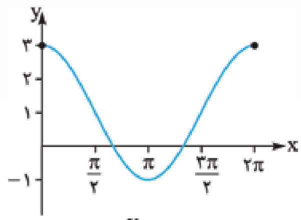
$=\sin\frac{\pi}{۳}+\cos\frac{\pi}{۶}-\tan\frac{\pi}{۳}$

$=\underbrace{\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\sqrt{۳}=۰}_{(۰/۷۵)}$

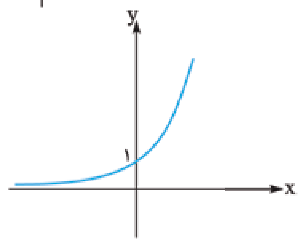
۱۰. نمودار از نقطهٔ (۰,۱) می‌گذرد و این نقطه فقط در ضابطهٔ (ب) صدق می‌کند؛ پس نمودار مربوط به ضابطهٔ (ب) است. (۰/۲۵)

برای رسم نمودار ضابطهٔ (الف) کافی است ابتدا عرض نقاط نمودار $y=\cos x$ را دو برابر کنیم و سپس نمودار حاصل را یک واحد به بالا منتقل کنیم.

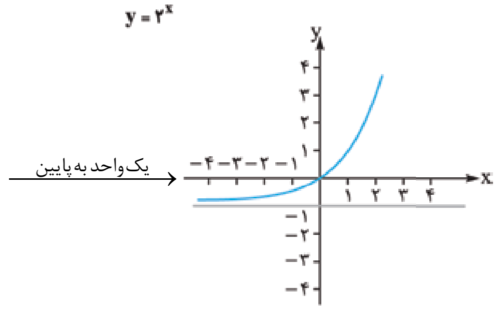
رسم صحیح نمودار (الف) (۰/۷۵)



۱۱. رسم صحیح نمودار (۰/۷۵)



$y=۲^x$



$y=۲^x-۱$

$D_f=(-\infty,+\infty)$ (۰/۲۵) $R_f=(-۱,+\infty)$ (۰/۵)

۱۲. الف) $\log_۵(x+۶)(x+۲)=۱$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow (x+۶)(x+۲)=۵$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x^۲+۸x+۷=۰$ (۰/۲۵)

$\xrightarrow{a+c=b} x_۱=-۱,\ x_۲=-۷$ غیر قابل قبول (۰/۵)

ب) $\underbrace{\log_{۱۲}۴+\log_{۱۲}۳۶}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\log_{۱۲}۱۴۴}_{(۰/۲۵)}=۲$ (۰/۲۵)

۱۳. $\underbrace{\lim_{x\to۳}\frac{x(x-۳)}{(x-۳)(x+۳)}}_{(۰/۵)}=\underbrace{\lim_{x\to۳}\frac{x}{x+۳}}_{(۰/۲۵)}=\frac{۱}{۲}$ (۰/۲۵)

۱۴. الف) ۱ (۰/۲۵) ب) ۴ (۰/۲۵) پ) صفر (۰/۲۵)

۱۵. $\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^+}(۲x-۹)=-۵$ (۰/۵)

$\lim_{x\to۲^-}f(x)=\lim_{x\to۲^-}(-۲x^۲+۳)=-۵$ (۰/۵)

$\Rightarrow \lim_{x\to۲}f(x)=-۵=f(۲)$ (۰/۲۵)

در نتیجه تابع f در $x=۲$ پیوسته است. (۰/۲۵)

۱۶. $P(A\cap B)=P(B|A)\times P(A)$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۱۸}$ (۰/۲۵)

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۱۸}=\frac{۱۳}{۳۶}$ (۰/۵)

۱۷. $۱۱,۱۳,۱۴,۱۵,\underbrace{۱۶,۱۷}_{Q_۲=۱۶/۵},۱۷,۱۸,۱۹,۲۰$ (۰/۵)

$\bar{x}=\frac{\sum_{i=۱}^{۱۰}x_i}{n}=\frac{۱۶۰}{۱۰}=۱۶$ (۰/۲۵)

$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=۱}^{۱۰}(\bar{x}-x_i)^۲}{n}}$ (۰/۲۵)

$\sigma=\sqrt{\frac{۲۵+۹+۴+۱+۰+۱+۱+۴+۹+۱۶}{۱۰}}=\sqrt{۷}$ (۰/۵)

پاسخ امتحان شمارهٔ (۵): خرداد ۱۴۰۲ (نوبت عصر)

۱. الف) گزینهٔ «۲» (۰/۲۵) $AH=\frac{|۳(-۲)+۴(۲)-۶|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۴}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۴}{۵}$

ب) گزینهٔ «۳» (۰/۲۵)

پ) گزینهٔ «۲» (۰/۲۵) $\frac{S}{S'}=\frac{۴}{۲۵}\Rightarrow\sqrt{\frac{۴}{۲۵}}=\frac{۲}{۵}$

ت) گزینهٔ «۴» (۰/۲۵) ث) گزینهٔ «۱» (۰/۲۵)

۲. الف) (۰/۷۵)

مرکز دایره $O\left|\begin{array}{l} x_O=\frac{۲+۴}{۲}=۳ \\ y_O=\frac{۴+(-۲)}{۲}=۱ \end{array}\right.$

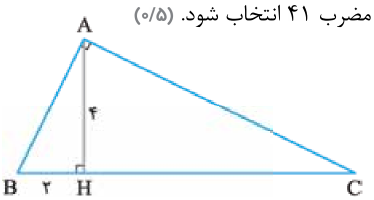
ب) (۱) $\sqrt{۲-x}=x \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲-x=x^۲ \Rightarrow x^۲+x-۲=۰$

$\Rightarrow (x+۲)(x-۱)=۰ \Rightarrow x=-۲$ یا $x=۱$

$x=-۲$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند و $x=۱$ تنها جواب معادله است.

۳. الف) کافی است $n=۴۱$ یا مضرب ۴۱ انتخاب شود. (۰/۵)

ب) هر مورد (۰/۷۵)



$AH^۲=BH.HC$

$\Rightarrow ۴^۲=۲\times HC$

$\Rightarrow HC=۸$

$AB^۲=۲^۲+۴^۲=۲۰\Rightarrow AB=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$

۴. $f^{-۱}(۸)=x\Rightarrow f(x)=۸$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۳x+۵=۸\Rightarrow x=۱$

$\Rightarrow (۱,۸)\in f\Rightarrow f^{-۱}(۸)=۱$ (۰/۲۵)

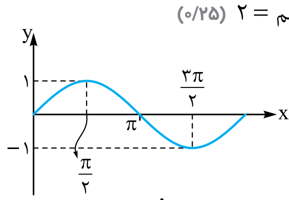
۵. $\frac{f}{g}(x)=\underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{(۰/۲۵)}=\frac{\frac{x+۲}{x-۱}}{x^۲-۴}=\frac{x+۲}{\underbrace{(x-۱)(x^۲-۴)}_{(۰/۲۵)}}=\frac{۱}{(x-۱)(x-۲)}$

$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g\underbrace{-\{x|g(x)=۰\}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{(\mathbb{R}-\{۱\})\cap\mathbb{R}-\{۲,-۲\}}_{(۰/۷۵)}$

$=\underbrace{\mathbb{R}-\{۱,۲,-۲\}}_{(۰/۲۵)}$

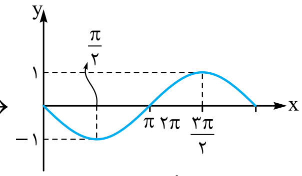
۶. رسم نمودار دقیق (۱ نمره) مقدار ماکزیمم $=۲$ (۰/۲۵)

مقدار مینیمم $=۰$ (۰/۲۵)



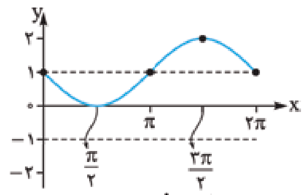
y=sin x

قرینه نسبت به محور xها



y=-sin x

یک واحد به بالا



y=-sin x+۱

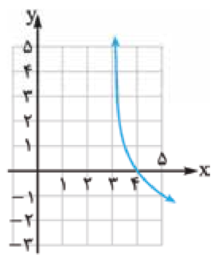
۷. $A=\sin(۹۰^\circ+۳۰^\circ)-\cos(۱۸۰^\circ-۳۰^\circ)$ (۰/۵)

$=\cos ۳۰^\circ-(-\cos ۳۰^\circ)$ (۰/۵) $=\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}$ (۰/۵)

۸. رسم دقیق نمودار (۱ نمره)

انتقال ۳ واحد به راست تابع $y=\log_۲ x$ و سپس قرینه نسبت به محور xها

$y=\log_۲(x-۳)$



$y=-\log_۲(x-۳)$

۹. الف) $۳^{x-۲}=\frac{۱}{(۳^۳)^x}=۳^{-۳x}\Rightarrow x-۲=-۳x\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$ (۰/۵) (۰/۵)

ب) $\log(x+۳)x=۱\Rightarrow (x^۲+۳x)=۱۰$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$\Rightarrow x^۲+۳x-۱۰=۰\Rightarrow (x+۵)(x-۲)=۰$

$\Rightarrow \begin{cases} x=-۵ & \text{غ ق ق} \\ x=۲ & \text{ق ق} \end{cases}$ (۰/۵)

۱۰. $\log ۲^۲\times ۳=۲\log ۲+\log ۳$ (۰/۲۵)

$=۲\times ۰/۳+۰/۴۸=۱/۰۸$ (۰/۲۵)

۱۱. هر مورد (۰/۲۵) $۳-۳(-۱)+۳(۱)=۹$

۱۲. الف) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{x(x-۳)}{(x+۳)(x-۳)}=\frac{۳}{۳+۳}=\frac{۱}{۲}$ (۰/۵)

ب) ۱۴۰۱ (۰/۲۵) پ) $\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ (۰/۲۵)

۱۳. مقدار تابع = حد چپ = حد راست :شرط پیوستگی

$f(-۱)=a(-۱)+b=-a+b$ (۰/۲۵)

$\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^-}(-۱)=-۱$ (۰/۲۵)

$\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^+} x^۲-b=(-۱)^۲-b=۱-b$ (۰/۲۵)

$\begin{cases} ۱-b=-۱\Rightarrow b=۲ & (۰/۲۵) \\ -a+b=-۱\xrightarrow{b=۲} -a+۲=-۱\Rightarrow a=۳ & (۰/۵) \end{cases}$

۱۴. $P(A)=۰/۵$ پیشامد قهرمانی تیم ملی فوتبال A

$P(B)=۰/۶$ پیشامد قهرمانی تیم ملی والیبال B

$P(A\cap B)=۰/۵\times ۰/۶=۰/۳$ مستقل (۰/۵)

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=۰/۵+۰/۶-۰/۳=۰/۸$ (۰/۷۵)

۱۵. میانگین $\bar{x}=\frac{۱+۳+۵+۷}{۴}=\frac{۱۶}{۴}=۴$ (۰/۲۵)

(۰/۵)

واریانس $\sigma^۲=\frac{(۱-۴)^۲+(۳-۴)^۲+(۵-۴)^۲+(۷-۴)^۲}{۴}=\frac{۲۰}{۴}=۵$

انحراف معیار $\sigma=\sqrt{۵}$ (۰/۲۵)

ضریب تغییرات $C.V=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{۵}}{۴}$ (۰/۵)

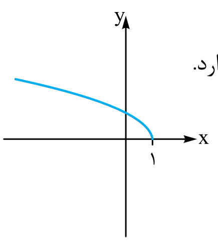
پاسخ امتحان شمارهٔ (۶): خردادماه

۱. الف) نادرست(۰/۲۵)، زیرا: $x_۱,x_۲=\frac{-۶\pm\sqrt{۳۶-۴(۷)}}{۲}$

$\Rightarrow x_۱=\frac{-۶+\sqrt{۱۰}}{۲}<۰,\ x_۲=\frac{-۶-\sqrt{۱۰}}{۲}<۰$

ب) درست (۰/۲۵)

پ) نادرست (۰/۲۵)، زیرا در $x=۱$ پیوستگی چپ دارد.



$y=\sqrt{۱-x}$

ت) درست (۰/۲۵)

۲. الف) نیمساز ربع اول و سوم (یا خط $y=x$) (۰/۲۵)

ب) $\mathbb{R}$ (۰/۲۵) $(-۳,+\infty)$ (۰/۲۵) پ) ۷π (۰/۲۵)

۳. الف) گزینهٔ «۴» (۰/۵) ، زیرا

$\sqrt{x-۲}+\sqrt{۱-x}=۰\Rightarrow \underbrace{\sqrt{x-۲}}_{+}=\underbrace{-\sqrt{۱-x}}_{-}\Rightarrow$ جواب ندارد.

ب) گزینهٔ «۲» (۰/۵)، زیرا:

$a=-۲<۰\Rightarrow x_{max}=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۸}{-۴}=۲\Rightarrow y_{max}=۳$

۴. مرکز: $O=(۳,۱)$ (۰/۲۵)

شعاع: $R=OA=\sqrt{(۳-۲)^۲+(۱+۲)^۲}=\sqrt{۱۰}$ (۰/۵)