

## مقدمه ناشر

سلام

اولین باری که اسم «ریاضیات گسسته» را شنیدید به چه فکری افتادید؟! آدم اولش فکر می‌کند که با ریاضیاتی سروکار دارد که از همه چیز، از دنیا و از عقبا، گسسته است، رفته کناری نشسته و با قضیه‌ها و مسئله‌هایش خوش است. اما خب، اصلاً این‌طور نیست. بحث‌های ریاضیات گسسته نه تنها از دنیا نگسسته، بلکه خیلی هم کاربرد دارد. گراف، ترکیبیات، نظریه اعداد، احتمال و... همه از ابزارهایی هستند که در خیلی رشته‌های دیگر کاربرد دارند. فکر می‌کنم باور نمی‌کنید، می‌گویید معلم‌ها کم بودند! این نویسنده‌ها و ناشران هم شروع کرده‌اند به نصیحت که ریاضی خیلی کاربرد دارد و به دردتان می‌خورد و ...!

اما بگذارید یک کم توضیح بدهم، شاید علاقه‌مند شدید:

فکر می‌کنم همه شماهایی که این کتاب را می‌خوانید در یکی از شبکه‌های اجتماعی، حالا از نوع وطنی‌اش یا خارجی، عضو هستید. از آپ، اینترنت و... هم خیلی استفاده می‌کنید. همین موضوع‌هایی که امسال در درس ریاضیات گسسته‌تان می‌خوانید، مثلاً نظریه گراف و ترکیبیات، در طراحی نرم‌افزارها و برنامه‌ریزی این چیزهایی که گفتم خیلی کاربرد دارند. اصلاً اگر این نظریه‌ها نبود، این چیزها این قدر که می‌بینید پیشرفت نمی‌کرد. همه موضوع این است که وقتی می‌گوییم کاربرد منظورمان این نیست که بلافاصله بعد از این که درس را خواندید می‌توانید در زندگی به کارش ببرید. برای استفاده از هر کدام از این‌ها کلی سعی دیگر هم لازم است. کار خدا را چه دیده‌اید، شاید هر کدام از شما در آینده‌ای نزدیک بشوید طراح، سازنده یا برنامه‌ریز یکی از همین‌ها. شاید مستقل از هر رشته دانشگاهی که می‌خوانید آخر سر، کارتان بیفتد به دنیای دیجیتال و اینترنت و... تازه اگر حتی زمینه کارتان این‌ها نباشد احتمالاً برای بازاریابی، تبلیغات و فروش و... باز هم درگیر همین چیزها می‌شوید؛ پس نتیجه می‌گیریم اتفاقاً این ریاضیات گسسته نه تنها گسسته نیست بلکه خیلی هم به ما و زندگی‌مان پیوسته است.

مؤلف خوبمان، آقای دیداری، با دانش، تجربه و دقتی بی‌نظیر این کتاب را نوشته تا خیالتان از بابت یادگیری این درس راحت باشد. الان که دارم این مقدمه را می‌نویسم از بابت خوب بودن کتاب خیالم راحت است اما باز هم، چون نظر شما که از این کتاب استفاده می‌کنید، برایمان بسیار مهم است و اول و آخر کیفیت کتاب به نظر شما برمی‌گردد، لطفاً برایمان بنویسید که چه طور بود؟ چه چیزهایی کم دارد؟ چه چیزهایی زیاد دارد و چگونه می‌تواند بهتر شود؟ منتظریم.

خوش باشید

## مقدمه مؤلف

چون حساسی درگیر کار بودم وقت نمی‌کردم برم دانشگاه! هر از گاهی سری می‌زدم تا ببینم چه خبر است. درس نظریهٔ اعداد داشتم. آخرهای ترم بود. رفته دانشگاه و آن ته کلاس نشستم. استاد وسط درس دادن یک‌دفعه گفت: «اون ته کلاس، سینما نیستش‌ها». راستش را بخواهید خیلی بهم برخورد. بیست دقیقه گذشت. استاد گفت کی فلان قضیه را خوانده است که بیاید سمینار بدهد؟ (سیستمش بیشتر سمیناری بود و فیلی درس نمی‌داد) کسی دست بالا نبرد. از شانس، من این قضیه را حدود شش ماه پیش به دلیلی (یه سری کلاس آمادگی برای المپیاد داشتم تو یه دیرستانی) خوانده بودم، ولی خب اثباتش را زیاد یادم نبود! آن حرف استاد هم هنوز توی گوشم بود. گفتم: «فدایا برم، نرَم؟» از یک طرف اثباتش بود و از یک طرف قصهٔ حال‌گیری! خلاصه دل را به دریا زدم و دست بالا کردم. کمی تعجب کرد. بالأخره اولین جلسهٔ حضور من بود. رفته آن جلو. نفس عمیقی کشیدم، ولی هر کاری کردم دیدم نه خیر! چیزی یادم نمی‌آید! (هالا استرس و اینا و...) پیش خودم گفتم از این ستون به آن ستون فرج است، فعلاً صورت قضیه را پای تخته بنویسم شاید چیزی یادم آمد! نوشتم و دیدم نه مثل این که قضیه جدی است، چیزی یادم نمی‌آید. یک‌دفعه چیزی به ذهنم رسید. کتاب را بستم و گفتم: «خب ایده بدهید، اثبات که در کتاب هست. من برای شما رونویسی کنم فایده‌ای ندارد». دانشجویها شروع به اعتراض کردند ولی استاد از این حرف من خوشش آمد و گفت: «خب راست می‌گوید. اگر پای تخته تندتند بنویسد که فایده‌ای ندارد!» خلاصه این‌ها یک چیزی می‌گفتند و من هم کمی بحث می‌کردم و زیر زیرکی هم کتاب را نگاه می‌کردم! بالأخره هر جوری بود اثبات را تمام کردم. (البته به دلم نپسید. جلسهٔ بعد یه موضوع دیگه رو فیلی معلمی و به همون صورت بحث رو طرفه با دانشجوها سمینار دادم. استاد هم فیلی مال کرد و وسطش شروع کرد تعریف و تمهید! پایان ترم هم بدون این که ورقه ۴۱ رو تمویح کنه تنها ۲۰ لیسانسمو دارم. بگذریم...) غرضم از نقل این خاطره، آن جملهٔ قصاری بود که گفتم! اکثراً می‌پرسید: آقا چه جوری باید سؤال‌ها یا تست‌های ریاضی را حل کنیم؟ ببینید اگر توانستید حل کنید که کارتان درست است ولی اگر نشد تکلیف چیست؟ این‌جا نباید سریع جواب را از روی پاسخ‌نامه ببینید. خودتان را دست کم نگیرید. به ذهنتان مهلت بدهید. سعی کنید ارتباطی بین چیزهایی که می‌دانید و چیزهایی که باید به دست آورید برقرار کنید. مثال‌های حل‌شدهٔ جزوهٔ معلم یا درس‌نامهٔ کتاب‌ها را ببینید و راه‌حل را تا جایی که می‌توانید جلو بروید. اگر هنوز به جواب نرسیدید اشکالی ندارد، می‌توانید پاسخ را ببینید. اگر همهٔ این مراحل را طی کرده باشید یک «آهان اشکالم این‌ها بود» به خود خواهید گفت. به شما تبریک می‌گویم چون این‌جا یادگیری شما کامل شده است. بچه‌ها با این کارها آن مطلب، وارد حافظهٔ بلندمدت می‌شود و دیگر به این راحتی یادتان نمی‌رود. این است که من همیشه به بچه‌ها می‌گویم: هزار تمرینی که من برای شما حل کنم (البته که برای یادگیری اولیهٔ لازمه!) مثل آن یکی که خودتان حل می‌کنید نمی‌شود. آن را خودتان کشف کرده‌اید، جزئی از وجود شما شده است، لذتش هم مال خودتان است. حق ندارید خودتان را از چشیدن این لذت محروم کنید. تمام!

خب چند کلمه هم در مورد این کتاب بگویم. اول از همه این که درس‌نامه‌ها را حتماً بخوانید. سعی کرده‌ام با توضیحات کافی (نه اضافه) و تیپ‌بندی‌شده آن‌ها را تنظیم کنم. بعد نوبت به حل تمرین‌ها می‌رسد که الان گفتم چه کنید. مشابه همهٔ تمرین‌ها و مثال‌های درسی و امتحان‌نهایی‌ها را هم قرار داده‌ام، پس چاره‌ای جز نمرهٔ ۲۰ در امتحان‌نهایی ندارید! در آخر هر فصل یک آزمون جمع‌بندی از مهم‌ترین مباحث اون فصل داریم که خودتون رو محک بزنید. حل ویدیوئی این آزمون‌ها رو می‌تونید با اسکن QRcode موجود در شناسنامهٔ کتاب ببینید. دو امتحان ترم اول و چهار امتحان‌نهایی هم در انتهای کتاب گذاشته‌ام. برای‌نهایی حتماً حتماً (دارم می‌گم‌ها) آن‌ها را حل کنید چون سعی کرده‌ام دوباره تمام تمرین‌های مهم کتاب درسی پوشش داده بشود. خلاصه این که بخوانید و حالش را ببرید.

در پایان تشکر می‌کنم از همهٔ خیلی‌سبزی‌ها؛ از دکتر نصری و دکتر اسلامی به خاطر اعتماد دوباره. از ویراستاران محترم سرکار خانم نظری (انصافاً دقتشون از من بیشتر بود) خانم بهزادی و آقایان ابراهیم‌نژاد، رحیمی و صارمی و گروه لاپلاس برای ویرایش این کتاب. از همسر خوبم به خاطر همراهی صداره، از محمدمهدی و تسنیم و حسنا به خاطر شلوغ‌کاری! از خودم به خاطر نوشتن این کتاب، از شما برای خواندن کتاب، از پردیس به خاطر آب‌وهوای خوب (می‌فوام یه صفه پر شه که نم!) و از مسئولین محترم که با تلاش‌های شبانه‌روزی نگذاشتند قیمت دلار و سکه و ... افزایش پیدا کند تا من با آرامش خیال برای شما کتاب بنویسم.

دوست‌دار شما، دیداری

۱۴۰۱/۶/۱۵

# فهرست

## فصل اول: آشنایی با نظریه اعداد



۷	درس ۱: استدلال ریاضی
۷	درس ۲: بخش پذیری در اعداد صحیح - بخش اول (عاد کردن)
۱۵	درس ۲: بخش پذیری در اعداد صحیح - بخش دوم (قضیه تقسیم)
۲۱	درس ۲: بخش پذیری در اعداد صحیح - بخش سوم (افراز اعداد صحیح)
۲۳	درس ۲: بخش پذیری در اعداد صحیح - بخش چهارم (ب.م.م و ک.م.م)
۲۴	درس ۳: هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها - بخش اول (هم‌نهشتی)
۲۷	درس ۳: هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها - بخش دوم (باقی‌مانده تقسیم بر اعداد خاص)
۳۳	آزمون جمع‌بندی
۳۷	پاسخ سؤال‌های امتحانی
۳۸	

## فصل دوم: گراف و مدل‌سازی



۵۸	درس ۱: معرفی گراف، تعاریف و برخی خواص - بخش اول (آشنایی با گراف)
۵۸	درس ۱: معرفی گراف، تعاریف و برخی خواص - بخش دوم (انواع گراف)
۶۴	درس ۱: معرفی گراف، تعاریف و برخی خواص - بخش سوم (تعاریف)
۶۹	درس ۲: مدل‌سازی با گراف
۷۱	آزمون جمع‌بندی
۷۷	پاسخ سؤال‌های امتحانی
۷۸	

## فصل سوم: ترکیبیات (شمارش)



۹۰	درس ۱: مباحثی در ترکیبیات - بخش اول (مروری بر روش‌های مقدماتی شمارش)
۹۰	درس ۱: مباحثی در ترکیبیات - بخش دوم (حل معادله سیاله)
۹۵	درس ۱: مباحثی در ترکیبیات - بخش سوم (مربع لاتین)
۹۷	درس ۲: روش‌هایی برای شمارش - بخش اول (اصل شمول و عدم شمول)
۱۰۲	درس ۲: روش‌هایی برای شمارش - بخش دوم (اصل لانه کبوتری)
۱۰۸	آزمون جمع‌بندی
۱۱۲	پاسخ سؤال‌های امتحانی
۱۱۳	

### شماره صفحه سؤال شماره صفحه پاسخ

۱۲۷	۱۲۶	امتحان شماره (۱): نمونه امتحان نیم‌سال اول
۱۳۰	۱۲۹	امتحان شماره (۲): نمونه امتحان نیم‌سال اول
۱۳۴	۱۳۲	امتحان شماره (۳): نمونه امتحان نیم‌سال دوم - نهایی خردادماه ۱۴۰۱
۱۳۶	۱۳۵	امتحان شماره (۴): نمونه امتحان نیم‌سال دوم - نهایی خردادماه ۱۴۰۰
۱۳۸	۱۳۷	امتحان شماره (۵): نمونه امتحان نیم‌سال دوم - نهایی شهریورماه ۱۴۰۰
۱۴۰	۱۳۹	امتحان شماره (۶): نمونه امتحان نیم‌سال دوم - نهایی دی‌ماه ۱۴۰۰

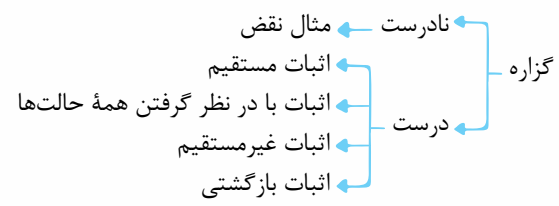


# آشنایی با نظریه اعداد

فصل اول

## ۱ استدلال ریاضی

حتماً از سال گذشته یادتان هست که «به هر جمله خبری که درست یا نادرست باشد، گزاره می‌گوییم.» خوب ما از کجا بفهمیم که درست است یا نادرست؟ در این درس قرار است به این موضوع بپردازیم. درستی گزاره‌های نادرست را با مثال نقض رد می‌کنیم و گزاره‌های درست را هم با چهار روش که در ادامه خواهید دید اثبات می‌کنیم.



### مثال نقض

**مثال نقض:** مثالی که نشان می‌دهد نتیجه‌گیری یا حدس کلی نادرست است.

مثلاً یکی از دوستان! در کشفیات اخیر خودش به این نتیجه رسیده که «عدد  $2^n + 3$  به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ، اول است.» ما می‌خواهیم بگوییم نه آقا داری اشتباه می‌کنی! کافی است  $n = 5$  قرار دهیم، چون  $2^5 + 3 = 35$  می‌شود که اول نیست. با این کار، کلیت حرف او رد می‌شود، یعنی او گفته بود برای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $2^n + 3$  اول است ما می‌گوییم نه خیر! برای هر عدد طبیعی، اول نیست این هم مثال نقض! نه این که هیچ وقت اول نباشد، مثلاً بعضی جاها (مثل  $n = 1, 2, 3, 4$ ) اول است و بعضی جاها اول نیست. برای این که چیزی را در ریاضی رد کنید باید یک مثال نقض بیاورید. (به دونه کافیه!)

### مثال پاسخ

**مثال** ارزش گزارهٔ «جمع هر دو عدد گنگ، گنگ است» را تعیین کنید. (نهایی فرداد ۹۹)

**پاسخ:** اگر بخواهیم نشان دهیم که گزاره نادرست است باید دو عدد گنگ پیدا کنیم که جمع آن‌ها گنگ نباشد؛ خوب مثلاً  $\sqrt{2}$  و  $-\sqrt{2}$  هر دو گنگ هستند، ولی  $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$  می‌شود که گویا است. حواستان باشد برای این که برای گزاره‌های شرطی مثال نقض ارائه کنید، باید مثالی بیاورید که در فرضیات مسئله، درست دربیاید ولی حکم را نقض کند.

**مثال:** نشان دهید گزاره «برای هر عدد طبیعی  $n$ ، عدد  $2^{2^n} + 1$  اول است» نادرست است.

**پاسخ:** باید یک عدد  $n$  پیدا کنیم به طوری که به ازای آن  $2^{2^n} + 1$  اول نباشد. به ازای  $n = 1, 2, 3, 4$  حاصل  $2^{2^n} + 1$  به ترتیب برابر ۵، ۱۷، ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ می‌شود که همگی اول هستند، صبر کنید نکند  $2^{2^n} = 3^n$  بنویسید! نه خیر وقتی پراتز نداریم باید از توان بالا شروع کنیم مثلاً اگر  $n = 3$  باشد  $2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$  می‌شود. گفتم پیدا کردن مثال نقض همیشه کار آسانی نیست! این مسئله یک مسئله تاریخی است. اصلاً تا مدت‌ها فکر می‌کرده‌اند که این دنباله، همیشه اعداد اول تولید می‌کند. بعد اوایل نشان داد که به ازای  $n = 5$  حاصل  $2^{2^5} + 1$  بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است، یعنی اول نیست. یادتان باشد، مثال نقض این گزاره  $n = 5$  است.

## اثبات مستقیم

آیا جمع دو عدد فرد و زوج، همیشه فرد می‌شود؟ خوب اجازه بدهید مثلاً  $3 + 2 = 1 + 2 = 11$  یا  $3 + 8 = 11$  یا  $12 + 15 = 27$  می‌شود. به نظر می‌رسد که بله این اتفاق می‌افتد! ولی چه جوری می‌توانیم مطمئن بشویم؟ آیا با مثال آوردن می‌توانیم درستی گزاره‌ای را ثابت کنیم؟ مسلماً نه! چون از کجا معلوم، شاید آن گزاره در آن مثال‌هایی که ما زده‌ایم درست درآمده، ولی به ازای برخی از مثال‌های دیگر که به ذهن ما نرسیده غلط باشد! پس باید درستی آن گزاره را در حالت کلی ثابت کنیم تا مطمئن بشویم که درست است نه این‌که عدد امتحان کنیم. خلاصه این‌که با مثال آوردن، چیزی ثابت نمی‌شود فقط این حدس برای ما حاصل می‌شود که گزاره احتمالاً درست است.

اما اثبات! خوب چیست؟ عددی که بر ۲ بخش‌پذیر است، پس عدد زوج را  $2k$  می‌گیریم. عدد فرد هم در تقسیم بر ۲، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد، پس عدد فرد را  $2k' + 1$  می‌گیریم. چرا  $2k + 1$  نگرفتم؟ چون خارج قسمت دو عدد در حالت کلی فرق دارند، پس اگر یکی را  $k$  گرفتم دیگری را  $k'$ . حالا:

$$2k + 2k' + 1 = 2\left(\frac{k + k'}{2}\right) + 1 = 2q + 1$$

جمع دو عدد به صورت  $2q + 1$  درآمد، یعنی فرد است. حالا دیگر مطمئن هستیم که جمع عدد فرد با عدد زوج، همواره فرد می‌شود.

**تعریف اثبات مستقیم:** روش اثباتی است که در آن به صورت مستقیم از فرضی فرض به درستی حکم می‌رسیم.

**نکته:** برای این‌که از اثبات مستقیم استفاده کنیم باید شکل اعداد را به درستی در نظر بگیریم:

عدد زوج	$2k$
عدد فرد	$2k + 1$
دو عدد زوج	$2k$ و $2k'$
دو عدد فرد	$2k + 1$ و $2k' + 1$

دو عدد متوالی	$n$ و $n + 1$
دو عدد زوج متوالی	$2n$ و $2n + 2$
دو عدد فرد متوالی	$2n + 1$ و $2n + 3$
عدد گویا	$\frac{a}{b}$ ( $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ )

## مثال و پاسخ

**مثال:** ثابت کنید جمع پنج عدد طبیعی متوالی بر ۵ بخش‌پذیر است.

**پاسخ:** خوب عدد طبیعی اول را  $n$  می‌گیریم. بعدی می‌شود  $n + 1$ . بعدی  $n + 2$  و ... پس داریم:

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5n + 10 = 5\left(\frac{n + 2}{1}\right) = 5q$$

جمع این ۵ تا عدد به صورت  $5q$  درآمد (۵ ضرب در یه عدد صحیح) پس مضرب ۵ است.

**مثال:** نشان دهید تفاضل مربعات دو عدد فرد متوالی، همواره بر ۸ بخش‌پذیر است.

**پاسخ:** تفاضل مربعات یعنی تفاضل دو تا مربع! عدد فرد اول را  $2k + 1$  می‌گیریم. چون گفته فرد متوالی، عدد فرد بعدی (دوتا بیشتره) به صورت  $2k + 3$  می‌شود. حالا داریم:

$$(2k + 3)^2 - (2k + 1)^2 = (4k^2 + 12k + 9) - (4k^2 + 4k + 1) = 8k + 8 = 8\left(\frac{k + 1}{1}\right) = 8q$$

**مثال:** الف) ثابت کنید اگر به ۴ برابر ضرب دو عدد طبیعی متوالی، یک واحد اضافه کنیم حاصل مربع کامل درمی‌آید.

ب) ثابت کنید اگر  $4k + 1$  مربع کامل باشد،  $k$  حاصل ضرب دو عدد متوالی است.

**پاسخ:** الف) ضرب دو عدد طبیعی متوالی به صورت  $n(n + 1)$  می‌شود. حالا باید ثابت کنیم  $4n(n + 1) + 1$  به صورت توان دوم یک عدد طبیعی است:

$$4n(n + 1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2$$

بله واقعاً مربع کامل است! کتاب درسی همین حکم را این‌جوری گفته «اگر  $k$ ، حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه  $4k + 1$  مربع کامل است»، فرقی نمی‌کند اثباتش دقیقاً به همین صورت است.

$$4k + 1 = a^2 \Rightarrow k = \frac{a^2 - 1}{4} = \frac{a - 1}{2} \times \frac{a + 1}{2}$$

**ب**

$4k + 1$  فرد است پس  $a^2$  نیز عددی فرد و  $a$  هم فرد است پس  $a - 1$  و  $a + 1$  زوج بوده است. کسرهای عددی صحیح هستند، اما  $\frac{a - 1}{2}$  و  $\frac{a + 1}{2}$  دو عدد متوالی هستند؛ چون اختلاف آن‌ها یک واحد است.

## اثبات‌ها در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها (روش اشباع)

فرض کنید می‌خواهیم ثابت کنیم «برای هر عدد طبیعی  $n$ ، حاصل  $n^2 - 3n + 7$  عددی فرد است».  
خب باید کاری کنیم که  $n^2 - 3n + 7$  به صورت  $2q + 1$  دربیاید. آیا همین‌جوری می‌توانیم با فاکتورگیری یا ... این کار را انجام بدهیم؟  
به نظر نمی‌آید که بتوانیم چنین کاری انجام بدهیم. من می‌گویم بالأخره این  $n$  از دو حال، خارج نیست (به اسم روش دقت‌کن!)  
یا فرد است یا زوج. این دو حالت را جداگانه برویم جلو تا در هر کدام به  $2q + 1$  برسیم:

$$\text{زوج } n \Rightarrow n = 2k \Rightarrow n^2 - 3n + 7 = (2k)^2 - 3(2k) + 7 = 4k^2 - 6k + 6 + 1 = 2(2k^2 - 3k + 3) + 1 = 2q + 1$$

$$\text{فرد } n \Rightarrow n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 - 3n + 7 = (2k + 1)^2 - 3(2k + 1) + 7 = 4k^2 + 4k + 1 - 6k + 4 = 4k^2 - 2k + 4 + 1 = 2(2k^2 - k + 2) + 1 = 2q + 1$$

**روش اشباع:** مسئله را به چند حالت که همهٔ حالت‌ها را پوشش می‌دهد تقسیم می‌کنیم و در هر کدام، ثابت می‌کنیم که حکم نتیجه می‌شود.

**هم‌ارزی روش اشباع:** بچه‌ها بیایید کمی منطقی هم صحبت کنیم. زوج بودن  $n$  را با  $p$  و فرد بودن  $n$  را با  $q$  و فرد بودن  $n^2 - 3n + 7$  را با  $r$  نمایش می‌دهیم. می‌خواهیم ثابت کنیم اگر  $p$  یا  $q$  برقرار باشد به  $r$  می‌رسیم یعنی:  $r \Rightarrow p \vee q$ . به جای آن، ثابت کردیم هم از  $p$  به  $r$  می‌رسیم و هم از  $q$  به  $r$ ؛ یعنی:  $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ . تعجب نکنید با استفاده از جدول ارزش یا جبر گزاره‌ها می‌توانید ثابت کنید:  $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

**نکته:** در حالت کلی برای این‌که حکم  $q$  را ثابت کنید، می‌توانید فرض را به  $n$  گزاره‌ها  $p_1, p_2, \dots, p_n$  تقسیم کرده و ثابت کنید:

$$p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n \Rightarrow q$$

$$(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \Rightarrow q \equiv (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \Rightarrow q)$$

از طرفی:

یعنی به جای آن، ثابت کنید از هر  $p_i$  (در هر حالت) می‌توانیم حکم  $q$  را نتیجه بگیریم.

## مثال و پاسخ

**مثال:** ثابت کنید: الف) ضرب دو عدد طبیعی متوالی همواره زوج است. ب) نشان دهید مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

(نوبتی فرورد ۹۹ و دی ۱۳۰۰)

**پاسخ:** الف) باید ثابت کنیم  $n(n + 1)$  همیشه زوج است. دو حالت می‌گیریم:

$$\text{زوج } n \Rightarrow n = 2k \Rightarrow n(n + 1) = 2k(2k + 1) = 2q$$

$$\text{فرد } n \Rightarrow n = 2k + 1 \Rightarrow n(n + 1) = (2k + 1)(2k + 2) = 2(2k + 1)(k + 1) = 2q$$

در هر دو حالت شد  $2q$ ، پس  $n$  چه زوج باشد چه فرد،  $n(n + 1)$  زوج می‌شود.

**ب** عدد فرد را  $2k + 1$  می‌گیریم:

$$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1 = 4(2q) + 1 = 8q + 1$$

گفته ثابت کنید مربع این عدد به صورت  $8q + 1$  درمی‌آید:  $8q + 1$

ضرب دو عدد متوالی زوج است.

بچه‌ها این نتیجه را حفظ باشید. بعداً خیلی به دردتان می‌خورد. البته در درس بعدی آن را یک‌جور دیگر هم ثابت می‌کنیم.

**مثال:** نشان دهید اگر  $n \in S$ ،  $A = \{3, 4, 7\}$ ،  $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  و  $n$  عدد  $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$  زوج باشد، آن گاه  $n \in A$ .

**پاسخ:** خوب بالاخره کل اعدادی که  $n$  می تواند باشد از ۲ تا ۷ است؛ پس بیابیم اینها را امتحان کنیم تا ببینیم چه موقع  $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$  زوج می شود:

$$n = 2 \Rightarrow \frac{4 \times 9}{4} = 9 \quad \times$$

$$n = 5 \Rightarrow \frac{25 \times 36}{4} = 225 \quad \times$$

$$n = 3 \Rightarrow \frac{9 \times 16}{4} = 36 \quad \checkmark$$

$$n = 6 \Rightarrow \frac{36 \times 49}{4} = 9 \times 49 \quad \times$$

$$n = 4 \Rightarrow \frac{16 \times 25}{4} = 100 \quad \checkmark$$

$$n = 7 \Rightarrow \frac{49 \times 64}{4} = 16 \times 49 \quad \checkmark$$

پس می بینید اگر  $n = 3, 4, 7$  باشد، عبارت داده شده زوج می شود؛ یعنی  $n \in A$ .

**نکته:** اگر عبارت  $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$  زوج باشد،  $n = 4k$  یا  $n = 4k + 3$  (دقت کنید اعداد ۳ و ۷ به صورت  $4k + 3$  و عدد ۴ به صورت  $4k$  است.)

**مثال:** ثابت کنید حاصل ضرب ۳ عدد طبیعی متوالی همواره بر ۳ بخش پذیر است.

**پاسخ:** سه عدد طبیعی متوالی را می توانیم  $n, n+1, n+2$  بگیریم. باید ثابت کنیم  $n(n+1)(n+2) = 3q$ . خوب  $n$  چه حالت هایی می تواند داشته باشد؟ اگر  $n$  بر ۳ تقسیم کنیم، باقی مانده ای برابر ۰، ۱ یا ۲ می تواند داشته باشد، پس سه حالت در نظر می گیریم:

$$n = 3k \quad 1) \quad n(n+1)(n+2) = 3k(3k+1)(3k+2) = 3q$$

$$n = 3k + 1 \quad 2) \quad n(n+1)(n+2) = (3k+1)(3k+2)(3k+3) = 3(3k+1)(3k+2)(k+1) = 3q$$

$$n = 3k + 2 \quad 3) \quad n(n+1)(n+2) = (3k+2)(3k+3)(3k+4) = 3(3k+2)(k+1)(3k+4) = 3q$$

پس ضرب سه عدد متوالی، همیشه مضرب ۳ است. در مثال قبلی ثابت کردیم مضرب ۲ هم است، پس ضرب ۳ عدد متوالی، همواره بر ۶ بخش پذیر است. اگر سه عدد طبیعی متوالی را به صورت  $n-1, n, n+1$  نمایش می دادیم، می شد:

$n^3 - n = (n-1)n(n+1)$  همیشه بر ۶ بخش پذیر است. این هم تو کتاب درسی است. اگر گفتند این را اثبات کنید دقیقاً مثل همین کارهایی است که انجام دادیم. بد نیست بدانید حاصل ضرب  $n$  عدد طبیعی متوالی، همیشه بر  $n!$  بخش پذیر است. (البته اثباتش با اطلاعات فعلی شما دشواره!)

**مثال:** ثابت کنید اگر  $a$  بر ۳ بخش پذیر نباشد، آن گاه  $a^2 = 3q + 1$ . سپس نتیجه بگیرید به ازای هر دو عدد صحیح  $x, y$  عبارت  $xy(x^2 - y^2)$  همواره بر ۳ بخش پذیر است.

**پاسخ:** با روش اشباع برویم. در مثال قبلی گفتیم  $a$  سه حالت می تواند داشته باشد، ولی چون گفته  $a$  مضرب ۳ نیست، پس فقط دو حالت می ماند:

$$a = 3k + 1 \quad 1) \quad a^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 = 3q + 1$$

$$a = 3k + 2 \quad 2) \quad a^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 = 3q + 1$$

پس اگر  $a$  مضرب ۳ نباشد،  $a^2$  به صورت  $3q + 1$  است. حالا اگر از  $x, y$  حداقل یکی بر ۳، بخش پذیر باشد که  $xy(x^2 - y^2)$  بر ۳ می خورد، اما اگر هیچ کدام بر ۳ بخش پذیر نباشند، طبق چیزی که الان ثابت کردیم مربع هر دو به صورت  $3q + 1$  هستند؛ پس:

$$xy(x^2 - y^2) = xy(3q + 1 - (3q' + 1)) = xy(3(q - q')) = 3t$$

## اثبات غیر مستقیم (برهان خلف)

گفتیم که هر گزاره یا درست است یا نادرست. حالا اگر من به شما بگویم یک گزاره نمی تواند نادرست باشد، چه نتیجه ای می گیرید؟

خوب نتیجه می گیریم درست است. این اساس روش برهان خلف یا اثبات غیرمستقیم است. روش کار به این صورت است که:

1) خلاف حکم (دقت کردی ملاحظه کلمه) را در نظر می گیریم. یعنی فرض می کنیم حکم نادرست باشد.

2) با قوانین منطق گزاره ها و دنباله ای از استدلال های درست به یک نتیجه غیرممکن یا نتیجه متضاد با فرض می رسیم.

۲ فرض نادرست بودن حکم باطل بوده و درستی خود حکم ثابت می‌شود.

مثلاً می‌خواهیم ثابت کنیم: اگر  $r$  عدد گویای ناصفر و  $x$  عددی گنگ باشد، آن‌گاه  $rx$  گنگ است.

۱ خلاف حکم را در نظر می‌گیریم یعنی فرض کنیم  $rx$  گویا باشد، پس  $rx = a$  که  $a$  گویا است.

۲ اما تقسیم دو عدد گویا  $(\frac{a}{r})$  که مخرج هم صفر نیست گویا است، پس  $x$  گویا است.

۳ به تناقض رسیدیم (ثابت کردیم  $x$  گویا است در صورتی که  $x$  گنگ بود)، پس خلاف حکم، باطل و خود حکم درست است.

## مثال و پاسخ

**مثال** ثابت کنید جمع عددی گویا با عددی گنگ، گنگ می‌شود.

**پاسخ** فرض کنید  $a$  عددی گویا و  $x$  عددی گنگ باشد. گفته ثابت کنید  $a + x$  گنگ است (حکم). باید خلاف حکم را در نظر بگیریم. یعنی « $a + x$  گنگ نیست، یعنی گویا است» حالا باید این را به تناقض برسانیم.

$a + x = b \Rightarrow x = b - a$   
 با اثبات مستقیم به راحتی ثابت می‌شود جمع و تفریق و ضرب و تقسیم (مخرج صفر نباشد) دو عدد گویا، گویا است (جمع دو تا کسر گویا، کسر گویا همیشه) پس  $b - a$  گویا است. از طرفی  $x$  گنگ بود. این یعنی به تناقض رسیده‌ایم. پس خلاف حکم (فرض خلف)، باطل و در نتیجه خود حکم درست است. معمولاً برای اثبات گنگ بودن اعداد از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

**نکته** در مورد گویا یا گنگ بودن جمع، تفریق و ضرب اعداد داریم:

	ضرب	جمع و تفریق (نوع اثبات)	هر دو گویا
گویا (اثبات مستقیم)	گویا (اثبات مستقیم)	گویا (اثبات مستقیم)	هر دو گویا
(اگر عدد گویا صفر باشد، صفر ولی ضرب گویای ناصفر در گنگ، گنگ است.)	گنگ (برهان خلف)	گنگ (برهان خلف)	یکی گویا و یکی گنگ
ممکن است گنگ یا گویا	ممکن است گنگ یا گویا	ممکن است گنگ یا گویا	هر دو گنگ

## مثال و پاسخ

**مثال** نشان دهید اگر  $n^2$  فرد باشد، آن‌گاه  $n$  هم فرد است.

**پاسخ** اگر بخواهیم به صورت مستقیم اثبات کنیم باید از  $n^2 = 2k + 1$  به  $n = 2q + 1$  برسیم، ولی خب شما را نمی‌دانم ایده‌ای به ذهن من نمی‌رسد! به صورت غیرمستقیم (با برهان خلف) ثابت کنیم خیلی راحت می‌شود. خلاف حکم می‌شود « $n$  فرد نیست»، یعنی  $n$  زوج است؛ پس:

$$n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2(\underbrace{2k^2}_q) = 2q$$

این آخری می‌گوید  $n^2$  زوج است در صورتی که فرض می‌گوید  $n^2$  فرد است، پس به تناقض رسیده‌ایم. پس خلاف حکم (فرض خلف)، باطل و خود حکم درست است.

**مثال**  $a, b, c, d$  چهار عدد طبیعی فرد هستند. نشان دهید معادله  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$  جواب ندارد.

**پاسخ** فرض کنیم معادله، دارای جواب باشد، یعنی اعداد فرد  $a, b, c, d$  وجود داشته باشند که در معادله صدق کنند.

$$\frac{bcd + acd + abd + abc}{abcd} = 1 \Rightarrow bcd + acd + abd + abc = abcd$$

با مخرج مشترک‌گیری داریم:

چون  $a, b, c, d$  فرد هستند  $abcd$  فرد می‌شود. از طرفی عبارت‌های سمت چپ نیز همگی فرد هستند، اما جمع چهار عدد فرد، زوج می‌شود. این یعنی به تناقض رسیده‌ایم چون سمت راست فرد ولی سمت چپ عددی زوج است، بنابراین فرض خلف باطل بوده و معادله در اعداد طبیعی فرد، جواب ندارد.

**مثال** نشان دهید اگر  $a^2 + b^2$  فرد باشد آن‌گاه  $a$  فرد است یا  $b$  فرد است.

**پاسخ** حکم گفته « $a$  فرد یا  $b$  فرد». اگر بخواهیم با برهان خلف برویم خلاف حکم با استفاده از قانون دموگان می‌شود « $a$  زوج و  $b$  زوج»، (یاد تونه دیگه  $p \sim q \Leftrightarrow \sim p \sim \sim q$ ) حالا:

$$a = 2k, b = 2k' \Rightarrow a^2 + b^2 = 4k^2 + 4k'^2 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k'^2}_q) = 2q$$

این یعنی  $a^2 + b^2$  زوج می‌شود در صورتی که فرض می‌گوید فرد است. تناقض حاصل، می‌گوید فرض خلف باطل و خود حکم درست است.



## مثال و پاسخ

**مثال:**  $a_1, a_2, a_3$  و  $b_1, b_2, b_3$  هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری هستند. ثابت کنید  $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)$  زوج است.

**پاسخ:** فرض کنیم  $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)$  زوج نباشد، یعنی فرد باشد. خب ضرب ۳ عدد، فرد شده است، پس هر سه تافرد بوده اند، یعنی  $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3$  همگی فرد بوده اند. جمع سه عدد فرد، فرد می شود، یعنی  $A = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3$  فرد است. از طرفی  $A = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 = (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)$  می شود، پس  $A = 2(a_1 + a_2 + a_3)$  شده، یعنی  $A$  زوج است. این تناقض نشان می دهد فرض خلف باطل و  $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)$  عددی زوج است.

**نکته:** دقیقاً با همین روش می توانستیم ثابت کنیم  $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$  نیز زوج است. برای ایجاد تناقض  $A = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) = 0$  عددی فرد است، اما:

## گزاره های هم ارز

**دو گزاره هم ارز:** دو گزاره  $P$  و  $Q$  را هم ارز گوئیم هرگاه ارزش یکسانی (هر دو درست یا هر دو نادرست) داشته باشند. **ترکیب دوشروطی:** ترکیب دوشروطی دو گزاره را به صورت  $q \Leftrightarrow p$  نمایش می دهیم. این گزاره وقتی درست است که  $p$  و  $q$  هر دو درست یا هر دو نادرست باشند. به عبارت دیگر ارزش های یکسانی داشته باشند.

**خب حالا یک سؤال:** اگر  $q \Leftrightarrow p \Leftrightarrow r \Leftrightarrow s$  درست و  $q$  هم درست باشد، چه نتیجه ای می گیریم؟ معلوم است که  $p$  هم باید درست باشد. اگر  $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r$  درست و  $S$  هم درست باشد چه طور؟ نتیجه می گیریم  $r, q$  و  $p$  هم ارزش و چون  $S$  درست است پس  $r, q$  و  $p$  هم درست می شوند. اساس کار اثبات با گزاره های هم ارز (یا اثبات بازگشتی) همین است. مثلاً می خواهیم ثابت کنیم:

«برای هر دو عدد مثبت  $a$  و  $b$  داریم:  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ » (همین دو بار تا حالا تو نهایی اومده)

یک مخرج مشترک می گیریم:  $\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2$ . ببینید الان ترکیب دوشروطی  $\frac{a^2 + b^2}{ba} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$  درست است؛ چون هر طرف که درست باشد نتیجه می شود طرف دیگر هم درست است (و نادرست هم باشه اون طرف نادرسته!). چون  $ab > 0$ ، با ضرب دو طرف در آن داریم  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  و با بردن  $2ab$  به طرف دیگر:  $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ . خب  $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$  پس می شود  $(a - b)^2 \geq 0$ . پس تا این جا شد:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{ba} \geq 2 \xleftarrow{ab > 0} a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$$

دوباره به سؤالی که در بالا جواب دادید دقت کنید.  $(a - b)^2 \geq 0$  همواره درست است. تمام ترکیب های دوشروطی هم درست هستند پس تمام گزاره های  $s, r, q$  و  $p$  هم درست هستند. حکم هم همان  $p$  بود که درستی آن ثابت شد.

روش اثبات حکم  $p$  با گزاره های هم ارز (اثبات بازگشتی): سعی می کنیم با اعمال دوطرفه، ضرب، تقسیم، جمع و تفریق، ترکیب های درست دوشروطی  $r \Leftrightarrow q \Leftrightarrow p$  بسازیم تا جایی که به یک رابطه همواره درست برسیم. چون آخرین گزاره همواره درست و ترکیب های دوشروطی هم درست هستند. پس هم گزاره ها هم ارزش بوده و هم حکم  $p$  درست می شود (یعنی ثابت می شه).

**نکته:** درستی نامساوی ها معمولاً به روش گزاره های هم ارز (اثبات بازگشتی) ثابت می شود.

## مثال و پاسخ

**مثال:** برای هر دو عدد حقیقی  $a, b$  ثابت کنید  $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$ . (نهایی دی ۹۷ و شهریور ۹۸)

**پاسخ:** از گزاره های هم ارز کمک می گیریم و سعی می کنیم حکم را به یک عبارت همواره درست برسانیم. عبارت های همواره درستی که در این جا ظاهر می شوند معمولاً به صورت جمع چند عبارت درجه دوم است. در اتحاد مربع،  $2ab$  ظاهر می شود پس ضرب دو طرف در ۲، ایده خوبی می تواند باشد:

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \xrightarrow{\times 2} 2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2a + 2b \Leftrightarrow a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + 1 + 1 - 2ab - 2a - 2b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (a - b)^2 \geq 0$$

این آخری همواره درست است، پس طبق روش اثبات بازگشتی حکم ثابت می شود.

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

**مثال** فرض کنید  $a, b, c$  سه عدد حقیقی مثبت باشند. ثابت کنید:

**پاسخ** آن پرانتزهای سمت چپ را ضرب کرده و ساده می‌کنیم تا ببینیم چه درمی‌آید:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \Leftrightarrow 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 \geq 9$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} - 2\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2\right) \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2}_{(بازکن\ بین\ همون\ میشه)} + \left(\sqrt{\frac{a}{c}} - \sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{b}{c}} - \sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2 \geq 0$$

آخرین رابطه همواره درست بوده و همه گزاره‌ها هم‌ارز هستند، پس حکم ثابت می‌شود.

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{ab}}$$

**مثال** دو عدد حقیقی مثبت هستند. ثابت کنید  $a, b$  هر دو مثبت هستند، پس  $\sqrt{ab}$  تعریف شده و مثبت است. حالا:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{b}} \geq \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{ab}} \xrightarrow{\times \sqrt{ab}} \sqrt{b} + \sqrt{a} \geq \sqrt{a+b}$$

حالا چون هر دو طرف مثبت هستند، می‌توانیم دو طرف را به توان دو برسانیم ( $a, b > 0$  یا  $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ )

$$\Leftrightarrow (\sqrt{b} + \sqrt{a})^2 \geq (\sqrt{a+b})^2 \Leftrightarrow b+a+2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq a+b \Leftrightarrow 2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0$$

این آخری همواره درست است. همه گزاره‌ها هم‌ارز هستند پس حکم ثابت می‌شود.

**مثال** آیا ترکیب  $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$  درست است؟  $a, b$  چه شرطی داشته باشند تا این ترکیب دوشروطی درست باشد؟ (نهایی شهریور ۹۹ با تغییر)

**پاسخ** اگر  $a < b$  باشد می‌توانیم الزاماً بگوییم  $a^2 < b^2$ ؟ خب نه! مثلاً  $1 < 3$  است، ولی  $1 > 9$ .

پس  $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$  نادرست است. برعکس هم در حالت کلی نادرست است. اما اگر  $a, b$  هیچ‌کدام منفی نباشند، این ترکیب

دوشروطی درست است. خلاصه این‌که اگر  $a, b \geq 0$  باشند:  $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$  درست است.

خوب است یک جمع‌بندی روی چهار روش اثبات داشته باشیم:

نوع اثبات	روش کار	کاربرد
مستقیم	از درستی فرض به درستی حکم می‌رسیم.	از زوج یا فرد بودن اعداد به درستی حکم می‌رسیم.
در نظر گرفتن همه حالت‌ها	$n$ را حالت‌بندی می‌کنیم (مثلاً زوج و فرد) و در هر کدام به درستی حکم می‌رسیم.	برای هر $n$ می‌خواهیم حکمی را ثابت کنیم.
برهان خلف	خلاف حکم را به تناقض می‌رسانیم.	اثبات گنگ بودن اعداد - هر جا که اثبات مستقیم دشوار باشد.
بازگشتی	حکم را با اعمال دوطرفه به یک رابطه همواره درست می‌رسانیم.	نامساوی‌ها

## سؤال‌های امتحانی

۱- جای خالی را با عبارتهای مناسب تکمیل کنید.

(الف) برای اثبات نادرستی یک گزاره از ..... استفاده می‌کنیم.

(نهایی دی ۱۴۰۰)

(ب) حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ عددی ..... است. (گویا/ گنگ)

(پ) میانگین حسابی دو عدد  $x$  و  $y$  برابر ..... و میانگین هندسی دو عدد  $x$  و  $y$  برابر ..... است.

(ت) اگر  $7ab$  عددی فرد باشد، حاصل  $a^2 + b^2$  عددی ..... است.

(ث) در روش برهان خلف از خلاف ..... به ..... می‌رسیم.

۲- گزاره‌های زیر را با ارائه مثال نقض مناسب رد کنید.

(نهایی شهریور ۹۸)

(الف) برای هر عدد طبیعی  $n$  بزرگ‌تر از ۱، عدد  $2^n - 1$  اول است.

(ب) معکوس هر عدد مثبت، بزرگ‌تر یا مساوی خودش است.

(پ) ضرب دو عدد گنگ غیرمساوی، عددی گنگ است.

(ت) ضرب هر عدد گویا در عددی گنگ، گنگ می‌شود.

۳- نادرستی گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

(الف) اگر  $\alpha + \beta$  گنگ باشد،  $\alpha - \beta$  هم گنگ است. (ب) اگر  $\alpha, \beta$  دو عدد گنگ غیرمساوی باشند،  $\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$  گنگ است.

(پ) اگر  $a, b$  دو عدد حقیقی باشند که  $ab = 0$ ، آن‌گاه  $a = 0 \wedge b = 0$ . (ت) اگر  $A \cap B = A \cap C$  باشد، آن‌گاه  $B = C$ .

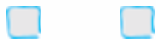
(نوبتی شهریور ۹۹)

(ث) برای هر دو عدد حقیقی و مثبت  $x, y$ :  $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ .



۴- درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

(نوبتی شهریور ۹۹)



(الف) اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشد و  $ab = 0$ ، آن‌گاه  $a = 0$  یا  $b = 0$ .

(نوبتی فرورد ۱۴۰۰)



(ب) هیچ دو عدد صحیحی مانند  $x$  و  $y$  وجود ندارند که رابطه  $x^2 + y^2 = (x+y)^2$  برقرار باشد.

(نوبتی دی ۹۷)



(پ) اگر  $k$  حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه  $k+1$  مربع کامل است.

۵- درستی گزاره‌های زیر را به صورت مستقیم ثابت کنید.

(مشابه تمرین کتاب)

(الف) جمع دو عدد گویا، گویا است.

(ب) اگر  $n$  عددی فرد باشد، مجموع  $n$  عدد طبیعی متوالی بر  $n$  بخش پذیر است.

(مشابه تمرین کتاب)

(پ) میانگین هفت عدد طبیعی متوالی، همان عدد وسطی می‌شود.

(ت) اگر  $a$  مضرب ۳ باشد، آن‌گاه  $a(a+3)$  بر ۱۸ بخش پذیر است.

(نوبتی فرورد ۱۴۰۱)

(ث) اگر مربع عددی فرد را با ۳ برابر عددی زوج جمع کنیم، حاصل فرد می‌شود.

(ج) برای هر عدد طبیعی زوج  $n$ ،  $n^2 - 5n + 7$  عددی فرد است.

۶- گزاره‌های زیر را ثابت کرده یا با ارائه مثال نقض آن‌ها را رد کنید.

(الف) به ازای هیچ دو عدد اول  $a, b$ ، عدد  $a+b$  اول نمی‌شود.

(مشابه تمرین کتاب)

(ب) اگر از مکعب عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل عددی زوج می‌شود.

(پ) مجموع سه عدد طبیعی فرد متوالی همواره بر ۳ بخش پذیر است.

(ت) اگر  $a, b, c$  سه عدد طبیعی باشند،  $a\sqrt{bc}$  گنگ است.

(ث) ضرب ۳ عدد زوج متوالی بر ۲۴ بخش پذیر است.

(مشابه تمرین کتاب)

(ج) اگر  $a, b$  دو عدد صحیح و  $3ab$  عددی فرد باشد،  $a^2 + b^2$  عددی زوج است.

۷- ثابت کنید حاصل ضرب ۳ عدد صحیح متوالی که عدد وسطی فرد است بر ۲۴ بخش پذیر است.

۸- گزاره‌های زیر را ثابت کنید. (به روش اشباع)

(مشابه تمرین کتاب)

(الف) برای هر عدد طبیعی  $n$ ، عبارت  $n^2 + 5n - 7$  عددی فرد است.

(ب) به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ، عدد  $n^2 + 2$  بر ۴ بخش پذیر نیست.

(مشابه تمرین کتاب)

(پ) اگر  $n$  عددی طبیعی و  $\frac{n(n+1)}{4}$  زوج باشد،  $n = 4q$  یا  $n = 4q + 3$ .

۹- گزاره «اگر  $b = 0$  یا  $a = 1$  باشد، آن‌گاه  $a = 1$  یا  $b = 0$ » را ثابت کنید.

(مشابه تمرین کتاب)

۱۰- فرض کنیم  $A = \{3, 4, 5\}$  و  $S = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ، اگر  $\frac{n^2(n^2-1)^2}{36}$  زوج باشد و  $n \in S$ ، ثابت کنید  $n \in A$ .

(مشابه تمرین کتاب)

۱۱- ثابت کنید معکوس هر عدد گنگ، عددی گنگ است.

۱۲- می‌دانیم  $\sqrt{2}$  گنگ است. ثابت کنید  $\sqrt{2} + 2$  نیز گنگ است.

۱۳- می‌دانیم  $\sqrt{2}$  گنگ است. ثابت کنید  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  نیز عددی گنگ است.

۱۴- فرض کنید  $n$  عددی طبیعی و  $3n - 2$  عددی فرد باشد. ثابت کنید  $n$  نیز فرد است.

(مشابه تمرین کتاب)

۱۵- ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۱۶- (الف) فرض کنید  $\alpha, \beta$  دو عدد گنگ باشند به طوری که  $\alpha + \beta$  گویا باشد. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید  $\alpha - \beta$  گنگ است.

(نوبتی دی ۹۹ و دی ۱۴۰۰)

(ب) اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو عدد گنگ باشند ولی  $\alpha + \beta$  گویا باشد، ثابت کنید  $\alpha + 2\beta$  گنگ است.

(نوبتی دی ۹۷)

۱۷- فرض کنید  $a$  عدد گویای غیرصفر و  $x$  عددی گنگ باشد. ثابت کنید  $ax$  گنگ است.

(مشابه تمرین کتاب)

۱۸-  $a$  و  $b^2$  دو عدد گنگ هستند به طوری که  $ab$  عددی گویا است. ثابت کنید  $\frac{a}{b}$  گنگ است.

(مشابه تمرین کتاب)

۱۹- نشان دهید اگر ضرب دو عدد طبیعی  $a, b$  زوج باشد، آن‌گاه  $a$  زوج یا  $b$  زوج بوده است.

۲۰- (الف) همه جواب‌های معادله  $a^2 + b^2 = (a+b)^2$  را به دست آورید.

(مشابه تمرین کتاب)

(ب) همه جواب‌های طبیعی معادله  $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  را در صورت وجود به دست آورید.

۲۱-  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  و  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  همان اعداد ولی با ترتیب دیگری هستند.

(مشابه تمرین کتاب)

(مثلاً ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ و ۳, ۲, ۱, ۵, ۴, ۳) ثابت کنید  $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_5 - b_5)$  عددی زوج است.

(مشابه تمرین کتاب)

۲۲- کدام یک از ترکیب‌های دوشروطی زیر درست و کدام یک نادرست است؟ چرا؟

الف)  $n^2$  زوج است اگر و فقط اگر  $n$  زوج باشد. (ب)  $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$

پ)  $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$  (ت)  $x^3 \leq x^2 \Leftrightarrow x \leq 1$

۲۳- احکام زیر را ثابت کنید.

(نهایی فرورد ۹۸ و شهریور ۹۹)

الف) ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست.

به  $\frac{x+y}{2}$  میانگین حسابی دو عدد و به  $\sqrt{xy}$  میانگین هندسی دو عدد می‌گوییم.

(مشابه نوبی دی ۹۸)

ب) اگر  $a < 0$  باشد، آن‌گاه  $-\frac{1}{a} \leq a + \frac{1}{a}$ .

(مشابه تمرین کتاب)

پ) سه عدد حقیقی هستند. ثابت کنید:  $3 + a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(a + b + c)$

ت)  $a, b$  دو عدد حقیقی مثبت هستند. داریم:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ .

ث)  $x, y$  دو عدد حقیقی مثبت هستند. داریم:  $x^2 y^2 \leq \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2$ .

۲۴- احکام زیر را ثابت کنید.

(مشابه تمرین کتاب)

الف)  $a, b, c$  سه عدد حقیقی هستند. ثابت کنید:  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ .

ب) برای اعداد حقیقی نامنفی و هم‌علامت  $a, b$  ثابت کنید:  $\frac{\Delta a - 3b}{b} \geq \frac{-4a - \Delta b}{2a}$ .

پ) برای هر دو عدد حقیقی  $a, b$  ثابت کنید:  $a^2 - ab + b^2 \geq 0$ .

(مشابه تمرین کتاب)

۲۵- به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌هاست.

(نهایی فرورد ۱۳۰۰)

۲۶- برای هر دو عدد حقیقی و مثبت  $x, y$  داریم:  $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$ .

۲۷- برای هر عدد حقیقی  $a$  ثابت کنید:  $\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 2$ .

۲۸- گزاره‌های درست را ثابت کرده و برای گزاره‌های نادرست مثال نقض ارائه کنید.

الف) برای هر عدد حقیقی  $x$  داریم:  $x^4 + 1 \geq x^3 + x$ .

ب) اگر  $x$  گنگ باشد،  $4 + 18x + 3x^2$  نیز گنگ است.

پ) ضرب هر چهار عدد طبیعی متوالی از مربع کامل یک واحد کم‌تر است.

(مشابه تمرین کتاب)

۲۹- ثابت کنید  $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ .

۳۰- ثابت کنید اگر  $x, y$  و  $\sqrt{x} + \sqrt{y}$  گویا باشند، آن‌گاه  $\sqrt{x}$  و  $\sqrt{y}$  هر دو گویا هستند.

## بخش پذیری در اعداد صحیح - بخش اول

### رابطه عادکردن (شمردن)

عدد ۶ را در نظر بگیرید. ۶ بر ۲ بخش‌پذیر است. چرا؟ چون عددی صحیح، مثل ۳ وجود دارد که  $2 \times 3 = 6$  می‌شود. این را این‌جوری می‌نویسیم  $2 \mid 6$  و می‌خوانیم «عدد ۲، عدد ۶ را عاد می‌کند یا می‌شمرد یا ۶ بر ۲ بخش‌پذیر است» یا مثلاً  $7 \mid -14$  چون  $7 \times (-2) = -14$  می‌شود، ولی  $5 \nmid 2$  چون عدد صحیحی وجود ندارد که در ۲ ضرب شده و حاصل برابر ۵ شود. در حالت کلی داریم:

تعریف رابطه عادکردن:  $a$  و  $b$  دو عدد صحیح هستند؛ می‌گوییم  $a$ ، عدد  $b$  را عاد می‌کند (می‌شمرد) و می‌نویسیم  $a \mid b$  هرگاه عدد صحیحی مثل  $q$  وجود داشته باشد که  $aq = b$ . به زبان ریاضی:

$$a \mid b \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}; aq = b$$

تکرار همه اعدادی مثل  $a, b$  و  $x \dots$  که در این فصل با آن‌ها سروکار داریم، صحیح هستند.

•  $17 \mid 17$  چون  $17 = 1 \times 17$ . شبیه همین  $17 \mid -17$  چون  $17 = (-1) \times (-17)$ . اصلاً یک چیزی  $\pm 1$  همه اعداد را عاد می‌کنند. پس  $\pm 1 \mid a$ .

•  $3 \mid 3$  یا  $7 \mid -7$  در حالت کلی هر عددی، خودش و قرینه‌اش را عاد می‌کند یعنی  $\pm a \mid \pm a$ .

۱- الف) مثال نقض

ب) ضرب عدد گویای ناصفر در عدد گنگ، گنگ است.

$$\text{پ) } \sqrt{xy} - \frac{x+y}{2}$$

ت)  $\sqrt{ab}$  فرد باشد،  $b$  و  $a$  فرد پس  $b^2$  و  $a^2$  هم فرد ولی  $a^2 + b^2$  زوج است.

ث) حکم - خلاف فرض یا امر بدیهی

۲- الف) اگر  $n = 4$  بگیریم،  $15 = 4^2 - 1$  می‌شود که اول نیست.

ب) معکوس عدد ۳ برابر  $\frac{1}{3}$  می‌شود، اما  $\frac{1}{3} \not\geq 3$ .

پ) دو عدد گنگ را  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt{8}$  بگیریم، اما  $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = 4$  می‌شود که عددی گویا است.

ت) عدد گویا را صفر و عدد گنگ را  $\sqrt{2}$  می‌گیریم.  $0 \times \sqrt{2} = 0$  می‌شود که عددی گویا است.

۳- در گزاره‌های شرطی باید مثالی بزنیم که در فرض درست دربیاید ولی در حکم غلط باشد تا ترکیب شرطی نادرست باشد.

الف)  $\alpha = \beta = \sqrt{2}$  بگیریم  $\alpha + \beta = 2\sqrt{2}$  گنگ می‌شود، ولی  $\alpha - \beta = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$  گنگ نبوده و گویا است.

ب) اول دقت کنید که  $\frac{\alpha + \beta}{2\beta} = \frac{\alpha}{2\beta} + \frac{1}{2}$  می‌شود. اگر  $\alpha = \sqrt{8}$  و  $\beta = \sqrt{2}$  بگیریم داریم:

$$\frac{\alpha}{2\beta} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

(که گویا شد)

پ) اگر  $a = 0$  و  $b = 1$  بگیریم  $ab = 0$  می‌شود، ولی  $a = 0 \wedge b = 0$  نادرست است. چرا؟

ترکیب عطفی وقتی درست می‌شود که هر دو درست باشند. در این مثالی که زدیم  $a = 0$  درست است ولی  $b = 0$  نه! توجه کنید که اگر این جوری نوشته بود « $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ » درست می‌شد، یعنی اگر ضرب دو عبارت صفر باشد، نتیجه می‌گیریم حداقل یکی برابر صفر است، یعنی

اولی صفر بوده است یا دومی.

ت) اگر  $A = \{1, 2\}$ ،  $B = \{1, 3\}$  و  $C = \{1, 4\}$  بگیریم  $A \cap B = A \cap C$  می‌شود ولی  $B \neq C$ .

ث) کافی است  $x = 9$ ،  $y = 4$  بگیریم  $x + y = 9 + 4 = 13$ ،  $\sqrt{9+4} = \sqrt{13} \neq \sqrt{9} + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5$ .

۴- الف) درست است. با در نظر گرفتن همه حالت‌ها حکم را ثابت می‌کنیم. دو حالت داریم، بالآخره  $a = 0$  یا  $a \neq 0$ :

۱) اگر  $a = 0$  باشد که حکم ثابت شده است.

$$ab = 0 \xrightarrow{\times \frac{1}{a}} b = 0$$

۲) اگر  $a \neq 0$  باشد، با ضرب دو طرف رابطه  $ab = 0$  در  $\frac{1}{a}$  داریم:

پس باز هم حکم نتیجه می‌شود.

ب) نادرست است.  $x = y = 0$  وجود دارد.

پ) درست است. اگر  $k = n(n+1)$  بگیریم، داریم:

$$4k + 1 = 4n(n+1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$$

۵- الف) مجموعه اعداد گویا به صورت  $Q = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$  تعریف می‌شود، یعنی مجموعه اعداد گویا شامل کسرهایی هستند که صورت

و مخرج عدد صحیح بوده و مخرج مخالف صفر باشد. فرض کنیم  $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$  گویا باشند. ( $d, b \neq 0$ )

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

چون  $a, b, c, d$  صحیح هستند، صورت و مخرج صحیح هستند و چون  $b$  و  $d$  هیچ‌کدام صفر نیستند  $bd \neq 0$ ، پس  $\frac{ad+bc}{bd}$  حتماً عددی گویا است.

ب)  $n$  عدد طبیعی متوالی را  $n, n+1, n+2, \dots, n+(n-1)$  می‌گیریم. حالا: (چرا تا  $n-1$  رفت؟ ببین از  $n+0$  رفت تا  $n+(n-1)$ )

$$n + (n+1) + (n+2) + \dots + n + (n-1) = n \times n + (\underbrace{1+2+\dots+n-1}_{\text{مجموع } n-1 \text{ جمله دنباله حسابی}}) = n^2 + \frac{(n-1)(n)}{2}$$

$n^2 + q(n) = n \underbrace{(n+q)}_{q'}$  عددی فرد است، پس  $n-1$  زوج بوده یعنی  $q = \frac{n-1}{2}$ ؛ پس:

پ) هفت عدد طبیعی را به صورت  $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6$  در نظر می‌گیریم. میانگین این‌ها می‌شود:

$$\frac{n + n+1 + n+2 + n+3 + n+4 + n+5 + n+6}{7} = \frac{7n+21}{7} = n+3$$

یعنی میانگین برابر عدد وسطی می‌شود. در حالت کلی میانگین تعداد فردی عدد، که تشکیل دنباله حسابی می‌دهند، برابر همان عدد وسطی می‌شود.

ت) گفته  $a$  مضرب  $3$  باشد، پس  $a = 3k$  می‌گیریم.  $a(a+3) = 3k(3k+3) = 3k(3(k+1)) = 9k(k+1) = 9(2q) = 18q$   
 (ث) عدد فرد را  $2k+1$  و عدد زوج را  $2q$  می‌گیریم. حالا داریم:

$$(2k+1)^2 + 3(2q) = 4k^2 + 4k + 1 + 6q = 2(2k^2 + 2k + 3q) + 1 = 2q' + 1$$

$$n = 2k \Rightarrow (2k)^2 - 5(2k) + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1 = 2(2k^2 - 5k + 3) + 1 = 2q + 1 \quad \text{ج}$$

۶- الف) اگر بخواهیم این را رد کنیم باید دو عدد اول پیدا کنیم که جمع آن‌ها اول بشود. خوب خیلی ساده  $a = 2$  و  $b = 3$  می‌گیریم. (پس دو عدد اول  $a, b$  وجود دارد به طوری که  $a + b$  هم اول بشود).

ب) عدد فرد به هر توانی برسد، فرد می‌شود حالا اگر یک واحد کم کنیم زوج می‌شود. این را ثابت می‌کنیم:

$$(2k+1)^3 - 1 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 - 1 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) = 2q$$

پ) اولین عدد طبیعی فرد اول را  $2k+1$  می‌گیریم. بعدی دو واحد بیش‌تر است پس عدد فرد بعدی  $2k+3$  و بعدی  $2k+5$  می‌شود. حالا:  
 $2k+1+2k+3+2k+5 = 6k+9 = 3(2k+3) = 3q$

ت) کافی است  $a = 1$  و  $b = c = 2$  بگیریم تا  $a\sqrt{bc} = 2$  بشود. این مثال نقض یعنی چیزی که گفته غلط است.

ث) به نظر می‌رسد که درست باشد (هندتا عدد امتحان کنین!) اولین زوج اول را  $2k$ ، بعدی را  $2k+2$  و بعدی را  $2k+4$  می‌گیریم. حالا:

$$(2k)^2 \cdot (2k+2) \cdot (2k+4) = 8 \cdot \frac{k(k+1)(k+2)}{3} = 8(3q) = 24q$$

ضرب ۳ عدد متوالی مضرب ۶ و در نتیجه مضرب ۳ است.

ج) گفته  $ab$  عددی فرد باشد، پس  $a, b$  باید عددی فرد باشند (تا ضربشون فرد بشه)، یعنی  $a = 2k+1$  و  $b = 2q+1$ . حالا:

$$a^2 + b^2 = (2k+1)^2 + (2q+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4q^2 + 4q + 1 = 2(2k^2 + 2k + 2q^2 + 2q + 1) = 2t$$

۷- عدد فرد وسطی را  $2k+1$  می‌گیریم. یکی بیش‌تر  $2k+2$  و یکی کم‌تر  $2k$  می‌شود. حالا داریم:

$$(2k)(2k+1)(2k+2) = 4k(k+1)(2k+1) = 4(2q)(2k+1) = 8q(2k+1)$$

ضرب دو عدد متوالی زوج است.

از طرفی ضرب ۳ عدد متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است. پس ضرب این سه عدد هم مضرب ۳ بوده و هم مضرب ۸، یعنی بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

۸- الف) دو حالت در نظر می‌گیریم.  $n$  زوج باشد یا فرد:

$$n^2 + 5n - 7 = (2k)^2 + 5(2k) - 7 = 4k^2 + 10k - 7 = 4k^2 + 10k - 8 + 1 \quad \text{پس: } n = 2k \quad (1)$$

$$= 2(2k^2 + 5k - 4) + 1 = 2q + 1 \Rightarrow \text{حاصل فرد است.}$$

$$n^2 + 5n - 7 = (2k+1)^2 + 5(2k+1) - 7 = 4k^2 + 4k + 1 + 10k + 5 - 7 = 4k^2 + 14k - 1 \quad \text{پس: } n = 2k+1 \quad (2)$$

$$= 4k^2 + 14k - 1 = 4k^2 + 14k - 2 + 1 = 2(2k^2 + 7k - 1) + 1 = 2q + 1 \Rightarrow \text{حاصل فرد است.}$$

پس در دو حالت، حاصل عددی فرد است، این یعنی به ازای هر عدد طبیعی  $n$  حاصل فرد می‌شود.

ب) دو حالت می‌گیریم.  $n$  زوج باشد یا فرد:

$$1) n = 2k \Rightarrow n^2 + 2 = (2k)^2 + 2 = 4k^2 + 2 = 4q + 2$$

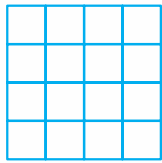
$$2) n = 2k+1 \Rightarrow n^2 + 2 = (2k+1)^2 + 2 = 4k^2 + 4k + 3 = 4\left(\frac{k^2+k}{2}\right) + 3 = 4q + 3$$

پس در هیچ‌کدام از دو حالت،  $n$  به صورت  $4q$  در نمی‌آید (باقی‌مانده دارد)، پس هیچ‌گاه  $n^2 + 2$  بر ۴ بخش‌پذیر نمی‌شود.

پ) دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$1) n \text{ زوج} \Rightarrow n = 2k \Rightarrow A = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1) \xrightarrow[\text{زوج باشد } k \text{ باید زوج باشد}]{\text{پس برای این که } A} k = 2q$$

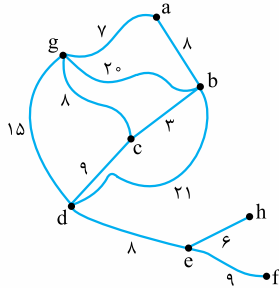
$$\Rightarrow n = 2k = 4q \quad (\text{پس این با کم نتیجه می‌شه!})$$



۷۴- با ذکر دلیل، ثابت کنید همه خانه‌های صفحه شطرنجی  $4 \times 4$  مقابل با دو وزیر احاطه می‌شود.

۷۵- گراف  $\Delta_k$  رأسی که  $\gamma(G) = 2k$  باشد رسم کنید که  $\delta = 2$  باشد.

۷۶- نقشه مقابل، نقشه چند منطقه و جاده‌های بین آن‌ها است که مسافت بین مناطق در آن مشخص شده است. قصد داریم چند بیمارستان طوری احداث کنیم که فاصله هر منطقه تا بیمارستان از ۱۰ کیلومتر بیشتر نباشد. حداقل تعداد بیمارستان و محل احداث آن‌ها را به وسیله گراف مشخص کنید. (مشابه کتاب)



۷۷-  $n$  کارمند از یک شرکت قرار است با چند تاکسی به محل بروند و هر ۴ نفر به یک تاکسی نیاز دارند. حداقل چند تاکسی مورد نیاز است؟ (مشابه کتاب)

## آزمون جمع‌بندی

ردیف	آزمون جمع‌بندی	رشته ریاضی فیزیک	مدت امتحان: ۹۰ دقیقه	Kheilisabz.com	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) گراف ساده $\Delta_5$ رأس ایزوله وجود ندارد. ب) گراف غیر تهی منتظم از مرتبه ۱۱ حداقل ۱۱ یال دارد. پ) گراف $C_n$ مثال نقض رابطه $\gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ است. ت) گراف همبند از مرتبه $p = 9$ و $\Delta = 5$ حداقل ۹ یال دارد.			<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	۱
۲	گراف $G$ به صورت مقابل را در نظر گرفته و جای خالی را با عبارتهای مناسب تکمیل کنید. الف) اگر $N_G(e) = \{c, d, x\}$ باشد، $x$ همان ..... است. ب) یک مسیر $e-d$ به طول ۴ به صورت ..... است. پ) گراف $\bar{G}$ تعداد ..... یال دارد.				۱
۳	در یک جمع ۷ نفر حضور دارند. می‌دانیم هر فرد حداقل با ۴ نفر دیگر دست داده است. ثابت کنید امکان ندارد که دقیقاً یک نفر با ۵ نفر دست داده باشد.				۱
۴	در یک گراف $k$ -منتظم تعداد یال‌ها هفت تا بیشتر از تعداد رأس‌ها است. $k$ را به دست آورده و یک نمونه از گراف رسم کنید.				۱
۵	مرتبه یک گراف کامل از ربع اندازه گراف، ۱۴ واحد کم‌تر است. مرتبه، اندازه و درجه رأس‌ها در این گراف را به دست آورید.				۱
۶	با اضافه کردن فقط دو یال، کاری کنید که گراف مقابل فقط دورهایی به طول ۴، ۵، ۶، ۷ و ۹ داشته باشد؛ سپس این دورها را بنویسید.				۱/۵
۷	عدد احاطه‌گری، گراف‌های زیر را به دست آورید. (با ذکر دلیل) الف) ب)				۱
۸	در گراف $G$ از مرتبه ۹ برای هر رأس $V_i$ مجموعه $N_G[V_i]$ سه عضو دارد. با ذکر دلیل مشخص کنید عدد احاطه‌گری گراف چه مقداری ممکن است داشته باشد.				۱/۵
۹	همه مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال برای گراف $P_6$ را بنویسید. (گراف $P_n$ را رسم و نام‌گذاری کنید).				۱
	جمع نمرات				۱۰

# ترکیبیات (شمارش)



## ۱ مباحثی در ترکیبیات - بخش اول

در سال‌های قبل با چند روش مهم شمارش مثل اصل ضرب، اصل جمع، تبدیل و ترکیب آشنا شدید. در این درس می‌خواهیم چند روش مهم دیگر بیان کنیم که با استفاده از آن‌ها می‌توانید حالت‌های انجام کارهای پیچیده‌تری را شمارش کنید.

### مروری بر روش‌های مقدماتی شمارش

قبل از این‌که بخواهیم مطالب این درس را با هم بررسی کنیم، خوب است یک مروری روی اصل ضرب، جمع، جایگشت و ... (که در سال دهم آن‌ها را خوانده‌اید) داشته باشیم.

خب یک کاری دارید که از دو قسمت تشکیل شده است، مثلاً می‌خواهید دوستان را آبمیوه و غذا مهمان کنید. دقت کردید؟ آبمیوه و غذا یعنی می‌خواهید حاتم طایی بشوید و او را به هر دو تا جا ببرید. مثلاً ۴ نوع آبمیوه و ۳ نوع غذا داریم. اصل ضرب می‌گوید به  $4 \times 3 = 12$  روش می‌توانید این کار را انجام دهید.

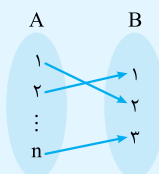
اصل ضرب: فرض کنید کاری از دو قسمت تشکیل شده باشد (برای انجام کار باید هر دو قسمت را انجام دهیم). اگر قسمت اول به  $n$  روش و قسمت دوم به  $m$  روش قابل انجام باشد، کل کار به  $n \times m$  روش می‌تواند صورت بگیرد.

### مثال و پاسخ

**مثال:** چند عدد چهاررقمی به صورت  $abcd$  وجود دارد؟

**پاسخ:** هر کدام از ارقام  $d, c$  و  $b$ ، ۱۰ حالت دارند (از صفر تا ۹) ولی  $a$ ، ۹ حالت دارد (صفر نمی‌شود)؛ پس تعداد اعداد چهاررقمی می‌شود:  $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$

**مثال:** چند تابع  $f$  از مجموعه  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  به مجموعه  $B = \{1, 2, 3\}$  وجود دارد؟ در چندتا از آن‌ها عدد ۱، عضو برد تابع نیست؟



**پاسخ:** از هر عضو  $A$  دقیقاً یک فلش باید خارج شده و به یک عضو  $B$  نظیر شود. عدد  $1 \in D_f$  را در نظر بگیرید، خب می‌تواند به ۱ یا ۲ یا ۳ برود، یعنی ۳ حالت دارد. ۲ چه‌طور؟ آن هم ۳ حالت دارد، خلاصه این‌که  $3^n = \underbrace{3 \times 3 \times \dots \times 3}_n$  تابع به دست می‌آید. حالا اگر ۱ عضو برد نباشد، یعنی هیچ کدام از عضوهای  $A$

نمی‌توانند به ۱ بروند، پس هر عضو دامنه، دو حالت داشته و  $2^n$  تابع این‌جوری به دست می‌آید.



**نکته:** تعداد تابع‌ها از مجموعه  $m$  عضوی  $A$  به مجموعه  $k$  عضوی  $B$  برابر است با:  $k^m$  (دومی به توان اولی).

## مثال و پاسخ

**مثال:** به چند حالت می‌توانیم ۴ جایزهٔ مختلف را بین ۷ نفر توزیع کنیم، به طوری که به هر نفر حداکثر یک جایزه برسد (یعنی هیچ‌کس بیشتر از یک جایزه نگیرد)؟

**پاسخ:** جایزهٔ اول را در نظر بگیرید. این را می‌توانیم به هر کدام از ۷ نفر بدهیم. جایزهٔ دوم را به هر کدام از ۶ نفر باقی‌مانده، جایزهٔ سوم را به هر کدام از ۵ نفر باقی‌مانده و جایزهٔ آخر را به هر کدام از ۴ نفر باقی‌مانده! خلاصه طبق اصل ضرب تعداد راه‌های توزیع جوائز، برابر  $4 \times 5 \times 6 \times 7$  می‌شود. (اگر از سال دهم یادتان باشد، این عدد همان جایگشت ۴ شیء از ۷ شیء است که برابر  $\frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!}$  می‌شود).

همین مسئله با یک ادبیات دیگر هم می‌تواند مطرح بشود: «چند تابع یک‌به‌یک از مجموعهٔ ۴ عضوی به مجموعهٔ ۷ عضوی وجود دارد؟» اول تعریف را یادآوری می‌کنیم:

**تعریف تابع یک‌به‌یک:** تابعی یک‌به‌یک است که هر عضو  $A$  دقیقاً به یک عضو منحصره‌فرد از  $B$  نظیر شود، یعنی دوتا عضو از  $A$  به یک عضو  $B$  نظیر نشوند؛ به زبان دیگر به هیچ عضو  $B$  دو تا فلش وارد نشده باشد.

A  
 $a_1$   
 $a_2$   
 $a_3$   
 $a_4$

B  
 $b_1$   
 $b_2$   
⋮  
 $b_7$

خب برای  $a_1$ ، ۷ حالت داریم، برای  $a_2$ ، ۶ حالت و ...

**نکته:** در حالت کلی تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعهٔ  $m$  عضوی  $A$  به مجموعهٔ  $k$  عضوی  $B$  که  $m \leq k$  برابر است با:

$$P(k, m) = (k)_m = \frac{k!}{(k-m)!} = (k)(k-1) \cdots (k-(m-1))$$

**نکته:** با همین فرمول نتیجه می‌شود تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعهٔ  $m$  عضوی به مجموعهٔ  $m$  عضوی برابر  $m!$  می‌شود.

**نکته:** اگر تعداد عضوهای  $A$  بیشتر از  $B$  باشد، تابع یک‌به‌یک از  $A$  به  $B$  وجود ندارد (وقتی سمت راست بیشتره، تماماً به بعضی عضوهای  $B$  بیشتر از یک دونه فلش وارد می‌شه).

حالا فرض کنید که جیب مبارک اجازه نمی‌دهد که دوستان را به هر دو تا جا ببرید، یعنی می‌خواهید او را به آبمیوه فروشی یا رستوران ببرید. این‌جا در واقع مسئله را به دو حالت تقسیم می‌کنید. هر کدام که انجام بشود کار صورت گرفته است و این‌ها با هم اتفاق نمی‌افتند. آبمیوه ۴ حالت، رستوران ۳ حالت! اصل جمع می‌گوید  $3 + 4 = 7$  حالت برای انجام این کار وجود دارد.

**نکته:** اصل جمع در واقع همان تقسیم‌بندی مسئله، به چند حالت است (که اشتراکی با هم ندارند) و هر کدام که انجام بگیرد کار انجام شده است. حتماً این را هم فهمیدید که برای اصل ضرب «و» می‌آید و برای اصل جمع «یا».

**اصل جمع:** فرض کنید کاری را بتوان به چند روش مجزا انجام داد. اگر روش اول به  $n_1$  طریق، روش دوم به  $n_2$  طریق و ... و روش  $k$  ام به  $n_k$  طریق قابل انجام باشد، کل کار به  $n_1 + n_2 + \dots + n_k$  روش قابل انجام است.

## مثال و پاسخ

**مثال:** در چند عدد سه‌رقمی دقیقاً یک رقم ۴ دیده می‌شود؟

**پاسخ:** عدد سه‌رقمی را به صورت  $\overline{abc}$  می‌گیریم. من می‌گویم سه حالت مجزا وجود دارد.

**حالت اول:**  $a = 4$  باشد، این‌جا داریم:

$$\frac{1 \times 9 \times 9}{\{4\}} = 81$$

به جز ۴، به جز ۴، به جز ۴

**حالت دوم:**  $b = 4$  باشد، این‌جا داریم:

$$\frac{8 \times 1 \times 9}{\{4\}} = 72$$

به جز ۴ و صفر، به جز ۴، به جز ۴

**حالت سوم:**  $c = 4$  باشد. این‌جا داریم:

$$\frac{8 \times 9 \times 1}{\{4\}} = 72$$

به جز ۴ و صفر، به جز ۴، به جز ۴

پس طبق اصل جمع  $81 + 72 + 72 = 225$  عدد سه‌رقمی که دقیقاً یک رقم آن برابر ۴ باشد وجود دارد. حالا اگر همین مسئله را تبدیل کنیم به «حداقل یک رقم ۴» داشته باشد، دیگر به این سادگی به دست نمی‌آید. چرا؟ چون حالت‌های اشتراک پیدا می‌کنند. این چیزی است که در این درس به حساب آن می‌رسیم!

# سؤال‌های امتحانی

۱۷- تعداد جواب‌های معادله  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$  را در هر کدام از شرایط زیر به دست آورید.

(الف) جواب‌ها صحیح نامنفی باشند.

(ب) جواب‌ها طبیعی باشند.

(پ) جواب‌ها صحیح نامنفی بوده و  $x_1 > 1$  و  $x_3 \geq 3$  باشد.

(ت)  $x_i \geq 2$  که  $1 \leq i \leq 4$  است.

(ث) جواب‌ها طبیعی بوده و  $x_2 = 3$  باشد.

(ج) جواب‌ها صحیح و نامنفی بوده و  $x_1 \leq 4$  باشد.

(نوبتی شهریور ۱۴۰۰)

۱۸- معادله  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$  چند جواب صحیح نامنفی دارد به شرط آن که  $x_1 > 2$  و  $x_4 \geq 4$  باشد؟

(مشابه تمرین کتاب)

۱۹- با استفاده از گل‌های مریم، رز و میخک چند دسته گل شامل ۸ شاخه می‌توان درست کرد به طوری که:

(الف) محدودیتی در استفاده از هر نوع گل نداشته باشیم؟

(ب) از هر ۳ نوع حتماً استفاده شود؟

(پ) حداقل دو شاخه میخک و دقیقاً یک شاخه رز استفاده شود؟

۲۰- به چند طریق می‌توان از بین ۶ نوع گل، ۱۲ شاخه انتخاب کرد، اگر بخواهیم از گل نوع اول حداقل یک شاخه، از گل نوع چهارم بیش از ۳ شاخه و از گل نوع ششم فقط یک شاخه انتخاب کنیم؟

(نوبتی فروردین ۱۴۰۰)

۲۱- به چند روش می‌توانیم:

(الف) ۹ توپ متمایز را درون ۳ سبد متمایز توزیع کنیم؟

(ب) ۹ توپ یکسان را درون ۳ سبد متمایز توزیع کنیم؟

(نوبتی فروردین ۹۸)

۲۲- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10$  با شرط  $i = 2, 3, 4, 5$  و  $x_i > 0$  را محاسبه کنید.

۲۳- ۱۲ نفر می‌خواهند به ۳ نفر رأی بدهند. تعداد رأی‌های کاندیداها، چند حالت ممکن است داشته باشند؟ (هر فرد دقیقاً به یک کاندید رأی می‌دهد).

۲۴- چند عدد سه‌رقمی وجود دارد به طوری که مجموع رقم‌ها برابر ۷ باشد؟

۲۵- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادله  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 7$  چندتا است؟ تعداد جواب‌های طبیعی نامعادله  $x_1 + x_2 + x_3 < 7$  چه‌طور؟

۲۶- دستگاه  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ y_1 + y_2 = 6 \end{cases}$  چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

(مشابه تمرین کتاب)

۲۷- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هر معادله را به دست آورید.

(الف)  $x_1^3 + x_2 + x_3 = 20$

(ب)  $\frac{10}{x_1} + x_2 + x_3 = 10$

(پ)  $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 9$  (ت)  $x_1 + x_2 + \sqrt{x_3} + x_4 = 4$

## مباحثی در ترکیبیات - بخش سوم

### مربع‌های لاتین

۱۵-۱۷ ۱۷-۱۹ ۱۹-۲۱

شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۲	۳	۱
دوشنبه	۳	۱	۲

سه فیلم ۱، ۲ و ۳ را می‌خواهیم در روزهای شنبه، یکشنبه و دوشنبه و در سه سانس به نمایش دریاوریم. برای این که عدالت رعایت بشود می‌خواهیم هر فیلم در هر روز و در هر سانس دقیقاً یک بار پخش شود. برای برنامه‌ریزی چه پیشنهادی دارید؟ خب مثلاً یکی از برنامه‌ها می‌تواند به صورت مقابل باشد:

حتماً فهمیدید تعبیر چیزهایی که گفتیم این می‌شود: «باید اعداد ۱، ۲ و ۳ را در یک جدول  $3 \times 3$  طوری قرار دهیم که هر عدد در هر سطر و هر ستون دقیقاً یک بار بیاید به عبارت دیگر در هیچ سطر و ستونی عدد تکراری نداشته باشیم». به این جدول یک مربع لاتین  $3 \times 3$  می‌گوییم. حالا چرا مربع‌های لاتین؟ چون اوایل که کارهای زیادی در این زمینه انجام داده به جای اعداد از حروف لاتین استفاده می‌کرده است. (کمی تأمل کنید و این مثال را خوب درک کنید. در هر روز، عدد تکراری نداریم (یعنی ۱ تا ۳ را داریم) و در هر سانس هم عدد تکراری نداریم (یعنی ۱ تا ۳ را داریم))

**تعریف مربع لاتین  $n \times n$ :** یک جدول مربعی  $(n \times n)$  که هر سطر و هر ستون با اعداد ۱، ۲، ۳، ...،  $n$  به گونه‌ای پر شده باشد که در هیچ سطر آن و هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد را یک مربع لاتین می‌گوییم. به هر یک از اعداد درون مربع لاتین، یک درایه (شبه ماتریس) می‌گوییم.

خب حالا که فهمیدید مربع لاتین چگونه مربعی است، بگویید ببینم آیا مربع لاتین از هر مرتبه‌ای (مثلاً  $4 \times 4$ ،  $5 \times 5$  یا ...) وجود دارد یا نه؟

۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱

بباید یکی دوتا امتحان کنیم. مثلاً مربع لاتین  $5 \times 5$  بسازیم. من می‌گویم سطر اول را ۱ تا ۵ بگذاریم. برای سطر دوم، اعداد سطر اول را یکی به راست ببریم. رقم ۵ هم انگار می‌چرخد و می‌آید در خانه اول سطر دوم! (به اصطلاح ماتریسی درایه  $a_{21}$  می‌شه). برای سطر سوم هم همین‌طور، سطر دوم را یکی به راست ببریم و با همین کار بقیه سطرها را هم به دست آوریم تا مربع لاتین مقابل به دست آید. شبیه همین به راحتی می‌توانیم مربع لاتین از هر مرتبه‌ای به دست آوریم.

**مربع لاتین چرخشی:** مربع لاتین به صورت مقابل را مربع لاتین چرخشی از مرتبه  $n$  می‌گوییم:

(مثلاً مربع لاتین بالا چرخشی از مرتبه ۵ بود. در واقع اعداد ۱ تا  $n$  را در سطر اول می‌نویسیم. در سطر بعدی اعداد را یکی به راست می‌بریم و آخری هم می‌چرخد و در ستون اول قرار می‌گیرد و همین‌طور سطرهای بعدی.)

۱	۲	۳	...	$n$
$n$	۱	۲	...	$n-1$
$n-1$	$n$	۱	...	$n-2$
...	...	...	...	...
۲	۳	...	...	۱

## مثال و پاسخ

**مثال:** چند مربع لاتین به صورت مقابل وجود دارد؟

۳		
		۱

**پاسخ:** خوب از کجا شروع کنیم؟ من می‌گویم آن دو مربع که با یک فلش دارد علامت زده‌ام، قطعاً باید ۲ باشند. چرا؟ چون در هیچ سطر و ستونی عدد تکراری نداریم، ۳ و ۱ نمی‌تواند باشد پس باید ۲ باشد. بقیه‌اش دیگر کاری ندارد. آن‌هایی که دو فلش دارند برابر ۱ می‌شوند و شبیه همین بقیه هم به دست می‌آیند. پس فقط یک مربع لاتین وجود دارد که درایه‌های  $a_{11}$  و  $a_{33}$  آن به ترتیب ۳ و ۱ باشند.

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

## ساخت مربع لاتین از روی مربع لاتین دیگر

خیالتان تا این‌جا راحت شد که مربع لاتین  $n \times n$  برای هر عدد طبیعی  $n$  وجود دارد. حالا فرض کنید یک مربع لاتین داریم.

مثلاً همان مربع لاتین  $3 \times 3$  که برنامه فیلم‌ها بود خیلی خوب است. من می‌گویم از روی این مربع لاتین، مربع لاتین‌های زیاد دیگری، می‌توانیم بسازیم. در هیچ سطر و ستونی عدد تکراری نداریم، پس اگر جای دو سطر را عوض کنیم باز هم به یک مربع لاتین می‌رسیم. مثلاً اگر در مربع لاتین  $3 \times 3$  فیلم‌ها، جای سطر اول و سوم را عوض کنیم، مربع لاتین مقابل به دست می‌آید:

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

شبیه همین می‌توانیم جای دو ستون را عوض کنیم. مثلاً اگر ستون اول و دوم را عوض کنیم داریم:

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

**۲** بیایید یک کار دیگر بکنیم. یک جایگشت روی ۱، ۲، ۳ اعمال کنیم!

مثلاً جایگشت ۲، ۱، ۳ را بگیریم. یعنی چه؟ ببینید در واقع به جای ۱، سه بگذاریم. به جای ۲، یک و به جای ۳ هم دو بگذاریم. خیلی تابلو است که این هم مربع لاتین می‌شود. چون اگر سطر یا ستون عدد تکراری داشته است با انجام برعکس کارها در مربع لاتین اولیه باید عدد تکراری در همان سطر یا ستون داشته باشیم (که نداریم چون مربع لاتین است!) با این کار به مربع لاتین زیر می‌رسیم:

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۱→۳  
۲→۱  
۳→۲

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

عجب داستانی شد! از روی یک مربع لاتین  $n \times n$  می‌توانیم با هر جایگشت، مربع لاتین‌های دیگری به دست آوریم.

## دو مربع لاتین متعامد

دوباره با آن مثال سینما کار داریم (مربع لاتین A). فرض کنید ۳ تا سالن ۱، ۲، ۳ داریم. باز دوباره می‌خواهیم در هر روز از هر ۳ سالن و در هر سانس نیز از هر ۳ سالن استفاده کنیم. خوب یک مربع لاتین دیگر مثل B می‌سازیم. حالا ماجرا کمی پیچیده‌تر می‌شود! می‌خواهیم هر دو کار را با هم انجام دهیم. یعنی:

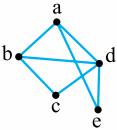
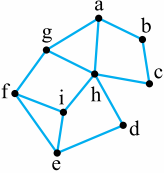
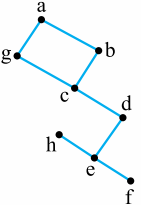
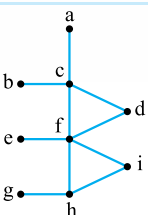
	۱۵-۱۷	۱۷-۱۹	۱۹-۲۱
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۲	۳	۱
دوشنبه	۳	۱	۲
	فیلم‌های ۱، ۲، ۳ مربع لاتین A		

	۱۵-۱۷	۱۷-۱۹	۱۹-۲۱
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۲	۳	۱
	سالن‌های ۱، ۲، ۳ مربع لاتین B		

**الف** هر فیلم در هر روز در یک سانس و در یک سالن به نمایش درآید.

**ب** هر فیلم در هر سالن فقط یک بار به نمایش دربیاید.

ردیف	نمونه امتحان نیم سال اول	رشته ریاضی	ریاضیات گسسته	نمره
	امتحان شماره ۱	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	Kheilisabz.com	
۱	ثابت کنید میانگین ۳ عدد طبیعی متوالی برابر عدد وسطی است.			۱
۲	$a, b$ دو عدد حقیقی هستند. نشان دهید اگر $ab = 0$ ، آن گاه $a = 0$ یا $b = 0$ .			۱
۳	نشان دهید اگر $\alpha, \beta$ اعدادی گنگ و $\alpha + \beta$ گویا، آن گاه $2\alpha + \beta$ عددی گنگ است.			۱
۴	با استفاده از گزاره‌های هم‌ارز ثابت کنید اگر $a$ عددی مثبت باشد، $a + \frac{1}{a} \geq 2$ .			۱
۵	نشان دهید اگر $a   b$ و $b \neq 0$ در این صورت $ a  \leq  b $ .			۱
۶	اگر $a$ برابر با عددی اول باشد که دو عدد $9k + 7$ و $7k + 6$ بر آن بخش پذیر باشد، $a$ را به دست آورید.			۱
۷	حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. (الف) $([m^3, m], m^5)$ (ب) $[[2m, 4m^2], 6m^3]$			۱
۸	باقی‌مانده تقسیم عدد $a$ بر ۷ و ۸ به ترتیب ۲ و ۷ است. باقی‌مانده تقسیم عدد $a$ بر ۵۶ را به دست آورید.			۱
۹	باقی‌مانده تقسیم عدد $3^56 + 38$ را بر ۲۶ به دست آورید.			۱
۱۰	اگر ۷ اردیبهشت چهارشنبه باشد، ۱۱ شهریور چندشنبه است؟			۱
۱۱	به چند طریق می‌توان ۲۳۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟			۱/۵
۱۲	به ازای کدام اعداد طبیعی $m \leq 100$ ، معادله هم‌نهشتی $2x \equiv 1 \pmod{3m+1}$ دارای جواب است؟			۱/۵
۱۳	گراف $G$ با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه یال‌های $E(G) = \{ab, ac, af, bd, de, df, fc\}$ را در نظر گرفته و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید: (الف) $N_G[d]$ را مشخص کنید. (ب) دو یال مجاور نام ببرید. (پ) گراف مکمل را رسم کنید. (ت) یک زیرگراف ۴ رأسی و ۳ یالی از گراف مشخص کنید.			۲
۱۴	آیا ممکن است درجه‌های گرافی از مرتبه ۷ به صورت $5, 2, 2, 2, 2, 2, 2$ باشد؟ چرا؟			۰/۵
۱۵	گراف ۹ رأسی رسم کنید که فقط دورهایی به طول ۹، ۶، ۵ داشته باشد.			۰/۵
۱۶	گراف‌های $C_5$ و $P_6$ را رسم کنید.			۰/۵
۱۷	چند گراف جهت‌دار با پنج رأس $a, b, c, d, e$ می‌توان ساخت؟			۱
۱۸	در یک گراف $G$ از مرتبه ۱۱ و اندازه ۲۳، $\deg_G(a) = 6$ است. (الف) $q(\bar{G})$ را به دست آورید. (ب) $\deg_{\bar{G}}(a)$ را به دست آورید.			۱/۵
۱۹	فرض کنید $G$ یک گراف ساده است. ثابت کنید اگر $\delta(G) \geq 4$ باشد، مسیری به طول ۴ در گراف وجود دارد.			۱
۲۰	جمع نمرات			

نمونه امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۱	رشته ریاضی	ریاضیات گسسته	نمره
ردیف	امتحان شماره ۳	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	Kheilisabz.com
۱	درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. الف) اگر $a \mid b$ و $a \neq 0$ ، در این صورت $ a  >  b $ . ب) برای دو عدد صحیح و ناصفر $a$ و $b$ اگر $(a \mid c, b \mid c)$ و $(\forall m > 0; a \mid m, b \mid m \Rightarrow c \leq m)$ ، آن گاه $[a, b] = c$ . پ) برای هر دو عدد صحیح $a$ و $b$ و عدد طبیعی $m$ ، اگر باقی‌مانده تقسیم $a$ بر $m$ مساوی با $r$ باشد، در این صورت $a \equiv r \pmod{m}$ . ت) بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۴ و ۲ برابر ۲- است.		۱
۲	ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج $n$ ، $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.		۱
۳	اگر عددی مانند $k$ در $\mathbb{Z}$ باشد به طوری که $4k + 1$ ، $5 \mid 4k + 1$ ، ثابت کنید $16k^2 + 28k + 6$ ، $25 \mid 16k^2 + 28k + 6$ .		۰/۷۵
۴	باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 27^{20} + 18$ را بر ۱۳ بیابید.		۱
۵	اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد، در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟		۱/۲۵
۶	جاهای خالی را با عددی یا کلمه مناسب پر کنید. الف) اگر درجه یک رأس فرد باشد، آن را رأس ..... می‌نامیم. ب) گرافی را که تمام رئوس آن تنها باشد و هیچ یالی نداشته باشد، گراف ..... می‌نامیم. پ) تعداد یال‌های گراف $K_4$ ، برابر با ..... است. ت) گراف $G$ را ..... می‌نامیم، هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.		۱
۷	به سؤالات زیر کوتاه پاسخ دهید. الف) گراف $C_7$ را رسم کنید، سپس یک مسیر به طول ۵ بنویسید. ب) در گراف شکل مقابل، $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید.		۱
۸	الف) مجموعه احاطه‌گر مینیمال را تعریف کنید. ب) برای گراف شکل روبه‌رو، یک مجموعه احاطه‌گر با ۴ عضو انتخاب کنید.		۱/۲۵
۹	عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل را با ارائه راه‌حل، تعیین کنید.		۱/۲۵
۱۰	ابتدا گراف $P_9$ را رسم کنید؛ سپس یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم از آن را مشخص کنید.		۱
۱۱	گراف شکل مقابل را در نظر بگیرید. الف) یک $\gamma$ -مجموعه مشخص کنید. ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.		۱/۵
۱۲	۶ کتاب متفاوت تاریخ و ۵ کتاب متفاوت ادبیات را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم چید به طوری که: الف) کتاب‌های تاریخ همواره کنار هم باشند. ب) به صورت یک در میان قرار بگیرند.		۱
۱۳	با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟		۱
۱۴	معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن که $x_3 = 4$ و $x_5 > 2$ باشد؟		۱/۵

# پاسخ نامه تشریحی امتحان شماره (۴)

ب)  $(\circ, ۷۵)$   $(\circ, ۵)$   $۲! \times ۷!$

۱۱- الف)  $(\circ, ۷۵)$   $(\circ, ۵)$   $۶! \times ۲!$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = ۱۲, \quad -۱۳$

$x_1 \geq ۱, x_2 > ۳, x_6 = ۱ \quad (\circ, ۵)$

$y_1 = x_1 + ۱, y_1 \geq ۰ \quad (\circ, ۲۵), y_2 = x_2 + ۴, y_2 \geq ۰ \quad (\circ, ۲۵)$

$y_1 + ۱ + x_2 + x_3 + y_4 + ۴ + x_5 + ۱ = ۱۲ \quad (\circ, ۲۵)$

$\Rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + y_4 + x_5 = ۶ \quad (\circ, ۲۵) \Rightarrow \text{جواب} = \binom{۱۰}{۴} \quad (\circ, ۵)$

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

 $\Rightarrow B =$ 

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

 $\Rightarrow$ 

۲۱	۳۳	۱۲
۱۲	۲۱	۳۳
۳۳	۱۲	۲۱

متعامد نیستند. زیرا در مربع آخر عدد دورقمی تکراری داریم.  $(\circ, ۵)$

$|F| = ۱۵, |V| = ۱۱, |B| = ۹, |F \cap V| = ۵ \quad -۱۵$

$|B \cap V| = ۶, |F \cap B| = ۳, |F \cap B \cap V| = ۳$

فقط فوتبال بازی کنند.

$= |F| - |F \cap V| - |F \cap B| + |F \cap B \cap V|$

$= ۱۵ - ۵ - ۳ + ۳ = ۱۰ \quad (\circ, ۵)$

فقط والیبال بازی کنند.

$= |V| - |F \cap V| - |V \cap B| + |F \cap B \cap V|$

$= ۱۱ - ۵ - ۶ + ۳ = ۳ \quad (\circ, ۵)$

فقط بسکتبال بازی کنند.

$= |B| - |F \cap B| - |V \cap B| + |F \cap B \cap V|$

$= ۹ - ۳ - ۶ + ۳ = ۳ \quad (\circ, ۵)$

$\Rightarrow \text{ج} = ۱۰ + ۳ + ۳ = ۱۶ \quad (\circ, ۲۵)$

۱۶- الف)  $۳^۴ - (۳ \times ۲^۴ - ۳) = ۳۶ \quad (\circ, ۵)$

ب)  $\frac{۱!}{۴!} = ۱۶۸۰ \quad (\circ, ۵)$

$k + ۱ = ۵ \Rightarrow k = ۴ \quad (\circ, ۲۵) \quad -۱۷$

$kn + ۱ = ۵۴ \Rightarrow ۴n = ۵۳ \quad (\circ, ۲۵)$

$n = \left\lceil \frac{۵۳}{۴} \right\rceil = ۱۳ \quad (\circ, ۲۵)$

۱- الف) درست  $(\circ, ۲۵)$  ب) نادرست  $(\circ, ۲۵)$

۲- الف) عدد a شمارنده عدد b است.  $(\circ, ۵)$

ب)  $|2m| \quad (\circ, ۲۵)$

۳-  $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{۲} \quad (\circ, ۲۵) \Leftrightarrow ۲xy \leq x^2 + y^2 \quad (\circ, ۲۵) \quad -۳$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - ۲xy \geq ۰ \quad (\circ, ۲۵) \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq ۰ \quad (\circ, ۲۵)$

گزاره همواره درست است.  $(\circ, ۲۵)$

۴-  $p = ۴k \quad (۱)$

$p = ۴k + ۱ \quad (۲)$

$p = ۴k + ۲ = ۲(۲k + ۱) \quad (۳)$

$p = ۴k + ۳ \quad (۴) \quad (\circ, ۲۵)$

در حالت (۱) و (۳)، p عددی زوج (بزرگتر از ۲) است که با اول بودن

آن تناقض دارد.  $(\circ, ۲۵)$  بنابراین اعداد اول به فرم (۲) یا (۴) خواهند

بود.  $(\circ, ۲۵)$

۵-  $۱۰۰۰ \equiv -۱ \quad (\circ, ۲۵) \Rightarrow \underbrace{(۱۰۰۰)^{۲۵} \times ۹ + ۱ \equiv (-۱)^{۲۵} \times ۹ + ۱}_{(\circ, ۲۵)} \equiv ۲$

$\Rightarrow r = ۲ \quad (\circ, ۲۵)$

۶-  $۷x \equiv ۱ \Rightarrow ۷x \equiv ۴ \times ۵ + ۱ \quad (\circ, ۲۵) \Rightarrow ۷x \equiv ۳۶ \quad (\circ, ۲۵) \quad -۶$

$\xrightarrow{(۷, ۴)=۱} x \equiv ۳ \quad (\circ, ۲۵) \Rightarrow x = ۴k + ۳ \quad (\circ, ۲۵)$

۷- الف)  $N_G(c) = \{a, e, d\} \quad (\circ, ۷۵)$

ب) رأس f و ۵  $(\circ, ۵)$

پ) abcda  $(\circ, ۵)$

ت) خیر  $(\circ, ۲۵)$

۸- مجموعه احاطه گر مینیمم مجموعه احاطه گری است که کمترین

تعداد عضو را دارد ولی مجموعه احاطه گر مینیمال مجموعه احاطه گری

است که با حذف هر یک از رئوس آن دیگر احاطه گر نیست و می تواند

از مجموعه احاطه گر مینیمم بیشتر عضو داشته باشد. (هر مورد  $(\circ, ۲۵)$ )

۹-  $D = \{a, c, i, d\} \quad (۱)$  (در صورتی که مجموعه های مشابه که

ویژگی مسئله را داشت، نوشتند، نمره داده شود.)

۱۰- طبق قضیه داریم  $۲ \leq \gamma(G) \leq \left\lceil \frac{۱۰}{۴+۱} \right\rceil = ۲ \quad (\circ, ۵)$  از طرفی مجموعه

$D = \{e, j\}$  یک مجموعه احاطه گر است.  $(\circ, ۵)$  لذا  $\gamma(G) \leq ۲$

$(\circ, ۲۵)$  بنابراین  $\gamma(G) = ۲$